SHOUT
SHARE
IT

S. 1142. A.

MEMORIE
DI
MATEMATICA
E FISICA
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA
TOMO III.

SEMPER
EADEM

VERONA
PER DIONIGI RAMANZINI
MDCCLXXXVI.

BRITISH
NATURAL HISTORY.

STATUTO
DELLA
SOCIETÁ ITALIANA.

I.

LA Società Italiana ſarà compoſta di quaranta Italiani di un merito maturo, e per opere date in luce ed applaudite univerſalmente riconoſciuto.

II.

La ſcienza della Natura è il grande oggetto intorno a cui ſi propone di verſare la Società Italiana. Pubblicherà ella pertanto di due in due anni nella città di Verona ſotto il titolo di Memorie di Matematica, e Fiſica le Ricerche di chiunque vorrà de' quaranta Socj attuali comunicare al pubblico il frutto de' ſuoi ſtudj negli Atti Sociali.

III.

Di queſti quaranta membri uno ſarà Preſidente della Società, e la Preſidenza durerà ſei anni, miſurandoſi queſto periodo coll' edizione di tre Volumi.

IV.

Avrà la Società un Secretario perpetuo e amminiſtratore, ed un Vice-Secretario e direttore della ſtampa, ambidue reſidenti in Verona.

V.

Altra Claſſe nella Società ſarà di Socj Emeriti di numero indeterminato. Ella è preparata a chiunque de' Socj attuali o per età avanzata, o per abituale mancanza di ſalute, o per altro motivo ſtimaſſe dicevole alle proprie convenienze di ritirarſi. Per il che ſcorgendoſi non apparire in tre conſecutive edizioni di Atti Sociali, principiando con queſta, veruna produzione di qualche Socio, dovrà queſt' inazione eſſere dal Preſidente inteſa per una formale dichiarazione di voler eſſere aſcritto nella Claſſe degli Emeriti.

VI.

Altra Claſſe pur indeterminata ſarà di Socj Onorarj. Queſta deve eſſer compoſta a giudicio e ſcelta del Preſidente di Soggetti che abbiano operato coſa a favore della Società, per cui meritino a buon diritto di eſſere dalla Società onorati particolarmente.

VII.

Ed altra Claſſe ſarà finalmente col titolo di Socj Stranieri ſtabilita per diſtinguere e onorare il merito nelle Scienze in qualunque parte abbia luogo della Terra. Sarà ella compoſta di dodici membri aggregati a pluralità di voti. Perciò al caſo di vacanza il Preſidente col mezzo del Secretario manderà ai Socj votanti una liſta con ſei nomi, di cui è in libertà ciaſcun votante entro due meſi dal dì appoſto alla liſta di proporne uno in lettera diretta al Secretario, da cui ſarà poi fatta conſapevole la Compagnia dell' elezione. A ciaſchedun membro ſtraniero ſarà mandato in dono di volta in volta un eſemplare degli Atti pubblicati dalla Società Italiana.

VIII.

Nello ſteſſo modo ſarà fatta l' aggregazione de' quaranta Socj ſecondo la prevalenza de' voti, cui avrà in ſorte un de' ſei nominati dal Preſidente, e offerti alla ſcelta de' votanti della Società.

IX.

Le Memorie de' Socj debbono eſſere ſcritte in lingua Italiana, in carattere chiaro e leggibile, e ſpedite franche al Secretario prima che ſpiri il meſe di Marzo dell' anno deſtinato alla ſtampa. Ed eſſendo l' opera voluminoſa può l' Autore diſtribuirla in due o più parti pe' Tomi ſuſſeguenti. Ma in tutti i caſi ciò ch' è deſtinato per gli Atti deve eſſere nuovo, inedito, e contenente coſa d' importanza, onde avanzamento n' abbia la Scienza. E qualvolta l' Autore il richiegga, ſarà, sì per ſalvezza e aſſicuramento di proprietà in qualche ſcoperta, e sì ancora per motivo di nobile emulazione in uno ſteſſo argomento, ſtampata a piè di pagina la data del ricevimento della ſua Memoria.

X.

La Società non riſponde delle opere pubblicate negli Atti ſotto il ſuo nome, dovendone ciaſcheduno eſſere riſpondente per sè, come ſe egli ne faceſſe ſeparatamente la pubblicazione.

XI.

Non permette però, che, trattandoſi di argomento in controverſia, eſca invettiva perſonale contro chiccheſſia, od anche critica non miſurata, ſopra di che veglieranno i Secretarj, e ne faranno al caſo inteſo il Preſidente per un acconcio provvedimento.

XII.

A ciaſcheduno de' quaranta Socj è conceduta libertà d' inſerire negli Atti una ſcoperta utile, un' importante produzione anche di perſona non aggregata, ma italiana, purchè ne riſponda egli ſteſſo come di coſa propria inverſo la Compagnia.

XIII.

Il Socio Autore di una Memoria avrà in dono il Volume in cui è contenuta, e dodici eſemplari della medeſima.

XIV.

I fogli ſtampati di ciaſcun Volume non dovranno eccedere il numero di cento e venti. Perchè è incaricato il Secretario di regiſtrare le date de' ricapiti di ciaſcuna Memoria sì, che per ordine di quelle ſucceda la ſtampa delle Diſſertazioni Sociali, eſſendo in libertà gli Autori delle più tarde di laſciarle in depoſito pel Tomo ſuſſeguente, o di ricuperarle, come meglio a' loro riguardi veniſſe in acconcio.

XV.

Qualora un Socio nel pubblicare un' Opera ſeparata appor voglia tra' ſuoi titoli letterarj quello di membro della Società Italiana, ragion vuole che primo in ordine ſia il titolo letterario nazionale.

XVI.

All' elezione del Preſidente ſaranno ſempre invitati i Socj con una ſtampiglia dal Secretario. Entro due meſi dal dì appoſto alla ſtampiglia dovrà da ciaſcun votante eſſere rimeſſa la nomina del Socio da sè eletto a Preſidente ſcritta e ſigillata in mano del Secretario, e la pluralità de' voti determinerà l' elezione, che dovrà toſto eſſere dal medeſimo annunciata alla Compagnia.

XVII.

De' Socj sì attuali, che emeriti, cui morte andrà togliendo alla Società di quando in quando, ſarà compilato un elogio, ben dovuto alla memoria di coloro, che ſi adoperano utilmente nell' avanzamento delle Scienze.

XVIII.

Alle principali Accademie eſtere ſarà offerto in dono un eſemplare di ciaſcun Volume della Società, che andrà ſucceſſivamente uſcendo alla luce.

XIX.

Gli Ufficj del Preſidente conſiſtono principalmente

I. Nell' avere in caſo di vacanza la nomina di ſei Soggetti nazionali da proporſi per la ſcelta di uno a' membri votanti della Società. Nel che fare dovrà tra ſei nominar ſempre, e ſegnare con aſteriſco quelli de' quali aveſſe avuto luogo qualche Memoria negli Atti preſentata da un Socio, come è detto all' Articolo XII.

II. Nell' avere lo ſteſſo diritto di nominare ſei ſtranieri per la ſcelta di uno in caſo di un poſto vacante nella Claſſe de' Socj ſtranieri.

III. Nell' aggregare alla Claſſe de' Socj Onorarj durante la ſua Preſidenza due tra' Soggetti, che aveſſero operato coſa a prò della Società, com' è detto all' Art. VI.

IV. Nell' avere egli in governo e cura la conſervazione del fondo, e de' capitali della Società, e la ſopraintendenza all' amminiſtrazione del Secretario per la ſtampa biennale degli Atti e per le ſpeſe anneſſe, vegliando ſul ſiſtema economico, e facendone al terminare di ſua Preſidenza eſatto ragguagliamento al ſucceſſore.

V. Nel traſportarſi a Verona, qualora ſucceda vacanza o altra neceſſità di ſoſtituzione ne' poſti di Secretario, o Vice-Secretario ond' eleggere e ſtabilire con immediate cognizioni il Soggetto più acconcio ad un tale miniſtero, ſcelta libera al ſolo Preſidente commeſſa e raccomandata.

VI. E finalmente nell' invigilare con fermezza e zelo, perchè non s' alteri in checcheſſia il ſiſtema di queſta fondazione.

XX.

E quanto agli Ufficj ſpeciali de' Secretarj ſono eſſi compreſi ne' ſeguenti Articoli.

I. Dopo il Preſidente i Secretarj ſono le perſone propriamente deſtinate a mantenere corriſpondenza con tutti i membri della Società, e quaſi centro ove debbono metter capo tutte le relazioni Sociali. Eſſi ricevono da' Socj le Memorie, preſiedono al buon governo della ſtampa, ed all' inciſione accurata delle Tavole, regolano la diſtribuzione delle Diſſertazioni, e ogni altro affare della Società, ſempre però coll' approvazione del Preſidente, cui dovranno tener ſaputo d' ogni coſa eſattamente.

II. Terranno fedele regiſtro delle coſe più importanti, e cuſtodiranno religioſamente i voti ſecreti de' Socj nelle elezioni, de' quali al ſolo Preſidente ſarà permeſſa l' oculare iſpezione ſu' fogli originali, non mai però la traſcrizione, ch' è aſſolutamente vietata a chiccheſſia.

III. Il Secretario come Amminiſtratore avrà l' economica per la ſtampa, e per ogn' altra ſpeſa, di cui terrà eſattamente ragguagliato il Preſidente.

IV. Sarà cura di lui lo ſpedire le Patenti di aggregazione così a' Socj nazionali, come agli ſtranieri, che verranno ſucceſſivamente eletti.

V. Il Vice-Secretario poi, cui è affidata particolarmente la direzione della ſtampa, dovrà ſopraintendervi attualmente, valendoſi eziandio dell' ajuto di altro ſoggetto ſcelto a ſuſſidio, e vegliare per tutte le occorrenze nella Stamperia.

CATALOGO
DE' MEMBRI
DELLA
SOCIETÁ ITALIANA.

PRESIDENTE

…………………

SOCJ ATTUALI

Giovanni Arduino Profeſſore di Mineralogia, e di Chimica Metallurgica, e Pubblico Sopraintendente alle coſe agrarie dello Stato Veneto. *Venezia*.

Carlo Barletti delle Scuole Pie, Profeſſore di Fiſica generale nella R. I. Univerſità di Pavia. *Pavia*.

Teodoro Bonati Matematico del Pubblico di Ferrara. *Ferrara*.

Ruggero Giuseppe Abate Boscovich Regio Profeſſore di Ottica nel Dipartimento della Marina di Francia. *Parigi*.

Antonio Cagnoli Aſtronomo. *Verona*.

Leopoldo Marcantonio Caldani Primario Profeſſore ordinario di Medicina ſtorica, e di Anatomia nell' Univerſità di Padova. *Padova*.

Sebastiano Canterzani Profeſſore di Matematica nella Pontificia Univerſità di Bologna, e Secretario perpetuo dell' Iſtituto delle Scienze. *Bologna*.

Angelo Abate de Cesaris Aſtronomo nel Regio Oſſervatorio di Milano. *Milano*.

Giovanni Francesco Cigna Poſeſſore di Anatomia nella Regia Univerſità di Torino. *Torino*.

Domenico Cirilli Profeſſore di Medicina Teorica nella Regia Univerſità di Napoli. *Napoli*.

Domenico Cotunio Profeſſore di Anatomia nella Regia Univerſità di Napoli. *Napoli*.

Paolo Delanges Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Profeſſore di Matematica nelle Scuole Militari. *Verona*.

Pietro Ferroni Idraulico di S. A. R. il G. Duca di Toſcana. *Firenze*.

Felice Fontana Direttore del Regio Gabinetto Fiſico di S. A. R. il G. Duca di Toſcana. *Firenze*.

Gregorio Fontana delle Scuole Pie, Profeſſore di Matematica Superiore nella R. I. Univerſità di Pavia. *Pavia*.

Vittorio Fossombroni Cavaliere dell' incl. Ordine Militare di Santo Stefano di Toſcana. *Arezzo*.

Michele Girardi Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Preſidente al Gabinetto di Storia naturale, e Profeſſore della medeſima, e di Anatomia. *Parma*.

Lodovico de la Grange Direttore dell' Accademia Reale delle Scienze di Berlino, e Preſidente Onorario dell' Accademia Reale di Torino. *Berlino*.

Marsilio Landriani Cavaliere dell' incl. Ordine militare di Santo Stefano di Toſcana, e Regio Profeſſore di Fiſica Sperimentale. *Milano*.

Antonmario Lorgna Cavaliere della ſacra Religione de' Santi Maurizio e Lazaro, Colonnello degl' Ingegneri Veneti, e Governatore delle Scuole Militari. *Verona*.

Vincenzo Malacarne Direttore delle Regie Terme Acqueſi, e Chirurgo Maggiore del Reale Preſidio di Torino. *Torino*.

Giovanni Francesco Malfatti Profeſſore di Matematica nella Pontificia Univerſità di Ferrara. *Ferrara*.

Carlo Lodovico Conte Morozzo Maggiore del Reggimento di Suſa di S. M. il Re di Sardegna, e Vice-Preſidente dell' Accademia Reale delle Scienze di Torino. *Torino*.

Pietro Moscati Regio Direttore Generale degli Spedali di Milano. *Milano*.

Barnaba Abate Oriani Aſtronomo nel Reale Oſſervatorio di Milano. *Milano*.

Pietro Paoli Profeſſore di Matematica nella Regia Univerſità di Piſa. *Pisa*.

Ermenegildo Pini Ch. Reg. B. Profeſſore di Storia Naturale. *Milano*.

Giordano Conte Riccati. *Treviso*.

Pietro Rossi Profeſſore di Logica nella Regia Univerſità di Piſa, e Naturaliſta. *Pisa*.

Giuseppe Angelo Conte Saluzzo Gentiluomo di Camera di S. M. il Re di Sardegna, e Preſidente dell' Accademia Reale delle Scienze di Torino. *Torino*.

Girolamo Saladini Patrizio Luccheſe, Canonico nella Metropolitana di Bologna. *Bologna*.

Leonardo Salimbeni Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Profeſſore di Matematica nelle Scuole Militari. *Verona*.

Antonio Scarpa Profeſſore di Anatomia, ed operazioni Chirurgiche nella R. I. Univerſità di Pavia. *Pavia*.

Giuseppe Slop de Cadenberg Profeſſore di Aſtronomia nella Regia Univerſità di Piſa. *Pisa*.

Lazaro Abate Spallanzani Profeſſore di Storia Naturale nella R. I. Univerſità di Pavia, e Sopraintendente al Pubblico Muſeo della medeſima. *Pavia*.

Simone Conte Stratico Profeſſore di Matematica, e di Fiſica Sperimentale nell' Univerſità di Padova. *Padova*.

Giuseppe Vairo Profeſſore di Chimica nella Regia Univerſità di Napoli. *Napoli*.

Giovanni Battista Abate Venturi Profeſſore di Matematica nell' Univerſità di Modena. *Modena*.

Alessandro Volta Profeſſore di Fiſica Sperimentale nella R. I. Univerſità di Pavia. *Pavia*.

Verardo Zeviani Medico-Fiſico. *Verona*.

SOCJ EMERITI

……

SOCJ ONORARJ

Angelo Monsignore Fabroni Preſidente della R. Univerſità di Piſa, e Priore nell'incl. Ordine di Santo Stefano di Toſcana. *Pisa*.

Ippolito Marchese Pindemonte Patrizio Veneto, e Cavaliere Geroſolimitano. *Venezia*.

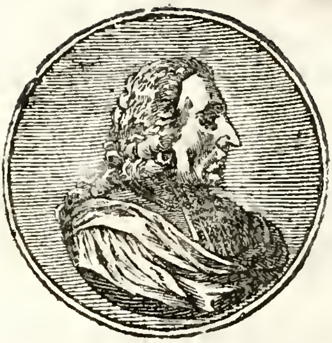
SOCJ STRANIERI

M. Achard. *Berlino*.
M. Bonnet. *Ginevra*.
M. Le Comte de Born. *Vienna*.
M. Le Comte de Buffon. *Parigi*.
M. Camper. *Amsterdam*.
M. Campomanes. *Madrid*.
M. Franklin. *Filadelfia*.
M. Muller. *Copenaghen*.
M. Narvoysz. *Wilna*.
M. Pallas. *Pietroburgo*.
M. Pryestley. *Londra*.
M. Scheele. *Stockolm*.

SECRETARJ

Agostino Abate Vivorio Profeſſore di Geografia e Storia nelle Scuole Militari di Verona, Secretario perpetuo, e Amminiſtratore. *Verona*.

Giuseppe Abate Tommaselli Vice-Secretario, e Direttore della Stampa. *Verona*.



ELOGIO

DI EUSTACHIO ZANOTTI

Scritto

Da Monſignor ANGELO FABRONI.

EUSTACHIO ZANOTTI nato in Bologna il dì 27 di Novembre dell' anno 1709 da un padre pittore e poeta, da una madre legata ancor eſſa per vincolo di parentela con rinomatiſſimi pittori, moſtrò fino dalla più tenera età, ch' egli avrebbe accreſciuta la gloria d' una famiglia, in cui pareva eſſere ereditaria la dottrina e la virtù. I primi ſuoi maeſtri furono i Geſuiti, poi appreſe la filoſofia dal ſuo Zio Franceſco Maria Zanotti, chiariſſimo lume della letteratura Bologneſe, e finalmente fu eſercitato nell' algebra dal maggior analiſta, che aveſſe allor l' Italia, Gabriello Manfredi. Frequentava anche il fratello Euſtachio, che l' aveva tenuto a batteſimo, e l' eſempio, le voci e gli ſcritti di queſto acceſero in lui un vivo deſiderio di diventare aſtronomo, e di ſervir la patria nella difficile e delicata ſcienza del regolamento dell' acque. Vi ſon dei talenti pieni di confidenza, che riconoſcono come per iſtinto l' oggetto deſtinato loro dalla natura, e che corrono ad eſſo non ſolo con alacrità, ma ancora con una ſpecie d' impeto, che non ammette freno; ve ne ſono degli altri timidi e modeſti, che hanno biſogno di eſſere avvertiti delle lor forze, e che per queſta ignoranza di loro medeſimi non ſono meno intereſſanti, e meno degni d' eſſer condotti all' immortalità che gli aſpetta. Forſe lo Zanotti ſenza Euſtachio Manfredi non ſarebbe ſtato nè idroſtatico, nè aſtronomo, e i conforti di queſto tenero maeſtro e quaſi padre produſſero sì buon effetto, che l' ebbe, in luogo del Caſtelvetri, per ajuto nelle incombenze dell' Oſſervatorio, quando appena aveva egli compito il diciannoveſim' anno dell' età ſua. Poco dopo ottenne lo Zanotti dal Dottor Bazzani, allora Preſidente dell' Inſtituto, la laurea in filoſofia, e tre anni dopo, cioè nel 1733 ſoſtenne pubblica diſputa per facilitarſi il conſeguimento d' una cattedra. La Neutoniana teoria ſulla luce, e ſu i colori fecero il principal argomento delle ſue teſi, e ſe ſi conſidera in quale ſtato foſſe allora la fiſica in Italia, non poca lode dovrà darſi a chi procurava con tutto l' impegno di far note e di confermare le recenti maraviglioſiſſime ſcoperte del gran Neuton. Queſto ſolenne eſperimento ebbe la meritata ricompenſa, e lo Zanotti fu arruolato tra i pubblici profeſſori di matematica. La ſua modeſtia dovè fin d' allora aſſuefarſi ai contraſſegni di ſtima di tutti quelli, che il conoſcevano. Fu rappreſentato ai Riformatori dello Studio di Padova quanta dottrina ornaſſe lo Zanotti, ed eſſi gli offerirono una cattedra. Queſt' offerta poſe in timore il Senato di Bologna, che vedeva in lui un degno ſucceſſor del Manfredi, cui l' età e i mali d' orina conducevano a gran paſſi al ſepolcro. Poco però vi volle a trattenere un cittadino, che libero dagli ſtimoli dell' ambizione e dell' intereſſe nulla più deſiderava che di ſervir la patria. Muore intanto il Manfredi, e quell' uomo raro, che rendè ſempre più riſpettabili le lettere per le ſue opere e pe' ſuoi coſtumi, e che fu l' oggetto dell' ammirazione non ſol di Bologna, ma anche di tutta l' Italia, dichiarò morendo, che era contento di laſciar libero un bel campo di gloria al ſuo Zanotti, raccomandandogli l' Oſſervatorio, e l' Inſtituto. Egli ſi moſtrò ſubito degno di queſt' elogio, profittando dell' apparizione d' una cometa, che non ſappiamo eſſere ſtata da verun altro aſtronomo oſſervata. L' aſtronomia, che ha i ſuoi faſti non altrimenti che gli abbia la ſtoria del mondo, ha biſogno di chi regiſtri in eſſi le apparizioni di queſt' aſtri e i loro caratteri per poterli riconoſcere, quando ricompariranno. Lo Zanotti non ſolo seguitò la cometa per tutto quello ſpazio di tempo, in cui fu viſibile, ma adoperò tal diligenza e maeſtria nelle oſſervazioni, che il rinomatiſſimo Abate la Caille nelle ſue lezioni d' aſtronomia tra tant' altre comete, che avrebbe potuto ſcegliere, ſi ſerve di queſta per moſtrare l' applicazione d' un ſuo metodo di ricavar dai luoghi oſſervati d' una cometa gli elementi dell' orbita nel caſo che la figura di queſta ſi voglia ſupporre parabolica. Quantunque il Neuton aveſſe già creata la dinamica, e l' aveſſe corredata di que' metodi, che ſon così univerſali e grandi, quanto lo ſia la natura nelle ſue operazioni; ciò non oſtante non ſi cominciò che tardi ad applicare i principj dell' attrazione per determinare l' orbita parabolica delle comete. Il Bailly aſſicura, che ſolamente verſo l' anno 1740 cominciarono gli aſtronomi Franceſi a battere queſta ſtrada, e che la cometa del 1744 fu quella che trionfò onninamente dei pregiudizj, moſtrando che ella non aveva deſcritta nè una linea retta, nè un gran cerchio intorno la terra, come da molti, e particolarmente dai vecchj aſtronomi ſi credeva. Queſt' epoca divien glorioſa allo Zanotti, perchè egli prima de' Franceſi nel calcolare gli elementi dell' orbita della cometa del 1739 riconobbe la legge dell' attrazione Neutoniana ; e perchè non ſi erano allora trovati que' metodi , che ſervono a diminuire la proliſſità, il tedio , e l' intralciamento dei calcoli , così dovette egli penſare a un metodo tutto ſuo, e queſto ſarà ſtato il metodo trigonometrico, che pubblicò poſcia nel III. Tomo degli Atti dell' Accademia di Bologna, giacchè appunto ci avviſa in quella Diſſertazione, ch'eragli riuſcito aſſai comodo nella cometa del 1739 e in quella del 1742. Tanto più di lode è dovuta allo Zanotti per l' invenzione di queſto metodo, quanto meno era ſtata fino a quel tempo coltivata la parte dell' aſtronomia, a cui egli appartiene. I progreſſi, che ha fatti queſta ſcienza nel corrente ſecolo, ſon principalmente dovuti al potente ſoccorſo della geometria. Il geometra ſimile a uno ſcavator di mine diſcende per una ſtrada ſotterranea nel ſeno della natura; la ſcienza , ch' ei profeſſa, gli ſerve di fiaccola, e tornato dalle tenebre alla luce del giorno racconta quel che ha ſcoperto , ſvela i miſterj della notte , le difficoltà che ha ſuperate, e annunzia che a tal verità vi è attaccata tal altra verità, e che appoggiandoſi ſu tal principio il calcolo conduce a tal conſeguenza . Così la geometria ſi è reſa oggi giorno poco men che padrona dell' aſtronomia, o gode almeno di eſſere divenuta a lei sì neceſſaria, quando voglia ſeguitare la cauſa primordiale in tutti i ſuoi effetti , che ſenza il ſuo ſoccorſo non può ſperar di fare il più piccolo progreſſo. Queſta felice unione, che fa la gloria del ſecolo preſente, contribuì anche alla lode dello Zanotti, perchè egli in tutta la ſua vita, e co' ſuoi profondi ſtudj e colle ſue oſſervazioni cercò di renderſi benemerito della fiſica celeſte . Conſecrò anche a queſta quattro volumi di efemeridi, tre de' quali furono in diverſi tempi ſtampati , rimanendo il quarto inedito preſſo il ſucceſſore del medeſimo. La coſtumanza di dare dell' efemeridi aſtronomiche , che indicaſſero i luoghi, gli aſpetti , e i moti dei pianeti , e lo ſtato del cielo per molti anni avvenire, cominciò in Italia, e il Regiomontano può eſſerne riguardato il primo autore. L'Univerſità di Bologna la mantenne anche ne' tempi, ne' quali l' aſtronomia infelicemente ſi confondeva coll' aſtrologia; ma le più eſatte e le più celebri efemeridi furon quelle calcolate dal Manfredi. Lo Zanotti credè di dovere al ſuo impiego e ai voti del maeſtro la continuazione di queſt' opera; che cominciò dall' anno 1751, in cui terminava quella del Manfredi. Nel pubblicarne il primo dodicennio riproduſſe l' introduzione Manfrediana all' efemeridi, che può riguardarſi come un giudizioſo compendio d' iſtituzioni aſtronomiche, ma non ſenza qualche mutazione e qualche giunta. Quella d'un catalogo di ſtelle fiſſe è la più commendabile di tutte, nè potè ad eſſo penſare il Manfredi, perchè l' Oſſervatorio Bologneſe, mentr' ei viſſe, mancò di quegl' iſtrumenti, ch' erano a queſto lavoro neceſſarj. I luoghi delle ſtelle, che eſſendo ſempre i medeſimi ſembrano i più facili ad eſſer determinati, hanno però biſogno di eſſer rettificati, quando i mezzi d' oſſervare ſi perfezionano. I maggiori cataloghi, come quello del Flamſteed, erano riguardati come poco eſteſi, e come poco eſatti, e perciò aſtronomi del prim' ordine ſi propoſero di perfezionare queſta parte importante dell' aſtronomia, che per eſſa divien più ricca e più bella. Lo Zanotti potè gareggiare con tutti nella diligenza, con cui compoſe il ſuo, e ognun ſa che queſti lavori eſigono una ſomma pazienza, e tante e tali avvedutezze e finezze d'arte in chi gl' intraprende, che facilmente, traſcurate che ſieno, rieſcono non ſolo inutili, ma anco fallaci. Il conto, che dà lo Zanotti nella ſua Prefazione della qualità degl' iſtrumenti adoperati, e del metodo tenuto nel fare l' oſſervazioni, forma una prova ben ſicura dell' eſattezza del ſuo catalogo e del merito della lode, che da eſſa ne riportò. Intanto nuovi progreſſi nella ſcienza del cielo intereſſavano la curioſità, e domandavano l' opera d' eccellenti aſtronomi. La Francia, che invidiava ad un' emula vicina nazione la gloria d' aver prodotto il gran genio, che con una maniera più divina che umana portò all' evidenza le vere leggi, a cui obbediſcono tutti i corpi celeſti, volle almeno la preminenza nella copia e nell' eſattezza dell' oſſervazioni, che dovevano ſempre più confermare quelle leggi medeſime, e arricchire l' aſtronomia di nuove teorie. L' Abate de la Caille, nome, che farà eternamente una delle più belle comparſe nella ſtoria dell' aſtronomia, dopo di avere rettificata la teoria del ſole, ed oſſervate le più belle ſtelle viſibili ſul noſtro orizzonte, ebbe il coraggio di andare nell' emisfero auſtrale per contemplarvi l' altra parte del cielo, che ci è naſcoſta dall' opacità della terra. Al Capo di buona ſperanza eſeguì il più gran lavoro, che un uomo ſolo abbia ardito d' intraprendere, che fu di determinare i luoghi di tutte le ſtelle viſibili, che s' incontrano tra il polo auſtrale e il tropico del capricorno, e il numero delle quali oltrepaſſa le dieci mila. Anche la parallaſſe della luna occupò quell' uomo inſtancabile; e poichè per ben fiſſare queſto punto delicato ed importante era neceſſario, che le oſſervazioni ſi faceſſero ne' due emisferi, e ſi paragonaſſero tra loro, invitò i più celebri aſtronomi a contribuire alle ſue ſcoperte. Lo Zanotti ſi vide allora meſſo del pari col Vargentin, col de la Lande, col Caſſini, e col Bradley, e quel, che egli oſſervò, fu conſacrato all' immortalità nelle memorie, che pubblicò negli Atti dell' Accademia Reale delle Scienze di Parigi, quando al ſuo ritorno in quella Capitale credè il Sig. de la Caille di poter fiſſare, che la parallaſſi media è di 57', 39", e la diſtanza, che ella ſuppone, di leghe 85464. Queſti ajuti, che ora ſolamente gli aſtronomi a vicenda ſi danno, e la facilità de' viaggi ne' paeſi i più lontani, ſon tante prove, che l' uomo non ha cominciato ſe non che tardi a riguardarſi come un vero abitatore della terra legato agli altri uomini pe' vincoli d'una comune utilità. Il carattere però dello Zanotti cauto e timido non ſembrava fatto per l' ardite impreſe; e ſi ſarebbe detto che egli, come tant' altri illuſtri Bologneſi, non voleva altra gloria ſe non ſe quella che ſi poteva raccogliere dentro le mura della patria. Quindi era per lui il più ſacro dovere quello della pubblica Scuola, e la coſtante umanità e dolcezza, con cui riceveva i ſuoi ſcolari, e un dono tutto ſuo di render facile l' intelligenza delle coſe le più aſtruſe forzava ognuno ad amarlo e ſtimarlo. Aſtronomo nell' Oſſervatorio, geometra nel gabinetto, non ſi ſtancava d'applicare al cielo o i ſuoi ſenſi o le ſue meditazioni, e nel tempo che contribuiva ai progreſſi della fiſica celeſte arricchiva gli Atti dell' Accademia dell' Inſtituto di memorie, che meritavano ſempre l' approvazione dei dotti. Eran ſoliti gli aſtronomi di ricavar la miſura dell' anno tropico medio dagli equinozj ſenza far caſo per queſto effetto de' ſolſtizj. Da varie oſſervazioni ſolſtiziali fatte nella gran Meridiana di S. Petronio, dell' eſattezza e certezza delle quali niun poteva dubitare, deduſſe lo Zanotti queſta miſura, ed eſpoſe i metodi adoperati, e ne paragonò varj fra loro, ed indicò la picciolilſſima differenza di 17 minuti ſecondi, che paſſa tra la quantità dell' anno tropico medio trovata da lui, e quella dell' anno civile propoſto da Gregorio XIII. La miſura della terra, un de' maggiori oggetti dell' aſtronomia, e il più degno forſe dell' ammirazione della poſterità, occupò per lungo tempo l' Accademia di Bologna. Lo Zanotti non doveva eſſere ozioſo, e non lo fu, in una coſa di tanta importanza, e ſon ricordati con lode alcune formole e alcuni teoremi, e molte oſſervazioni di lui dirette a queſto fine. Ma i metodi ingegnoſi e i tentativi delle oſſervazioni non equivalgono alle miſure locali fatte all' equatore e al cerchio polare, onde la gloria di aver riſoluta queſta gran queſtione è interamente dovuta

a que'

a que' coraggioſi Accademici Franceſi, che per amor del vero non dubitarono di affrontare le difficoltà, che la natura, e gli uomini opponevano in copia all' eſecuzion dell' impreſa. Son però preziosi anche i tentativi de' noſtri Filoſofi, quando ſieno diretti, come lo furon quelli dello Zanotti, dall' eſattezza delle oſſervazioni e dalla preciſione de' calcoli. Poichè i metodi, che egli oſſervando, e calcolando adoperava, acquiſtavano ſpeſſo tra le ſue mani qualche maggior perfezione, ſe erano inventati da altri; gli fu anche facile l' inventarne de' proprj, e di rendere in cotal guiſa agli aſtronomi ſuoi contemporanei una grata retribuzione per quel che aveva ricevuto da loro. Quello, per eſempio, di calcolare l' equazioni nell' orbite de' pianeti ha il merito d' una facilità e ſemplicità maraviglioſa; lo hanno egualmente quelli, con cui determinò la parallaſſe di Venere e di altri pianeti; e nella neceſſità, a cui oggi giorno è ridotta l' aſtronomia, neceſſità di calcoli lunghi e penoſi, di delicatezza eſtrema d' oſſervazioni, e per conſeguenza d' iſtrumenti, d' una coſtante pazienza per non abbandonare una ſtrada oſcura, che non promette ſe non ſe lenti avanzamenti, doveva fare una luminoſa comparſa lo Zanotti, che fu per natura lontaniſſimo da quell' ardore, che sdegna di eſaminare e di perfezionare l' opere altrui, e di aſpettare l' occaſione per paragonare i proprj o gli altrui penſieri coll' operazioni della natura. Caratteri di ſimil fatta ſono i più proprj ad alimentare la ſcienza che profeſſano, e per eſſi queſta creſce, e ſi fortifica invecchiando. Ognun ſa che la baſe delle teorie celeſti è quella del ſole, perchè egli eſercita un impero quaſi aſſoluto in tutto il ſiſtema planetario. Al ben fiſſarla contribuì certamente non poco la gran linea meridiana deſcritta nell' anno 1656. dall' immortale Gio. Domenico Caſſini nel Tempio Bologneſe di S. Petronio, e queſto monumento auguſto conſacrato alla gloria dell' aſtronomia domandava di tanto in tanto l' opera d' un diligente e perſpicace aſtronomo, che eſaminaſſe e correggeſſe le più piccole alterazioni, che aveva il medeſimo ſofferto maſſimamente per cagione dell' edifizio, a cui è raccomandato. Lo Zanotti vinſe in ciò le cure de' ſuoi anteceſſori, perchè non ſolamente il rinnovò, ma provvide ancora che in avvenire non foſſe ſottopoſto a quelle tante mutazioni, che erano fino ai noſtri giorni accadute. La ſtoria de' metodi da lui e da altri adoperati, il paragone di queſti, una ſerie di proprie oſſervazioni fatte dopo la riſtaurazione dell' iſtrumento per determinare l' altezza del polo, l' obliquità dell' eclittica, e la miſura dell' anno tropico, la riſtampa d' un opuſcolo al medeſimo appartenente ſon la materia d' un libro prezioſiſſimo, che ha per titolo: *La meridiana del Tempio di S. Petronio rinovata l' anno 1776*. L' aſtronomia non era la ſola ſcienza, che occupaſſe gli ſtudj dello Zanotti. Profeſſava egli pubblicamente la meccanica; e le due diſſertazioni latine, della forza della percoſſa l' una, della forza elaſtica l' altra, ben dimoſtrano come ei ſi foſſe formate idee chiare e nitide anche nelle coſe le più inviluppate, e come ſeguendo queſte idee, foſſe in grado di promuovere la ſcienza, e liberarla da que' pregiudizj, che ſogliono tante volte inſinuarſi nelle facoltà anche le più capaci d' evidenza, e che ſi oppongono per lungo tempo al rapido loro avanzamento. Era celebre in quell' età la queſtione ſulle forze vive, che promoſſa dal Leibnitz, ſoſtenuta dagli Svizzeri, e dai Tedeſchi, impugnata dagli Ingleſi, agitata dai Franceſi, occupò anche non poco i filoſofi Italiani. Quei dell' Univerſità di Padova e di Bologna riguardavano la deciſione della controverſia come importantiſſima per li progreſſi della meccanica, e credè il Marcheſe Poleni d' avere acquiſtato un diritto ſingolare all' immortalità per avere immaginato un eſperimento, da cui reputava poterſi dedurre la più evidente dimoſtrazione della miſura

Leibniziana. Niuno dunque ſopettava allora, che queſta foſſe una mera queſtion di nome? Lo ſopettò Euſtachio, ma gli mancò in principio il coraggio per eſporne le ragioni, perchè troppi, e troppo autorevoli eran quelli, cui egli avrebbe dovuto opporſi. Finalmente nell' an. 1754 pubblicò i due opuſcoli nominati di ſopra, che poſſono riguardarſi come due parti d' un' opera ſola. Con eſſi ſpiegando il nome, tolſe la queſtione, ma non già la diſputa, che era allora nel ſuo maggior vigore. Nel primo trattando della ſorza della percoſſa dimoſtrò alcune propoſizioni meccaniche intorno alla caduta de' corpi nell' ipoteſi, che la forza centrale ſia ſempre proporzionale alle diſtanze. Il motivo, per cui preſe ad eſaminare la caduta dei gravi in queſt' ipoteſi, fu per potere colla medeſima illuſtrare le leggi dei movimenti, che dipendono dall' elaſticità, e ſpecialmente le vibrazioni delle corde elaſtiche, conducendoſi in tal maniera a fiſſare alcuni luminoſi teoremi ſpettanti all' arte muſica. Se ſi eccettuano la geometria, e l' algebra, le altre parti delle matematiche, che miſte ſi appellano, hanno ſpeſſo biſogno di adottare de' principj fiſici, cioè dei dati d' eſperienza, o di ſemplice ipoteſi, e allora non hanno che una certezza di fatto, o di pura ſuppoſizione. Non ſi può negare però, che ſi è più penſato a moltiplicare i principj ipotetici, che quei d' eſperienza, lo che ha ritardato non poco, in vece di affrettare, i progreſſi di alcune ſcienze; e tra queſte la meccanica dell' acque ha forſe più d' ogni altra provata una tal verità. Quel filoſoſo pertanto, che animato dall' amore del pubblico bene prende a trattarla in modo, che non ammette altra guida ſe non la geometria e la propria, e l' altrui eſperienza, merita la noſtra gratitudine: e ſe il ſuo amor proprio dovrà contentarſi d' illuſtrare una ſcienza più di effetti che di cauſe, e di produrre poche pagine invece di groſſi volumi, ſarà ricompenſato dal ſuffragio de' dotti, pe' quali è un gran merito il ritrovamento d' una ſola verità. A queſta lode aſpirò lo Zanotti dal momento che fu dichiarato in luogo del Dott. Eraclito Manfredi, di cui già vecchio e cieco avea prima adempite le parti, lettore d' idrometria, carica reputata a ragione delle più onorevoli di quella Univerſità, e che ſuol riguardarſi come un' illuſtre ricompenſa da concederſi ai più benemeriti Profeſſori. Il Guglielmini, che era ſtato il capo di queſta ſcuola, e poco meno che l' inventor della ſcienza, domandava non ſolo un illuſtratore, ma anche un correttore de' ſuoi ſcritti, perchè queſti non ſono eſenti da errori, che una fiſica ancor bambina doveva generare, e di cui un uomo imbevutone dalla prima età non arriva a ſpogliarſene interamente. Lo Zanotti ricco di lumi del ſuo ſecolo, e non addetto ad alcun ſiſtema, preparava i ſuoi ſcolari alla lezione del libro del Guglielmini ſulla natura de' fiumi con una Introduzione, che era piena di dottrina idroſtatica, e che moſtrava per ogni dove il buon giudizio dell' Autore in ſaper diſcernere il vero dal veriſimile, l' ipoteſi dall' eſperienza. Alla ſcelta giudizioſiſſima delle coſe univa egli il merito d' una ſorprendente chiarezza nello ſpiegarle, e niuno certamente fu più di lui degno del difficile incarico della pubblica iſtruzione. Queſti eſercizj, che i Latini chiamavano *umbratili*, eran più proprj del carattere tranquillo e pacato dello Zanotti, che quelli del campo, ne' quali le diſpute ſono infinite, perchè ſon varj e ſpeſſo contrarj gl' intereſſi de' poſſidenti. Ciò non oſtante dovette egli, ſuo malgrado, prendere la difeſa d' alcuni maſſimamente dopo la morte di Grabiel Manfredi, e ſervì anche la patria, eſponendo quel che credeva utile, e quel che reputava nocevole ne' diverſi progetti fatti da valenti matematici pel regolamento dell' acque del Bologneſe. Un de' più ſtrepitoſi affari idraulici trattati in queſto ſecolo è certamente quello dell' inalveazione nel ſolo fiume del Primaro di tutte le acque, che ſi ſpandono con graviſſimo danno delle provincie di Bologna, di Ferrara, e di Ravenna. Per guidare coloro, che proponevano queſt' unica inalveazione, ſcriſſe lo Zanotti un belliſſimo ragionamento, che fu poi inſerito nel Tomo VII. della Fiorentina *Raccolta d' Autori, che trattano del moto dell' acque*. In eſſo prendendo gli eſempj dai più regolati fiumi, e conſiderando maſſimamente i profili del Po e del Tevere, ſtabiliſce, che l' accelerazione dell' acque originata dalla libertà dello sfogo, ſi ſtende fin dove arriva l' orizzontale tirata dal pelo baſſo del mare. E paragonando tra loro le oſſervazioni, trova, che la pendenza ragguagliata della ſuperficie nella maſſima eſcreſcenza dal punto, ove arriva il pelo baſſo del mare fino alla foce, è uguale alla pendenza ragguagliata del fondo, o del pelo baſſo del fiume, cominciando dal medeſimo punto, e procedendo in parte contraria. Condottoſi a Roma nel 1765 per cagione di queſti ſteſſi affari d'acque commeſſi al giudizio d' una Congregazione, dovè pubblicare diverſi ſcritti, da' quali appariva non meno il buon cittadino, che l' uomo prudente, e il dotto idrometra. Onorato per queſti ed altri titoli vivea in quella gran Capitale, come ſe foſſe nella patria ſua, ed io giovane allora ed amante di gloria attribuiva a mia gran ventura d' eſſere ammeſſo alla familiar converſazione di quell' uomo raro, cui la pubblica ſtima accompagnava per ogni dove. Nè ſolo dalla patria, e da' ſuoi concittadini, ma anche dagli eſteri fu conſultato intorno al regolamento dell' acque, e può dirſi, che le principali occupazioni degli ultimi anni della ſua vita apparteneſſero a queſte commiſſioni, e agli ſtudj che dovea fare per eſſe. La repubblica di Lucca vinſe la repugnanza, che egli avea, perchè vecchio e non ſano, di ſtaccarſi mai più dal ſeno della patria, e l' ebbe giudice e difenſore del progetto di formare un nuovo ozzeri, che conduceſſe al mare l' acque di quella parte del ſuo territorio, che ſi ſtende verſo il lago di Bientina, in cui le medeſime con grave danno ſi ſcaricano. Lungo ſarebbe il riferire tutte le ſcritture da lui compoſte in materia d' acque. Gli eſami, che ebbe da fare ora ſopra una parte ora ſopra un' altra di queſta difficile ſcienza, ſempre più lo convinſero, che l' idraulica e l' idrometria devono riguardarſi piuttoſto come una parte della fiſica che della matematica, o come una parte della matematica, i cui progreſſi ſinora fatti e da farſi ſono puramente ipotetici e limitati a certi caſi, che forſe nella natura non hanno luogo. Tralaſciò pertanto ne' ſuoi ſcritti a bella poſta le dimoſtrazioni e i calcoli ipotetici, coi quali diverſi autori hanno inviluppata la ſcienza, e raccolſe in quella vece tutte l' eſperienze e l' oſſervazioni, che poteſſero ſervir di lume ne' caſi d' importanza, e che ci avvicinaſſero ogni giorno più alla conoſcenza della natura de' fluidi. Una ſimile condotta dello Zanotti e di tutti coloro, che l' hanno avvedutamente imitata, può eſſere paragonata a quelle linee aſintotiche, che ſi accoſtano ſempre più a una retta, ſenza però arrivar mai a toccarla. E qual ricompenſa meritavano tante e sì continue fatiche? La maggior di tutte, a cui poſſa aſpirare un inſigne letterato Bologneſe; e fu quella di eſſere dichiarato nell' anno 1778 Preſidente dell' Inſtituto in luogo di Franceſco Maria Zanotti. Pianſe nella morte dello Zio la propria diſgrazia, e quella comune a tutti gli amatori delle ſcienze, e ricevè con animo grato la novella teſtimonianza della ſtima de' ſuoi concittadini. Così aveſſe potuto ſervir lungamente all' utilità e alla gloria di eſſi; ma appena paſſati quattr' anni di quella preſidenza, che nella primavera dell' anno 1782 fu egli inopinatamente sorpreſo da un' iſcuria, che in principio i medici traſcurarono, perchè da loro attribuita ad un accidentale riſcaldamento. Ma non cedendo eſſa agli ordinarj rimedj, ben preſto manifeſtò un vizio nella veſcica, che in appreſſo accompagnarono atrociſſimi dolori. Il paziente ben s'avvide ch' era vicino il termine della ſua vita, e religioſiſſimo, com' egli era, fece di queſta coi ſentimenti i più teneri, e i più devoti ſacrifizio a Dio, e colla tranquillità d' un uomo, che abbia fedelmente adempiuta la gran legge del Vangelo, l' amor di Dio, e de' ſuoi fratelli, paſsò agli eterni ripoſi nella ſera del dì 15 di Maggio. Quei, che con un merito raro non aveva, mentre viſſe, eccitata l' invidia d' alcuno, dovè morto eſſer pianto e ricordato amaramente, e perchè foſſe durevole la memoria di queſto dolore e delle cagioni di eſſo oltre l'iſcrizione poſta nella Chieſa Parrocchiale di S. M. Maddalena, ove fu ſepolto, ebbe l' onor d' una medaglia coll' epigrafe Oraziana *Quando ullum invenient parem*? e d' un elogio pieno di venuſtà latina. Un fratello e una ſorella, e varj nipoti furono gli oggetti della ſua liberalità nel teſtamento fatto alcuni anni prima; nè men fu liberale con eſſi e cogli amici, mentre fu in vita, perchè la beneficenza, l' amor de' ſuoi ſimili, la gratitudine, la carità verſo i biſognoſi furono virtù tanto ſue proprie, che parevano come in una pianta nativa inneſtate nella bell' anima dello Zanotti. Il ſuo linguaggio pien di dolcezza, di eleganza, e di circoſpezione, facile alla lode, e ſempre lontano dal biaſimare come dall'adulare chiccheſſia, paleſava la bontà del cuore, e ſi può dire che ogni parola, ed ogni azione di lui foſſero un armonioſo accordo della virtù e del talento. E ſe il carattere della vera grandezza dell' anima è la ſemplicità de' coſtumi, chi più di lui meritò queſta lode, e ſeppe meglio accoppiarla all' altra della ſeverità nella ſua morale condotta? Era ameno nella converſazione, feliciſſimo ne' ſuoi racconti; e quantunque il ſuo diſcorſo aveſſe un non ſo che di ſonante, era però ſempre naturale nelle eſpreſſioni, e ſempre manifeſtava una mente limpidiſſima nelle ſue idee, ed unica nell' arte di ſaperle ſpiegare fino a renderle intelligibili anche ai più idioti. Formato nella ſcuola del Manfredi e dello Zio amò, ma non coltivò, com'eſſi, l' arte, che fu quella de' primi filoſofi, arte ingegnoſa, ſpeſſo utile, e ſempre piacevole, chiamata frivola da quelli che diſprezzano quel che ignorano, ma ſtimata da' veri ſapienti ſoliti a riſpettare tutto quello, che è l' opera del genio. Un uomo di sì rare doti egualmente degno pe' ſuoi talenti d' avere degli ammiratori, che d' aver degli amici pel ſuo carattere, era amato e ricercato da tutti quelli che il conoſcevano, e un gran Cardinale, che preſedeva al Governo Bologneſe, e che ſembra nato per onorare il merito e per giudicarne, volle averlo per guida nello ſtudio delle matematiche ſublimi, dandogli la più pregevole di tutte le ricompenſe, che fu quella della ſua parzialiſſima amicizia. Non fu meno onorato dagli eſteri, ed ebbe luogo tra i membri della Reale Società di Londra, e della Reale Accademia delle Scienze e belle Lettere di Berlino. Noi uniamo volentieri la noſtra voce a quella di tant' altri, che han ſaputo rendere la debita giuſtizia al merito dello Zanotti, e vorremmo potere offerire alle ſue ceneri un tributo tale di lode, e d' amicizia, qual ſi merita un ſapiente virtuoſo, che ha conſacrato tutti i ſuoi giorni all'avanzamento delle ſcienze, e al ſervigio della patria.

SOPRA IL MOVIMENTO
CONCRETO DE' SOLIDI.
PARTE PRIMA.

Del Sig. Paolò Delanges Profeſſore di Matematica nel Collegio Militare di Verona.

INTRODUZIONE.

All' immortale *Galileo* la ſcoperta dobbiamo delle prime, e ſemplici leggi del moto aſtratto de' corpi terreſtri ſollecitati da una forza coſtante verſo un centro, ſuppoſizione che già viene, e può ſenza errore ammetterſi, ne' gravi cadenti a diſcrete diſtanze dalla ſuperficie terreſtre. Ad un genio ſuperiore poi, ad un *Newton* era riſerbato il conoſcere la natura intima di cotale forza centripeta variabile a differenti diſtanze dal centro de' gravi, per poter quindi determinare le leggi di ſiffatto moto più univerſalmente, e condurſi paſſo paſſo per fino ad eſplorare quelle che vengono ſeguitate da' corpi celeſti nel trasferirſi per le orbite loro. Ma quanto doviziosamente ci troviamo forniti di belle ed importanti leggi, e proprietà ſul movimento aſtratto de' corpi sì parziale che generale, altrettanto ſcarſeggiamo, ed ignoriamo quelle che riſguardano un movimento concreto vale a dire un movimento di ſatto, in cui non venga ammeſſa aſtrazione da quelle accidentalità, che la natura ha radicalmente introdotte nella materia per conſeguirne effetti analoghi, e corriſpondenti a quell' economia ed a quell' ordine ſempre mai ammirabile ſu cui ella è fondata col provvido e ſaggio fine della conſervazione del tutto inſieme. E vaglia il vero, diſcendendo dal generale al particolare, che ora intendiamo di prendere a maturo eſame, non ignoriamo forſe noi ancora quali ſieno le leggi di quel movimento, che ſeguono i ſolidi terreſtri aſtretti a procedere gli uni ſopra gli altri più o meno velocemente? Le prime nozioni della fiſica de' corpi baſtano a farci comprendere, ſenza ricorrere ad alcuna eſperienza di comprovazione, quanto ſieno in ſiffatti caſi i riſultati di fatto diſtanti da quelli, che proviamo, e concludiamo aſtrattamente. Ed a chi non è paleſe inoltre, che tale diſcrepanza proviene dalle ſole due reſiſtenze, che neceſſariamente incontrano i noſtri ſolidi in movimento, cioè la reſiſtenza del mezzo, da cui ſi trovano circondati, e quella dell' attrito prodotta dalla ruvidità più o meno ſenſibile sì, ma non mai inſeparabile dalle loro ſuperficie? Non potremo adunque giammai conoſcere quali ſieno le leggi del movimento concreto de' noſtri corpi, che s' aggirano ſulla ſuperficie terreſtre, ſe non rileveremo l' influenza delle reſiſtenze accennate, ed il modo di eſercitare l' azione loro ne' corpi poſti in movimento. In tal guiſa verremo a ſtabilire una nuova ſcienza, che propriamente dovrà chiamarſi la *Scienza del moto concreto de' ſolidi*, la quale avrà bensì per inconcuſſa baſe, e fondamento le leggi già dimoſtrate del moto aſtratto, ma con eſſe medeſime ſi troveranno combinate quelle, che ſeguono le ſopraddette reſiſtenze; che è l' unica via da tentarſi per ridurre con ſicurezza queſta parte della Fiſica al concreto, e renderla in conſeguenza utile negli uſi umani. Il *Galileo* geloſo in certo modo delle belle proprietà ritrovate ſul moto aſtratto de' gravi, vorrebbe per fino indurci a credere traſcurabile la reſiſtenza dell' aria nell' impetuoſo movimento de' projetti *(a)*. *Newton* però conobbe quant' era importante di rilevare l' influenza della reſiſtenza de' mezzi nel movimento aſtratto de' corpi, e perciò intrapreſe egli il primo la ſoluzione di tale difficiliſſimo Problema, ſtabilendo alla diverſa natura de' mezzi la legge dell' azione loro (*b*): dopo di lui altri illuſtri Geometri, e Fiſici han cercato di concretare più al fatto queſto ſoggetto, di eſtendere, ſemplificare, e rendere familiare l' uſo di queſto nuovo ramo della Scienza del moto; di maniera che quanto alle modificazioni, che poſſono derivare dalla reſiſtenza de' mezzi,

---

(*a*) Opere di *Galileo Galilei*, Tom. III. pag. 148.

(*b*) *Philoſophiæ naturalis principia mathematica*. Tom. II.

e dall'aria ſingolarmente, ſul particolare movimento de' corpi, che abbiamo noi preſentemente in veduta, ſembra che vi ſieno baſtanti materiali onde ſottoporle a computo, e conoſcerne preſſo a poco la loro natura e quantità.

Non poſſiamo però lo ſteſſo affermare riguardo all' altra reſiſtenza proveniente dall' attrito, trovandoci ben lungi ancora dal conoſcerne la di lei azione ne' corpi, che ſulle ſuperficie degli altri ſi ſtriſciano, e muovonſi: reſiſtenza, che certamente nella qualità di movimento, in cui vogliamo conſiderare i ſolidi, ha molto più d' influenza e quaſi ſenza paragone di quella che proviene dalla reſiſtenza dell' aria, ſulle alterazioni, che accadono alle aſtratte deduzioni, e proprietà del moto. Non è già, che così grave argomento non ſia a più e più Fiſici caduto ſotto l'occhio, ma tale e tanta ſi è la diſcrepanza delle opinioni loro, che niente contar dobbiamo di avere intorno ad eſſo; a ſuo luogo nondimeno accenneremo le diſcordanti leggi, che o da eſperienze poco deciſive, ed incerte, o da ragionamenti vaghi condotti dalla ſola immaginazione, troppo facile ſoprattutto nelle coſe fiſiche a sbagli ed equivoci, furono dedotte e ſtabilite. E per verità ſu tale propoſito a ragione lamentaſi il celebre P. *Barletti* che (*a*) " nella Fiſica uno per mille appena s' incontra, che abbia il coraggio di laſciare la generalità, e le ipoteſi, e voglia ſoggettarſi alle faticoſe, e ſtrette leggi delle particolari induzioni ". Nella mia *Meccanica pratica* ho cercato di ſtabilire fuori d' ogni controverſia le leggi che ſegue la reſiſtenza di attrito de' ſolidi, conſiderando lo ſtato del loro equilibrio, che diſtinſi io dall' equilibrio matematico, col chiamarlo *equilibrio meccanico* (*b*): ma rimane ancora da inveſtigare l' azione di tale reſiſtenza ne' ſolidi ſuppoſti già in movimento, e ciò non per via di raziocinj, ma calcando quella de' fatti, e dell'eſperienza, onde poſſiamo trovarci in grado di conoſcere reali, o falſe le ſentenze de' Fiſici de' tempi andati ſull'argomento. A tale oggetto io mi ſono ingegnato di architettare una macchina quanto più

(*a*) Fiſica particolare, e generale in ſaggi ecc. Tom. I. Art. VII. pag. 23.

(*b*) Meccanica pratica Sez. Prima. Art. I. §§. V. VI.

ſemplice mi fu poſſibile, ed in cui non s' introduceſſero nell' eſame dell' effetto di quella cauſa che ponevaſi in eſperimento effetti di altre cauſe ſtraniere ad eſſa, dovendo in ciò a mio parere adoperarſi il fiſico ſperimentatore con ogni avvedutezza, e ſagacità, onde venire plauſibilmente a capo di conoſcere l' indole, e la forza, oppure di rilevare la legge di qualche naturale fenomeno. Anzi che tenendo io per principio infallibile, che la natura proceda con coſtanti, e determinate regole, e leggi, tengo anche opinione, che ſe non arriviamo ad iſcoprire legge in qualche di lei fenomeno, debba attribuirſi ciò al non aver noi avuta la prevenzione, od anche alle volte al non eſſer in noſtro potere di conſiderarlo ne' ſuoi ſemplici; mentre già, come anche riflette il profondiſſimo Fiſico P. *Barletti* (*a*) " dobbiamo ritener fermo, „ che tutti gli effetti, e tutti i modi delle corporee azioni „ naſcono non mai da una ſolitaria, e preciſa forza, o qua„lità, nè da un ſolo, e preciſo corpo; ma che ſi combina„no, e ſi compongono, or più or meno con tutte le altre „ qualità, che ſono nel corpo ſteſſo, e ne' corpi coi quali „ s' incontra „. Così io mi luſingo di poter ſtabilire principj ſodi, e regole ſicure nella materia da me ora preſa in diſcuſſione, e che inoltre ſieno cotali regole applicabili alla pratica con quella proſſima preciſione di riſultati, che dee eſſer giudicata conveniente da chi intende a quanto poſſano eſtenderſi i di lei limiti nel maneggio della fiſica de' corpi.

Conoſciute le leggi anche della reſiſtenza di attrito, che incontrano i ſolidi in movimento, mi riſerbo in ſeguito di eſporre la *Teoria concreta de' gravi, che diſcendono o aſcendono per piani rettilinei, e per piani curvilinei*; e finalmente mi adoprerò per inſtituire una *Dinamica concreta de' corpi*, onde promovere per qualche parte la vaſta, e nel tempo medeſimo ben ardua *Scienza del moto concreto de' ſolidi*, coſtituente il più bello, ed utile ramo di una Meccanica concreta, di cui finora intieramente manchiamo. Riguardo a me pertanto prenderei per ſomma ricompenſa delle mie applicazioni l' aver potuto ſomminiſtrare materiali di buona,

---

(*a*) Opera citata. Tom. I. Art. VI. pag. 21.

e certa tempra a quegl' illuſtri Fiſici, che o ſi trovano già inoltrati in tale rilevantiſſima impreſa, o foſſero diſpoſti ad intraprenderne l'aſſunto: non intendendo io in verun modo di preoccupare un sì ubertoſo, ed importante ſoggetto, ma ſoltanto di contribuire, per quanto mi ſia poſſibile, inveſtigazioni utili alla di lui ſicura fabbrica, e perfezione.

ARTICOLO I.

Deſcrizione, ed uſo del Forometro.

§. I. Due ſono le parti principali, che inſieme combinate coſtituiſcono il *Forometro*, o ſia la macchina miſuratrice il moto de' ſolidi. La *Fig. I.* ne rappreſenta la ſezione interna fatta da un piano verticale ſegante la macchina ſecondo la di lei lunghezza *AB*; e nella *Fig. II.* compariſce in ſolido, perchè meglio poſſa diſtinguerſi tutta la di lei coſtruzione. Scorrendo coll' occhio per l' una, e l' altra figura s' intenderà più prontamente la deſcrizione, che ora faremo delle parti, e del loro uſo, nel noſtro *Forometro*, avvertendo, che in ordine a miſure, il piede da me adoperato al piede Regio di Parigi ha la ragione di 21 a 20, e che in ordine a' peſi la libbra da me uſata a quella di Parigi ha la ragione di 65 a 96. *ABEF* pertanto è un priſma di legno di noce lungo poll. 18., largo poll. 6., ed alto poll. 2., a cui ſtanno anneſſi quattro piedi alti poll. 3 $\frac{1}{2}$., onde poſſa reggerſi in ſituazione orizzontale. Tale parte integrante della macchina chiameremo *Caſtello*. *CBHI* poſcia che ha la figura di un tubo priſmatico alto poll. 24., chiuſo da tre pareti egualmente alte, e larghe in lume poll. 2. aperto ſul dinanzi *BH*, e che ſi può volendo congiugnere in ſituazione verticale ſopra il caſtello *AB* e fortificarſi contro di eſſo mediante i puntelli *AN AN* che vanno ad inneſtarſi in *A A*, potremo ſemplicemente nominare *Tubo*.

§. II. Il caſtello *ABEF* ha incavato verſo l'eſtremità *BE* un foro *BC87* di baſe quadrata quaſi di poll. 2. di lato, e paſſa quaſi tutta la groſſezza *BE*, ſe non che vi rimane in fondo un ritegno tre linee groſſo, ma traforato però interamente in centro d' un pollice per ogni lato. Al ſolo oſſervare le figure ſi può rilevare, come l'accennato foro, inveſtendo in eſſo caſſettine di legno di noce con accuratezza eſeguite, ſi riduceva, conſervando ſempre la ſteſſa profondità, ad un pollice e mezzo di baſe quadrata, ed anche ad un pollice ſolo.

§. III. Preſa una lima vecchia Romana d' acciajo, che viene preſſo di noi reputata d' ottima temperatura, lunga poll. 15., larga poll. 1., e groſſa una linea, la feci dolcemente incurvare, e quindi ſituare ſulla metà della larghezza della baſe inferiore *FE* del caſtello, in guiſa ch' eſſendo ſtata ſaldata all'eſtremità *D*, veniva coll'altra eſtremità *E* a baciare la teſta *FE* del medeſimo caſtello, reſtando incurvata nel mezzo per linee ſette. Tale lima così preparata reſiſteva vie e vie più ad una forza, che applicata all' eſtremità *E* cercava di allontanarla, e diſtenderla, e reſtituivaſi con ſomma prontezza al ſuo ſtato primiero ſe trovavaſi libera a ſe ſteſſa, agendo in ſomma come perfetto elaſtro, che così in ſeguito la chiameremo. Queſto elaſtro inoltre era fornito d' un cubetto di legno di noce *G*, che diremo *martello*, d' un pollice di lato, ſicchè inneſtavaſi eſattamente nel foro poco fa accennato, e che la *Fig. I.* ſingolarmente lo dimoſtra con chiarezza. Per diſporre poſcia quante volte più piaceſſe l'elaſtro *DE* ſempre ad uno ſteſſo grado di tenſione, vi ſta congegnata, ſotto pure la baſe inferiore *FE* del caſtello, la ſtaſſa di lamina di ferro tre pollici alta, la quale, eſſendo fornita de' fori 1, 2, 3 paſſandovi per eſſi una cavicchia di ferro *XZ*, ſerviva a ſtabilire, e regiſtrare con certezza l' elaſtro *DE* o al primo, od al ſecondo, oppure al terzo grado di tenſione, legando con filo robuſto l'eſtremità *E* di eſſo elaſtro, appoggiato alla detta cavicchia *XZ*, al braccio *T* che ſortiva dal fondo della ſtaffa.

§. IV. Nel mezzo delle pareti oppoſte *CH*, *CH* del tubo *CBHI* vi ſono ſcavati li canaletti 45, 45, per li quali ſcorre il curſore *PRSV* compoſto del piano orizzontale *PR*, e del verticale *SV*, che s' inſeriſce lateralmente ne' detti canaletti. Viene ſoſtenuto tale curſore da un filo di ſeta raccomandato alla metà dell' orlo ſuperiore del piano verticale *SV*, il quale s' avvolge poſcia per la girella *L* mobile intorno un cilindretto orizzontale fermato dalle ſue eſtremità a tanta altezza che la girella può muoverſi liberamente ſenza incontrare oſtacoli nella parete interna *CI* del tubo, tenendo dall' altro capo l'accennato filo ſoſpeſa la lance *M* caricata di tanto peſo da tenere in equilibrio meccanico il curſore *PRSV*.

§. V. Deſcritte le parti componenti il noſtro Forometro, veggiamone ora il loro maneggio ed uſo. Diſpoſta e preparata la macchina come rappreſentano le *Fig. I. e II.* il ſuo uffizio ſi è di gettare verticalmente un ſolido, che veniſſe ripoſto nel foro *B78C*, e di far conoſcere a qual' altezza ſia egli pervenuto. Intorno a che ſi dee avvertire che ſtante le dimenſioni, a cui poteva ridurſi il detto foro *B78C*, già antecedentemente indicate, tre ſono i ſolidi di figura priſmatica, che in eſſo poſſono riporſi; il maggiore colla baſe quadrata di poll. 1, e lin. 11, il medio colla baſe quadrata di poll. 1, e lin. 5, ed il picciolo colla baſe quadrata di lin. 11, per laſciare in ogni caſo mezza linea di ſpazio fra le facce del ſolido, e le pareti del foro, onde poſſa da eſſo ſortirvi liberamente; tutti e tre però i detti ſolidi ſono alti poll. 1, e lin. 9, ch' è la profondità *B7* del foro medeſimo *B78C*. Qualora vuolſi pertanto ſpignere verticalmente uno di eſſi ſolidi delle dimenſioni deſcritte, biſogna inneſtarlo nel foro *B78C* preparato come alla grandezza del ſolido conviene, e quindi con un filo ſtendere dall' eſtremità *E* l' elaſtro *DE*, finchè s' appoggi alla cavicchia *XZ* impernata in due fori corriſpondenti della ſtaffa, raccomandando il medeſimo filo al braccio *T* di eſſa coll' avvertenza che dopo aſſicurato rimanga diſteſo, del che ſi può facilmente accertarſene, ſe, così raccomandato l' elaſtro *DE*, continui eſſo a perfettamente baciare la cavicchia *XZ*: dopo di ciò con taglienti e ben affilate forbici recideſi il detto filo dando libertà all' elaſtro, il quale nel reſtituirſi al di lui ſtato primiero, col martello *G* ad eſſo unito, reſpigne e fa inalzare il ſolido che incontra nel di lui cammino, come ſi vede in *O*. Fatto queſto primo eſperimento di prova ſi diſpone il curſore *PRSV* a quell' altezza, che preſſo a poco ſi conobbe inalzarſi il ſolido *O*, e ſi va ripetendo due o tre volte l' eſperimento ſino a che reſti determinata dal piano orizzontale *PR* del curſore l' aſceſa verticale del ſolido *O*; il che facilmente s' ottiene e con tutta preciſione, trovandoſi eſſo curſore in equilibrio meccanico col peſo ripoſto nella lance *M*. Per avere però la ricercata aſceſa verticale in pollici, e linee, deggiono eſſer diviſi gli orli anteriori del tubo *BH BH* in pollici, cominciando dalla metà dell' altezza *B7*, o *CS* ch' è linee $10\frac{1}{2}$; di maniera che la prima diviſione nel noſtro caſo ſortiva linee $1\frac{1}{2}$ ſopra i punti *B*, *B*, e ſegnato dal piano orizzontale *PR* del curſore il punto delle diviſioni, a cui perviene il ſolido *O*, ſi dovrà da tale miſura detrarre la metà dell' altezza del ſolido *O*, che nel noſtro Forometro è coſtantemente, in tutti i ſolidi che poſſono porſi in eſperimento, linee $10\frac{1}{2}$, onde ottenere il viaggio verticale del ſolo centro di gravità del ſolido, a cui dee riferirſi ogni legge di movimento.

§. VI. L' altro uffizio, a cui dovremo applicare il Forometro, ſi è di rilevare lo ſpazio, che qualſivoglia de' deſcritti ſolidi, che poſſono inneſtarſi nel foro *B7SC*, percorre ſopra un piano orizzontale. Per ottenere ciò, all' eſtremità d' una Tavola orizzontale *GH* (*Fig. III.*) ſi è formato il gradino *GLI* per tutta la di lei larghezza, di tale altezza *GI*, che ripoſando ſopra di eſſo il caſtello *ABEF* ſciolto dal tubo *CBHI* nella poſizione, che la figura accennata dimoſtra, la ſoglia ed il piano del foro atto a ricevere il minore ſolido s' uniſce, e continua in uno ſteſſo piano orizzontale con quello della Tavola *GH*: mediante poi alcune tavolette ripoſte ſulla baſe *IL* del gradino *GIL* alzaſi il caſtello *ABEF* in guiſa, che la ſoglia del foro atto a ricevere il ſolido medio, e così quella del foro pel ſolido maſſimo, ſi trova a livello, e nello ſteſſo piano con quello della Tavola orizzontale. Diſpoſto il caſtello come s' è ſpiegato, e rattenuto fermo in tale poſizione dalla faſcia zancata di ferro *TV*, che lo abbraccia, ſi diſtende l' elaſtro, che ſta dietro di eſſo nel modo ſopraindicato, a cui tagliando il filo, ſpigne col martello *G*, nel reſtituirſi al di lui ſtato di quiete, il ſolido *O*, e lo fa percorrere ſul piano orizzontale *GH*, ſopra di cui è diſegnata una ſcala di pollici, cominciando a contare il primo pollice dalla metà della lunghezza *B7*, o *CS* del foro, da cui ſortono i ſolidi, onde, come nel caſo del loro getto verticale, ſi poſſa rimarcare il viaggio ſoltanto del loro centro di gravità.

ARTICOLO II.

Spiegare la forza dell' elaſtro impiegato nel Forometro.

§. VII. Sia *DGE* (*Fig. IV.*) l' elaſtro del Forometro, diſegnato come ad eſſo ſta anneſſo, ſicchè la linea *DE*, che parte dal punto *D* intorno a cui l' elaſtro s' aggira, e va al punto *E* contro cui s' appoggia, ſia orizzontale. E poichè nel noſtro caſo occorreva la forza equivalente al peſo di libbre due che agiſſe nel luogo *G* dell' elaſtro, in cui ſta attaccato il martello *G*, perchè cominciaſſe a diſtaccarſi dal punto d' incontro *E*, ed era inoltre neceſſario accreſcere ſempre più cotale forza per vie maggiormente diſtaccarlo dal punto *E*, e farlo paſſare nelle ſituazioni $DG'E'$, $DG''E''$ ecc., egli è manifeſto, che il martello *G*, in virtù dell' elaſtro a cui è unito, traſferito per eſempio a forza in G'', ſi porterebbe laſciato libero a ſe ſteſſo verſo *G* con quella natura di movimento accelerato, che è propria d' un corpo, la di cui forza centripeta creſca in ragione diretta di qualche funzione delle diſtanze dal ſuo centro di tendenza: anzi che, tolto l' oſtacolo *E* all' elaſtro, non v' ha da dubitarſi, che il martello *G* ſeguiterebbe a muoverſi con egual legge di movimento (e poſto che $DG'''E'''$ foſſe la poſizione, in cui l'elaſtro, venendo alla bella prima ſituato, ſi manterrebbe in quiete ſenza il ſoccorſo di alcuna forza applicata in *E*), finchè giungeſſe al punto G''' centro della ſua tendenza: donde poſcia proſeguirebbe, colla velocità acquiſtata, ad allontanarſi di movimento ritardato, e quindi retrocedendo ſi muoverebbe intorno ad eſſo centro di tendenza G''', a guiſa per così dire di pendulo, che diſcoſtato dalla linea verticale venga in ſeguito liberato a ſe ſteſſo. Tale ſi è la maniera di muoverſi del noſtro elaſtro, che baſta, per le coſe che dobbiamo dire in queſto luogo intorno ad eſſo, averla puramente accennata.

§. VIII. Siccome poi è proprio della natura dell' elaſtro partendo dalla poſizione di quiete $DG'''E'''$ di diſtenderſi ed allungarſi quanto più da eſſa ſi allontana, così è chiaro, che la linea $G'G'GG'''$, per cui tende il martello *G* unito all'elaſtro, al ſuo centro di quiete G''', non è nè linea retta, nè arco circolare, ma una linea curva dipendente dalla forma, e coſtituzione dell' elaſtro medeſimo. Data pertanto la natura della curva $G''G'GG'''$ (riferendo le di lei ordinate GM $G'M'$ ecc. alle aſciſſe verticali $G'''M$ $G'''M'$ ecc. preſe nella verticale GM'') che è lo ſpazio per cui dee percorrere il martello G onde condurſi da qualunque punto G'' G' ecc. al centro di tendenza G''', ed eſpoſta con la curva $G'''HHH''$ riferita al medeſimo aſſe $G'''M'''$ la ſcala delle forze, ſicchè l' ordinata MH eſprimeſſe nel noſtro caſo le libbre due neceſſarie per mantenere l' elaſtro nella poſizione DGE, e così l' ordinata $M'H'$ la forza per mantenerlo nella $DG'E'$, e così diſcorrendo; biſognerebbe ritrovare la natura della curva $L''L'L'$, che foſſe la ſcala delle velocità, onde conoſcere quella di cui è dotato il martello G in un qualſivoglia punto intermedio, partendo da una data diſtanza dal centro di tendenza G'''.

§. IX. Ma ciò che inoltre maſſimamente importa di rilevare, ſi è in qual guiſa comunichi e metta in moto il martello G dell' elaſtro un ſolido che incontri per viaggio. Per non partire pertanto dal caſo noſtro, biſogna conſiderare, che trovandoſi internato lin. 7 il martello G dell' elaſtro DE (*Fig. I.*) quando termina il di lui viaggio per l' incontro che trova nella teſta EB del caſtello BF, per lo ſpazio appunto di ſole lin. 7 può egli accompagnare il ſolido, che incontra inneſtato nel foro $B78C$, eſtenſione di ſpazio che può aſſumerſi come percorſo per linea retta, e verticale, il che di fatti in eſperienza non compariva mai diverſamente. Per il che richiamando anche ciò che abbiamo ſuperiormente riflettuto (§. VII.), poſſiamo adunque paragonare l' azione del martello G, condotto dall' elaſtro DE, verſo un ſolido che incontra ed accompagna per il corſo di lin. 7 a quella che eſerciterebbe un corpo moſſo verſo un centro di tendenza per linea retta da una forza centripeta in ragione diretta di una qualche funzione delle diſtanze dal detto centro, verſo un altro corpo, che reſiſteſſe al proſeguimento del di lui moto con forza proporzionale al proprio peſo. Non ſarebbe ora difficile inſtituire di tal movimento l' appoſita teoria: imperciocchè data la natura de' corpi urtanti, per li principj dinamici, ſi ſcuopre la velocità del primo iſtante, colla quale procederebbero amendue i corpi unitamente ; riguardati poſcia eſſi come una ſola maſſa dotata di tale velocità, e di una forza centripeta quale riſultaſſe dall'ecceſſo di quella del corpo urtante da quella del corpo urtato, ridotte amendue ad omogeneità , mediante il maneggio de' comuni principj del moto, ricaverebbeſi la legge della velocità , ſecondo cui ſeguiterebbero i detti corpi uniti inſieme il loro movimento.

§. X. Anzi che diſcendendo al caſo particolare del noſtro Forometro , potremmo riguardare come corpi duri ed il martello *G* (*Fig. V.*) condotto dall' elaſtro , ed il ſolido *O* che va ad incontrare , eſſendo l' uno e l' altro di qualche ſpecie di legno ; e quindi rappreſentandoſi colla retta *GB* lo ſpazio delle 7 linee , per cui il martello *G* procede unitamente al ſolido *O*, e colla *GQ* la velocità del martello medeſimo nell' iſtante che incontra il detto ſolido *O* , velocità che abbiamo veduto (§. VIII.) come può riconoſcerſi, è manifeſto che il quarto proporzionale alla ſomma delle maſſe *G*, *O* , di quella del martello *G* , e dell' enunziata velocità *GQ*, che ſia *GM* , indicherà la velocità del primo iſtante del martello *G*, e del ſolido *O* unitamente, come ſe foſſero una maſſa ſola. Poſta quindi *FIE* la ſcala della forza centripeta, da cui viene traſportato il martello *G* per lo ſpazio delle 7 linee *GB* , ſicchè le ordinate *GF* , *LI* , *BE* ecc. moſtrino i peſi equivalenti alla forza centripeta , che ſente il martello *G* ne' punti *G*, *L*, *B* ecc., è chiaro che applicando ſull'ordinata *GF* la *GD* eſprimente il peſo del ſolido *O*, e menata *DC* parallela a *GB*, la ſteſſa curva *FIE* riferita al nuovo aſſe *DC* dinoterà la ſcala della forza centripeta del martello *G*, e del ſolido *O* preſi inſieme come una maſſa ſola: quindi co' principj del moto ſi determinerà la ſcala *MPR* delle velocità, delle quali è dotato il martello *G* col ſolido *O* , ne' punti *L*, *B* , ecc. dello ſpazio da percorrerſi *GB*, ed in conſeguenza s' avrà determinata pure l'ultima velocità *BR*, con cui ſeguiterà il moto verticale il ſolido *O* venendo impedito al martello *G* il ſeguitarlo, come quello, che per eſſere aderente, e congiunto all'elaſtro ſi fermerà con eſſo incontrandoſi nella teſta del caſtello del Forometro.

§. XI. Quanto abbiamo riflettuto intorno al movimento verticale dell'elaſtro, dee applicarſi pure al di lui movimento orizzontale, qualora cioè il caſtello del Forometro è apparecchiato per il getto orizzontale de' ſolidi, giacchè il peſo del martello è da traſcurarſi, s' aggravi, come nel primo caſo, o non s' aggravi, come nel ſecondo, ſull' elaſtro, in riguardo alla forza centripeta, con cui ſi conduce al centro di quiete. Ed ecco aperta la via a poter ricavare, e ſtabilire in formule generali non ſolo la natura, le proprietà, e tutti gli accidenti del movimento del martello *G* congiunto al noſtro elaſtro, ma di qualunque punto negli elaſtri di ſimil fatta: ricerca, che nel noſtro argomento diverrebbe anzi che d' utilità, di ſolo abuſo di calcolo, ed interamente inutile, baſtando il poter dedurre preſentemente dalle coſe finora eſpoſte le nozioni ſeguenti.

§. XII. E poichè un ſolido reſpinto o verticalmente, od orizzontalmente dal martello congiunto all' elaſtro del Forometro viene accompagnato da eſſo martello per lo ſpazio di 7 linee (§. IX.) con quella legge di movimento, che abbiamo dichiarato (§. X.); è manifeſto che dibattendo dallo ſpazio percorſo dal ſolido le dette 7 linee, rimarrà lo ſpazio, ch' egli percorſe da sè ſolo, e con eſſo in conſeguenza la miſura dell' ultimo grado di velocità impreſſogli dall' elaſtro accennato.

§. XIII. Partendo l' elaſtro da un medeſimo grado di tenſione, comunicherà col martello ad eſſo unito a' ſolidi di egual peſo o maſſa, che incontraſſe nel di lui viaggio verticale, diſpoſti già nel Forometro, com' è noto (§. §. V. VI.), gradi eguali di velocità. Sarà però eguale, maggiore, o minore la velocità impreſſa ad un ſolido gettato verticalmente, di quella che verrà impreſſa al medeſimo ſolido lanciato orizzontalmente, ſe la reſiſtenza d' attrito nel getto orizzontale oppoſta dal detto ſolido ſia eguale, maggiore, o minore del ſuo proprio peſo, per lo ſpazio delle 7 linee, che dal martello congiunto all' elaſtro viene accompagnato.

§. XIV. Eſſendo la forza centripeta dell' elaſtro, nel punto ove ſta anneſſo il martello, paſſato al primo grado di tenſione, equivalente al peſo di libbre quattro, riducendoſi a libbre due quando viene arreſtato nella teſta del caſtello del Forometro; ſi fa per ultimo manifeſto, che in tanta efficacia di forza centripeta in detto elaſtro tanto meno diverrà computabile la differenza delle velocità impreſſe dall' elaſtro a diverſi ſolidi, quanto ſaranno più vicini a pareggiarſi nel loro peſo aſſoluto ſe gettati verticalmente, oppure, peſando lo ſteſſo, quanto ſaranno più vicini a reſiſtere ugualmente all' eſſere traſportati per lo ſpazio delle 7 linee, che ſtanno in compagnia del martello congiunto al medeſimo elaſtro, ſe ſieno ſpinti orizzontalmente; eſſendo certo già che nel primo caſo il ſolido di minor peſo riceverà maggior grado di velocità, e così quello di minor reſiſtenza nel ſecondo caſo, non variando in queſto però, come s' è avvertito, di maſſa o di peſo aſſoluto.

ARTICOLO III.

Eſperienze per rilevare le leggi della reſiſtenza di attrito, che incontrano i ſolidi, che ſi trovano ſulle ſuperficie di altri ſolidi in movimento.

ESPERIENZA I.

§. XV. Scelte le tre ſpecie di legno, *Cirmolo* che è il più leggiero nella categoria de' legni dolci, *Noce*, e *Corniolo*, che degradano notabilmente nella loro gravità ſpecifica, non tenendomi che alla grandezza della baſe de' tre ſolidi che poſſono uſarſi nel noſtro Forometro (Art. I. §. V.), ne ho formati tre dello ſteſſo peſo di once $1\frac{3}{4}$ colle tre ſpecie di legno accennate. Il primo ſolido pertanto, ch' era di cirmolo, eſſendo della baſe quadrata di poll. 1, lin. 11, rimaſe alto poll. 1, lin. 4; il ſecondo di noce, colla baſe quadrata di poll. 1, lin. 5, ſi trovò alto poll. 1, lin. 9; ed il terzo ch' era di corniolo della baſe quadrata di lin. 11 di lato, riuſcì alto poll. 2, lin. $4\frac{3}{4}$. Ciò fatto diſpoſi il Forometro al getto verticale, ponendo in eſperimento i tre deſcritti ſolidi, ed appuntando l' elaſtro al primo grado di tenſione. Il riſultamento di queſta ſperienza ſi vede nella ſeguente Tavola, avvertendo, che non eſſendo riuſciti i ſolidi dell' altezza di poll. 1, lin. 9, eccettuato quello di noce, ſi dovette, per ottenere la preciſa aſceſa verticale del loro centro di gravità , uſare in tal caſo la diligenza particolare nel ſolido di cirmolo alto poll. 1 , lin. 4 di aggiugnere all' altezza dell' aſceſa ricavata colle avvertenze indicate (*Art.* I. §. V.) (Art. II. §. XII.), lin. 2 $\frac{1}{2}$ metà della differenza fra l' altezza attuale del ſolido , e quella che dovrebbe avere di poll. 1 , lin. 9 , ſtante le diviſioni ſegnate nel tubo verticale della macchina ; ed all' oppoſto , per la ſteſſa ragione, convenne detrarre dall' altezza dell' aſceſa del ſolido di corniolo lin. 3 $\frac{1}{2}$, metà della differenza fra la di lui attuale altezza di poll. 2, lin. 4 $\frac{1}{4}$, e quella di poll. 1 , lin. 9 , che eſattamente competerebbe alle accennate diviſioni.

	Dimenſioni dei ſolidi peſanti egualmente Onc. 1 $\frac{1}{4}$, in poll., e lin.			Aſceſa verticale del centro di gravità de' ſolidi.	
	Altezza	Larghezza	Lunghezza	Pollici	Linee
Solido di Cirmolo	1 : 4	1 : 11	1 : 11	4 :	5 $\frac{1}{2}$
Solido di Noce	1 : 9	1 : 5	1 : 5	5 :	5
Solido di Corniolo	2 : 4 $\frac{1}{4}$	0 : 11	0 : 11	6 :	1 $\frac{1}{2}$

OSSERVAZIONE.

§. XVI. E poichè i ſolidi projetti in direzione verticale, eſſendo per tutti e tre ugualmente appuntato l' elaſtro del Forometro al primo grado di tenſione , peſavano lo ſteſſo, dee adunque eſſere ſtato loro comunicato dall' elaſtro il medeſimo grado di velocità (Art. II. §. XIII.); e perciò ſecondo le leggi del moto uniformemente accelerato , e ritardato de' gravi ſulla ſuperficie terreſtre, avrebbero dovuto inalzarſi alla medeſima altezza, contro l' eſperienza, la qual dimoſtra, che il ſolido di cirmolo di maggior baſe ſalì poll. 1 , lin. $\frac{1}{2}$ meno del ſolido di noce di baſe media, e queſto ſalì lin. 8 $\frac{1}{2}$ meno del ſolido di corniolo di baſe picciola ; di modo che il primo ſalì meno dell' ultimo poll. 1 , lin. 8 $\frac{1}{2}$. Ceſſerà però ogni motivo di dar penſiere a ſiffatta contraddizione di teoria, e di eſperienza, ſe rifletteremo ſoltanto aver noi fondata la teoria dell' elaſtro del Forometro indipendentemente dalla reſiſtenza dell' aria : dopo di che qual meraviglia, che incontrando l' aria i ſolidi ſpinti dall'elaſtro con ſuperficie proſſimamente una doppia dell' altra, il primo di eſſi ſaliſca meno del ſecondo, e queſto meno del terzo? Sarebbe qui inutile fermarſi maggiormente ſu tale fenomeno, baſtando al caſo noſtro preſentemente averlo ſoltanto in oſſervazione nel confrontare fra di sè i riſultati, che cercheremo di raccogliere dal noſtro Forometro.

ESPERIENZA II.

§. XVII. Apparecchiato il Forometro pel getto verticale de'ſolidi (Art. I. §. V.), e diſpoſto l' elaſtro al primo grado di tenſione, ſonoſi poſti in eſperimento tre ſolidi dello ſteſſo volume, colla baſe quadrata di linee 11 di lato, ch' è il minor ſolido ricevuto dalla macchina. Il primo ſolido era di abete, il ſecondo di noce, ed il terzo di corniolo. Nella ſottopoſta Tavola ſi rileva il peſo di eſſi ſolidi, e l'aſceſa verticale del loro centro di gravità, quale eſſa riſulta colle conſiderazioni eſpoſte (Art. I. §. V.) (Art. II. §. XII.), il che avvertiamo ancora queſta ſola volta per ſempre.

	Peſo de' ſolidi		Aſceſa verticale del centro di gravità de' ſolidi.	
	Dramme	Grani	Pollici	Linee
Solido di Abete.	5 :	3	8 :	2 $\frac{1}{2}$
Solido di Noce.	6 :	37 $\frac{1}{2}$	7 :	10
Solido di Corniolo.	10 :	30	6 :	6

OSSERVAZIONE.

§. XVIII. Queſta ſperienza ci fa conoſcere, ch'eſſendo le coſe rimanenti pari, vie più il ſolido ſpinto verticalmente s' inalza quant' è di minor peſo; fenomeno, che corriſponde a ciò che appunto abbiamo dedotto dalla teoria dell'elaſtro, impiegato nella macchina Forometrica (Art. II. §.

XIV.) . Imperciocchè comunicando l' elaſtro maggior grado di velocità al ſolido di minor peſo , a maggiore altezza dee eſſo pure inalzarſi per le note leggi Galileane , giacchè in tal caſo ſoffrono i ſolidi gettati dalla macchina , per eſſere dello ſteſſo volume , quaſi gradi eguali di modificazioni per conto della reſiſtenza dell' aria che incontrano nella loro aſceſa verticale. Dobbiamo inoltre oſſervare la ſomma ſenſibilità dell' elaſtro , tuttochè dotato ſia di energica forza centripeta , poichè la differenza di peſo d' una dramma e mezzo circa fra il ſolido di noce e quello di abete , fa che il ſecondo più leggiero s' inalzi linee $4\frac{1}{2}$, oltre l' aſceſa di poll. 7, lin. 8 del primo più peſante, e la differenza di dramme $5\frac{1}{2}$ circa , fra il ſolido di corniolo e lo ſteſſo di abete, fa che queſto s' inalzi poll. 1 , lin. $8\frac{1}{2}$ più di quello. Premeſſe queſte due ſperienze, che ci mettono in chiaro delle avvertenze , che dobbiamo avere nell' eſaminare i riſultati , che ricaviamo dalla noſtra macchina Forometrica , paſſiamo all' eſpoſizione delle ſeguenti , che ho inſtituito al propoſto oggetto di rilevare le leggi della reſiſtenza di attrito, che incontrano i ſolidi in movimento.

Esperienza III.

§. XIX. Dello ſteſſo legno abete feci formare tre ſolidi della baſe quadrata di lin. 11 di lato, tre della baſe quadrata di poll. 1 , lin. 5 , ed altri tre colla baſe quadrata di poll. 1, lin. 11, eſſendo tutti della ſteſſa altezza di poll. 1, lin. 9 , onde foſſero applicabili eſattamente al Forometro (Art. I. §. V.) . Quindi o col vuotare in centro quel ſolido, che peſava più del biſogno, o coll' aggiungere peſo, ineſtandovi del piombo con aggiuſtatezza pure in centro a quel ſolido che peſava meno, ho ridotti i deſcritti ſolidi, in ciaſcuna claſſe, il primo di un' oncia di peſo, il ſecondo di due , ed il terzo di quattro . Così preparati i nove ſolidi ho ſperimentato lo ſpazio da ciaſcuno di eſſi percorſo e verticalmente, ed orizzontalmente ſopra una tavola di abete di pulitezza non all'eſtremo ricercata, diſponendo, ed applicando il Forometro ne' modi eſpoſti (Art. I. §§. V, e VI.) , e tendendo l' elaſtro coſtantemente al primo grado di apertura.

tura. Oltre a ciò all' eſtremità dell' accennata tavola ho anneſtato la mobile e pronta girella *L* (*Fig. VI.*) per ricavare con iſcrupoloſa preciſione l' equivalente in peſo alla reſiſtenza che ciaſcuno de' ſolidi *O* projetti ſulla tavola orizzontale *GH* oppone all' eſſere ſopra di eſſa in iſtato di equilibrio meccanico : l' artificio a tal uopo uſato è già per sè manifeſto. Ecco pertanto il proſpetto di tutta queſta ſerie di eſperimenti eſeguiti con quelle cautele ed attenzioni, che ſono neceſſariamente richieſte dalla delicatezza del ſoggetto.

Lato della baſe quadrata de' ſolidi.	Peſo de' ſolidi.	Aſceſa verticale del centro di gravità de' ſolidi.	Corſa orizzontale del centro di gravità de' ſolidi.	Equivalente in peſo alla reſiſtenza di attrito, che incontrano i ſolidi pel loro equilibrio meccanico ſulla tavola orizzontale.
Poll. Lin.	Once	Poll. Lin.	Poll. Lin.	Onc. Dram. Gran.
0 : 11	1	6 : 9	17 : 2	0 : 3 : 20
0 : 11	2	5 : 4	13 : 5	0 : 7 : 10
0 : 11	4	2 : 7	7 : 7	1 : 4 : 30
1 : 5	1	4 : 8	13 : 11	0 : 2 : 53
1 : 5	2	4 : 4	13 : 3	0 : 5 : 15
1 : 5	4	2 : 5	7 : 3	1 : 4 : 0
1 : 11	1	1 : 10	4 : 8	0 : 3 : 26
1 : 11	2	3 : 2	7 : 3	0 : 6 : 52
1 : 11	4	1 : 4	3 : 2	1 : 7 : 10

OSSERVAZIONE.

§. XX. Rifletteendo ſulla ſerie degli eſperimenti deſcritti nella tavola ſovrappoſta ſi rileva, 1°. che i ſolidi in ciaſcuna claſſe, eſſendo dello ſteſſo peſo, ſi ſono inalzati, ed hanno percorſo orizzontalmente maggiore ſpazio, avendo minor volume, conformemente a ciò che abbiamo dedotto dalla ſperienza I. (§. XVI.) : 2°. che conſiderati i ſolidi in ciaſcuna claſſe partitamente, nella prima e ſeconda ſi verificò, che i ſolidi eſſendo dello ſteſſo volume hanno percorſo verticalmente, ed orizzontalmente ſpazio maggiore, peſando meno, come abbiamo concluſo nella ſperienza II. (§. XVIII.); ma in quelli della terza claſſe il fenomeno comparve con qualche differenza, avvegnachè il primo ſolido salì, e percorſe bensì qualche poco più del terzo, ma aſſai meno però del ſecondo, contro ciò che dovea avvenire. Queſta diſcordanza di effetti è quella che oſſervaſi generalmente in tali eſperimenti, riguardo al non eſſere i ſolidi ſaliti, o percorſi con degradazioni in qualche modo conſimili a quelle delle due citate ſperienze, deeſi attribuire alla coſtruzione particolare de' nove ſolidi poſti in cimento, alcuni de' quali, e ſingolarmente il primo della terza claſſe, che s' allontanò più ſenſibilmente degli altri, per ſeguitare la legge ſtabilita ne' loro peſi ſi dovettero vuotare, facendo loro a norma del biſogno un più, o meno ampio foro cilindrico, ed altri empiere di peſo, come abbiamo indicato antecedentemente (§. XIX.), in conſeguenza di che l' aria agiva in eſſi con maggiore, o minore efficacia a tenore della loro figura atta ad incontrarne, e contenerne maggiore, o minor quantità. Quindi ho abbandonato qualunque conſiderazione ſul generale reciproco rapporto de' riſultati degli eſperimenti eſpoſti, ed eſſendomi attenuto ſoltanto a conſiderare l' eſperimento in ciaſcun ſolido da per sè in particolare, cominciai a ragionare così. E poichè il ſolido projetto verticalmente ha ricevuto nell' iſtante, che s' è diſtaccato dall' elaſtro, quel grado d' impeto o velocità, che ſarebbeſi da per sè acquiſtato cadendo liberamente dall' altezza medeſima (non tenendo conto per un momento della reſiſtenza dell' aria, e della differente reſiſtenza oppoſta dal ſolido medeſimo contro l' elaſtro, qualora viene gettato orizzontalmente (Art. II. §. XIII.)), ſi fa manifeſto, che nel getto orizzontale il ſolido verrebbe ſpinto con quel grado d' impeto, che ſi acquiſterebbe cadendo dall' altezza, a cui è ſalito verticalmente. Poſto ciò abbiamo adunque nell' uno e nell' altro caſo il medeſimo ſolido dotato dello ſteſſo grado di velocità, e ſe nel getto verticale non v' ha dubbio che proceda egli di moto uniformemente ritardato, nell' orizzontale è almeno certo che procede di un moto ritardato, giacchè paſſa, dopo percorſo un certo ſpazio, dal ſommo grado di velocità impreſſagli allo ſtato di quiete. Premeſſa pertanto queſta rifleſſione, il primo eſperimento che s' affaccia da tentarſi ſu i riſultati di queſta ſperienza III., ſi è di conoſcere ſe pure il ſolido nel getto orizzontale proceda di moto uniformemente ritardato a ſomiglianza del verticale, colla differenza però, che ſiccome in queſto movimento la forza coſtantemente ritardatrice è il peſo del ſolido, così in quello la coſtante forza ritardatrice ſia la reſiſtenza di attrito, che incontra eſſo nel diſporſi in iſtato di equilibrio meccanico ſul piano, per cui ſi trasferiſce. Per entrare in tale diſamina baſta ricorrere al noto teorema meccanico, cioè che *Gli ſpazj percorſi di moto uniformemente ritardato, da un mobile dotato d'un medeſimo grado di velocità, ſeguono la ragione inverſa delle forze ritardatrici, che contro di eſſo coſtantemente agiſcono*. Di maniera che nel noſtro caſo lo ſpazio verticale all' orizzontale, percorſi amendue dal medeſimo ſolido, dovrebbe avere la ragione inverſa del peſo aſſoluto del ſolido alla di lui accennata reſiſtenza di attrito. Inſtituita pertanto in ciaſcun de' ſolidi regiſtrati nella tavola degli eſperimenti rapportata nell' antecedente §. XIX. cotale analogia, ſi oſſerva che eſſa accoſtaſi al vero aſſai da vicino, rimarcandoſi ſoltanto coſtantemente il difetto, che il viaggio orizzontale de' ſolidi per l' eſatta di lei corriſpondenza è un po maggiore del biſogno, e più ancora ne' ſolidi di maggior peſo, il che piuttoſto che metterci in diffidenza, ci vincola anzi a conſiderarla come l' unica che affettata venga da tal natura di movimento: imperocchè opponendoſi il ſolido nel getto orizzontale contro l' elaſtro per lo ſpazio di 7 linee, che con eſſo lui va congiunto, con reſiſtenza minore di quella che proverrebbe dal ſuo peſo aſſoluto, eſſendo la reſiſtenza di attrito in tutti i noſtri ſolidi eſperimentati minore del peſo aſſoluto di eſſi, dee neceſſariamente eſſere maggiore la velocità impreſſagli dall' elaſtro nel getto orizzontale, che nel verticale (Art. II. §. XIII.), e quindi creſcere lo ſpazio orizzontale dal ſolido percorſo, oltre il voluto dall' enunziata proporzione: difetto che indubitatamente ſarebbeſi manifeſtato con differenze più rimarchevoli, ſe la reſiſtenza dell' aria non vi aveſſe in qualche modo compenſato, come quella che aumentandoſi coll' aumentare la velocità del corpo dentro eſſa in movimento, in circoſtanze pari, dee aver agito con maggior efficacia nel getto orizzontale, che nel getto verticale de' ſolidi. L' eſame indicato può ancora egualmente verificarſi colla ſcorta de' due ſeguenti teoremi meccanici. 1.° *I tempi impiegati da un mobile ſollecitato da diverſe forze acceleratrici, onde acquiſti lo ſteſſo grado di velocità, ſeguono la ragione inverſa delle medeſime forze acceleratrici*, ed il 2.° *Gli ſpazj percorſi di moto uniformemente ritardato dallo ſteſſo mobile ſollecitato da differenti forze ritardatrici, finchè conſumi uno ſteſſo grado di velocità impreſſogli, procedono in ragione diretta de' tempi*. Sapendoſi pertanto, che un grave percorre piedi Parigini 15, poll. 2 in un minuto ſecondo di tempo, oppure piedi 14, poll. 5 de' noſtri, ſi trovi il tempo impiegato da ciaſcun ſolido nell' aſceſa verticale; ed eſſendo poi cognita la ragione del ſuo peſo aſſoluto alla reſiſtenza di attrito che incontra pel ſuo equilibrio meccanico ſulla tavola ſopra cui è percorſo, mediante il primo teorema, ſi ricavi il tempo, che il detto ſolido ha conſumato nella corſa orizzontale; e quindi col ſoccorſo del ſecondo teorema ſi verrà facilmente in cognizione ſe vera ſia l' ipoteſi aſſunta, che la reſiſtenza di attrito cioè agiſca contro il ſolido nel di lui movimento orizzontale a ſomiglianza della gravità, quando aſcende verticalmente. Inſtituito sì fatto calcolo ſu i riſultati eſpoſti nella tavola degli eſperimenti eſeguiti intorno ai nove noti ſolidi, deduconſi finalmente le ſteſſiſſime conſeguenze, che dedotte abbiamo coll' antecedente eſame. E le ſteſſiſſime conſeguenze pure ſi deducono paragonando fra loro gli ſpazj verticali cogli orizzontali percorſi da' ſopradeſcritti ſolidi, appuntando l' elaſtro del Forometro a diverſi altri gradi di apertura; rimarcandoſi inoltre con proſſimità fiſica una coſtante ragione fra gli ſpazj orizzontali e i riſpettivi ſpazj verticali da ciaſcun de' ſolidi percorſi; il che appunto dee accadere ſe il movimento orizzontale de' ſolidi è un movimento uniformemente ritardato: ma cerchiamo di accertarci ſu ciò con maggior preciſione ed eſattezza.

ESPERIENZA IV.

§. XXI. Colle ſolite diligenze ho poſto in eſperienza un ſolido di noce delle minime dimenſioni accettate dal noſtro Forometro, cioè della baſe di linee 11 di lato. Replicata più volte l'eſperienza, aſceſe il ſolido verticalmente poll. 7, lin. 11: e percorſe orizzontalmente poll. 21, lin. 8. Il peſo di eſſo ſolido era dram. 6, gran. 37 $\frac{1}{2}$, e la di lui reſiſtenza di attrito per diſporſi in iſtato di equilibrio meccanico ſu la tavola, in cui fu slanciato, era dram. 2, gran. 30.

OSSERVAZIONE.

§. XXII. Per rendere meno computabile la differenza di velocità, che comunica l' elaſtro del Forometro ad un medeſimo ſolido, fra il getto verticale e l' orizzontale, ho aſſunto in queſta ſperienza l' enunziato ſolido di noce, il quale peſa meno dell' oncia, ch' era il peſo de' ſolidi minori nell' eſperienza antecedente; e ciò io intrapreſi coll' oggetto di rilevare con maggior ſicurezza la legge del movimento de' ſolidi projetti ſopra un piano orizzontale, finora ſoltanto, può dirſi così, conoſciuta in embrione. Applichiamo adunque ſu i riſultati della preſente ſperienza i due eſami, che indicati abbiamo (§. XX.). Quanto al primo eſame pertanto dovrebbe verificarſi, che il peſo aſſoluto del ſolido di noce dram. 6, gran. 37 $\frac{1}{2}$, alla di lui reſiſtenza di attrito equivalente a dram. 2, gran. 30, ha la ragione dello ſpazio orizzontale poll. 21, lin. 8, al verticale poll. 7, lin. 11; cioè riducendo a' minimi termini, dovrebb' eſſere la ragione 53 a 20 uguale alla ragione 52 a 19. Ma fatto il confronto di eſſe ragioni, ſi trova che la ſeconda non eccede la prima, che della frazione 33:380, differenza, che certamente è pochiſſimo computabile. Paſſando ora al ſecondo eſame, ſi trova che il tempo impiegato dal ſolido per l' aſceſa verticale di poll. 7, lin. 11, è $12'''$, $50''''$, e che il tempo impiegato dallo ſteſſo ſolido nello ſpazio orizzontale di poll. 21, lin. 8, è $34'''$; laonde, perchè venga comprovata l' ipoteſi aſſunta, che lo ſpazio orizzontale ſia percorſo dal ſolido di moto uniformemente ritardato, avendo per forza ritardatrice la reſiſtenza di attrito che prova per diſporſi in equilibrio meccanico ſulla tavola orizzontale per cui fu ſpinto, dee verificarſi che lo ſpazio verticale poll. 7, lin. 11, all' orizzontale poll. 21, lin. 8, ha la ragione del tempo $12'''$ $50''''$, al tempo $34'''$: ma il prodotto degli eſtremi in tale proporzione dà

3230, e quello de' mezzani 3337, numeri che ſi accoſtano all' uguaglianza quanto mai può pretenderſi; dunque vie più ci troviamo forzati a prediligere la natura di movimento che fino da bel principio ſoſpettata abbiamo ne' ſei ſolidi projetti ſopra un piano orizzontale. Sarebbe in vero irragionevole il pretendere, che con eſattezza matematica aveſſero a corriſpondere i riſultati dell' eſperienza, prima di ſtabilire la legge che ſi va indagando, mentre ad ognuno è ben noto quanto difficile, per non dire impoſſibile, ſia il por mano nella materia, tanto vaga, e ſoggetta a modificazioni, e ſingolarmente nel noſtro caſo, in cui varie, e poi varie poſſono eſſere le combinazioni, che concorrano a deturpare gli effetti di quell' unica cauſa, di cui andiamo in traccia: ciò però che ci può mettere al ſicuro ſi è, che la differenza nelle proporzioni, dalle quali dipende la verità della legge, naſcendo coſtantemente dall' eſſere lo ſpazio orizzontale percorſo dal ſolido un po maggiore del biſogno, conoſciamo nello ſteſſo tempo la cauſa di tale inconveniente, cioè avvenire ciò dal ricevere il ſolido nel getto orizzontale qualche grado più di velocità, che nel getto verticale, con che in luogo di farci cotale differenza dubitare della legge, ſerve anzi ella a vie più aſſicurarci della ſua verità, ed a conſermarcela quanto è mai poſſibile fiſicamente. Ecco nondimeno un' altra ſperienza, che dovremo ſenza contraddizione ammettere per unica, e deciſiva nel preſente argomento.

ESPERIENZA V.

§. XXIII. Laſciando fuori in ciaſcuna claſſe il ſolido del peſo d' oncie 4, de' ſei rimanenti regiſtrati nella tavola (§. XIX.) ho riveſtita quella faccia, con cui ſtriſciavano nel getto orizzontale, con tela di lino ruvida, e della ſteſſa tela pure ho coperto quel tratto di tavola orizzontale, per cui doveano ſcorrere. Dopo tale preparazione oſſervai l' aſceſa verticale, e la corſa orizzontale di ciaſcuno degl' indicati ſolidi con la ſolita diligenza, ed eſperimentai inoltre la reſiſtenza di attrito, che così riveſtiti, e ſopra un piano coperto del pari, incontravano pel loro equilibrio meccanico. Qui ſotto ſi vedono di tale ſperienza i riſultamenti chiaramente eſpoſti.

Lato della baſe quadrata de' ſolidi.		Peſo dei ſolidi.	Aſceſa verticale del centro di gravità de' ſolidi.		Corſa orizzontale del centro di gravità de' ſolidi.		Equivalente in peſo alla reſiſtenza di attrito, che incontrano i ſolidi pel loro equilibrio meccanico ſulla tavola Orizzontale.		
Poll.	Lin.	Once	Poll.	Lin.	Poll.	Lin.	On.	Dram.	Gran.
0	11	1	6	9	8	6	0	6	40
0	11	2	5	4	5	11	1	6	50
1	5	1	4	8	7	11	0	5	30
1	5	2	4	4	6	5	1	4	0
1	11	1	1	10	1	10	1	0	0
1	11	2	3	2	3	2	2	0	0

OSSERVAZIONE.

§. XXIV. Coll'artifizio adoperato nella preſente ſperienza ſi è aumentata la reſiſtenza di attrito, che i ſolidi incontrano pel loro equilibrio meccanico ſul piano, per cui ſcorrere debbono, a ſegno che poca differenza paſſa fra eſſa ed il peſo de' detti ſolidi, anzichè ne' due ultimi s' è combinata una perfetta uguaglianza, come può raccoglierſi dalla tavola degli eſperimenti. In tal modo ſi ottenne di porre quaſi in parità di circoſtanze il getto verticale de' primi quattro ſolidi col loro getto orizzontale, ed in eſatta parità i due ultimi; ſicchè per queſti ſingolarmente ſiamo certi, che l' elaſtro dovea loro comunicare orizzontalmente lo ſteſſo grado di velocità, che imprimevagli verticalmente, e che la reſiſtenza dell' aria era indifferente nell' uno e nell' altro movimento di tali due ſolidi, ſe foſſero proceduti di moto uniformemente ritardato, venendo reſpinti da eguali forze ritardatrici; per gli altri quattro ſolidi poſcia tali riguardi doveanſi avere più o meno in oſſervazione, ſecondo che era diſtante in uguagliare la reſiſtenza dell' attrito de' ſolidi il loro peſo aſſoluto. Se pertanto ha luogo in natura la legge, che conghietturata finora abbiamo nel movimento orizzontale de' ſolidi, è manifeſtiſſimo che lo ſpazio verticale de' due ultimi accennati ſolidi dovea pareggiare lo ſpazio orizzontale da eſſi percorſo, e che negli altri quattro tanto più da vicino ſi dovea ciò riſcontrare, quanto che era più proſſima la reſiſtenza del loro attrito a pareggiare il proprio loro peſo aſſoluto. Ma così per l' appunto è accaduto, baſtando per accertarſene una paſſeggiera conſiderazione ſulla tavola degli eſperimenti ſuperiormente rapportata: reſta dunque, dopo tutto ciò che ſi è anche ſul propoſito nelle antecedenti ſperienze riflettuto, con evidenza, e con certezza ſiſica dimoſtrata l' indole, e la qualità del movimento, che ſeguono i ſolidi, ove non abbian a ſuperare, che la reſiſtenza di attrito, potendoſi, o per meglio dire dovendoſi intorno a ciò ſtabilire il ſeguente canone riguardo a que' ſolidi, che nel loro movimento incontrano quella reſiſtenza di attrito, che col nome di reſiſtenza della prima ſpecie diſtinta viene da' Meccanici (Mec. Pratica. ſez. I. Art. I.).

Ne' ſolidi, che muovonſi ſopra le ſuperficie piane di altri ſolidi, la reſiſtenza di attrito della prima ſpecie, che incontrano pel loro equilibrio meccanico ſopra tali ſuperficie, agiſce nel loro movimento a guiſa di coſtante forza ritardatrice, facendoli procedere perciò di moto uniformemente ritardato.

ESPERIENZA VI.

§. XXV. Un cilindro di noce del raggio di linee 6, e lungo linee 11, projetto verticalmente, aprendo l' elaſtro del Forometro linee 5 meno del primo grado di apertura, a cui lo abbiamo ſempre teſo nelle ſperienze antecedenti, ſalì poll. 2 lin. 7; e projetto lo ſteſſo cilindro orizzontalmente, percorſe poll. 110. Il peſo aſſoluto del cilindro era dram. 2, gran. 52; e ſiccome poi eſſendo il detto cilindro poggiato ſecondo la lunghezza ſopra un piano inclinato liſcio, com' era quello ſopra cui percorſe, ſi ſoſtenne in equilibrio meccanico fino all' angolo di elevazione di $1.^\circ, 24'$; cosi la di lui reſiſtenza di attrito, che chiamaſi della ſeconda ſpecie, ſi rileva di gran. $4\frac{1}{5}$ (Mec. Pratica. Sez. I. Art. II.)

Osservazione.

§. XXVI. E poichè in queſta ſperienza il cilindro projetto orizzontalmente procede di moto diretto progreſſivo ed inſieme di rotatorio intorno al proprio aſſe, è manifeſto che la reſiſtenza che incontra ſulla tavola orizzontale è della ſeconda ſpecie: ed è chiaro inoltre che in queſto eſperimento, atteſo il picciol volume ed il pochiſſimo peſo del cilindro, ed atteſa la di lui figura, dee riguardarſi come incomputabile il maggior grado di velocità che può eſſo cilindro ricevere nel getto orizzontale in confronto del verticale, e così pure incomputabile la reſiſtenza dell' aria che incontra ne' due accennati movimenti. Per il che ſe anche in tale circoſtanza di movimento le reſiſtenze di attrito, che provano i ſolidi pel loro equilibrio meccanico, agiſſero contro di eſſi in via di coſtanti forze ritardatrici, dovremmo verificare (§. XXII.) che lo ſpazio verticale poll. 2, lin. 7, a cui ſalì, allo ſpazio poll. 110, che percorſe ſul piano orizzontale, ha la ragione inverſa del di lui peſo aſſoluto dram. 2, gran. 52, alla reſiſtenza di attrito della ſeconda ſpecie gran. $4\frac{1}{5}$, che ſul medeſimo piano incontra pel ſuo equilibrio meccanico. Dando pertanto il prodotto degli eſtremi il numero $444\frac{1}{3}$, e quello de' mezzani 462, non può pretenderſi, in un fatto fiſico di tal natura, maggiore approſſimazione, onde ſtabilire anche per tale qualità di reſiſtenza di attrito il canone ſeguente:

Ne' ſolidi, che muovonſi ſopra le ſuperficie piane di altri ſolidi, la reſiſtenza di attrito della ſeconda ſpecie che incontrano pel loro equilibrio meccanico ſopra tali ſuperficie, agiſce nel loro movimento a guiſa di coſtante forza ritardatrice, facendoli procedere perciò di moto uniformemente ritardato.

CONCLUSIONE GENERALE

§. XXVII. Dalle coſe ſuperiormente eſpoſte ſi vede chiaro, che generalmente le leggi del movimento concreto de' ſolidi, quanto alla reſiſtenza di attrito che incontrano traſportandoſi ſulle ſuperficie di altri ſolidi, dipendono dalle leggi, che cotali reſiſtenze ſeguono per lo ſtato di equilibrio meccanico de' medeſimi ſolidi, ſia pure tale movimento diretto per linea retta, o per linea curva, come circolare ecc., aſcenda, o diſcenda il ſolido per piani rettilinei, o curvilinei, giacchè è ben conveniente nella fiſica de' corpi il concedere di poter conſiderare il moto curvilineo di un ſolido come compoſto di movimenti diretti ſucceſſivamente per piccioli piani inclinati fra sè, ſecondo che richiede la natura della curva, ſopra cui va egli trasferendoſi. Per la qual coſa ſe ſi tratterà del movimento de' corpi, che procedono di ſolo moto progreſſivo retto, o circolare, ſiccome eſſi incontrano la reſiſtenza di attrito diſtinta col nome di prima ſpecie, così dovrà ricorrerſi alla legge da tale reſiſtenza ſeguita nel caſo di equilibrio meccanico, la quale, in parità di circoſtanze nelle ſuperficie de' ſolidi, è quella del loro peſo (Mec. Prat. Art. I. §. XXV.): di modo che lo ſteſſo ſolido, che ſia projetto con qualſivoglia grado di velocità ſulla ſuperficie d'un altro, avrà per coſtante forza ritardatrice quella reſiſtenza, che proverebbe per diſporſi in iſtato di equilibrio meccanico ſulla detta ſuperficie, reſiſtenza che, com' è noto, ſoltanto creſce col peſo del ſolido, e con la maggior ſcabroſità delle ſuperficie, che ſi ſtrofinano. E ſe ſi tratterà del movimento de' corpi, i quali al moto progreſſivo han congiunto il rotatorio intorno ad un centro, od aſſe, ſiccome queſti incontrano la reſiſtenza di attrito chiamata della ſeconda ſpecie; così dovremo ricorrere alla legge ſeguita da tale reſiſtenza per lo ſtato di equilibrio meccanico, ch' è la ragione inverſa de' raggi di rotazione de' ſolidi, ſuppoſte pari le ſcabroſità delle loro ſuperficie; ſicchè procedendo un ſolido coll' indicata natura di movimento, avrà egli per coſtante forza ritardatrice la reſiſtenza, che incontrerebbe pel ſuo equilibrio meccanico ſulla ſuperficie, per cui ſi traſporta, reſiſtenza che, com' è già provato (Mec. Prat. Art. II. §. XLVIII.), s'aumenta colla diminuzione del raggio rotatorio, e con la maggior aſprezza delle ſuperficie, che ſi sfregano. V'ha ancora un'altra qualità di attrito in cui continuamente, a cagione del moto contrario d' uno, o d'ambedue i corpi in isfregamento, diſtaccanſi particelle ſolide dalle loro ſuperficie, come ne abbiamo gli eſempj nell' uſo delle mole applicate a pulire, o ad affilare coltelli ed altri ſtrumenti di ſimil fatta. Su tale natura di attrito io non mi ſono affrettato a darvi penſiero alcuno, conoſcendo bene la ſomma difficoltà di poterlo aſſoggettare a miſurate, e determinate regole, poichè certamente queſte debbono variarſi d' iſtante in iſtante, variando ad ogn' iſtante pure le qualità, e circoſtanze delle ſuperficie in isfregamento. Ciò però che a me ſembra poſſa dirſi in via generale di coteſta natura di attrito ſi è, che la ſua reſiſtenza dipender debba dalla maggior o minor durezza de' corpi in isfregamento, dalla figura, e aderenza delle particelle conſtituenti le ſcabroſità nelle loro ſuperficie, dalla maggior, o minor aſprezza di eſſe, dalla loro grandezza, dalla preſſione, con cui i corpi sfreganti vengono l' uno all' altro uniti, e per l' ultimo forſe dalla velocità, con cui ſi muovono, ſe pure oltre a tutto ciò non aveſſe ad avervi qualche influenza ancora il calore, che per l' ordinario eccitaſi, e sviluppaſi da' corpi obbligati a ſimili contraſti, e vicende. Quindi è, che laſciando da parte così intralciata ricerca, non mi ſono attenuto, che alle due qualità di attrito ſuperiormente deſcritte, le quali certamente ſono le idonee, ed eſſenziali, che occorrer poſſano per condurci al noſtro fine, che fu quello finora di ſtabilire nelle macchine generalmente il loro equilibrio di fatto, o ſia l' equilibrio meccanico, e di ridurre le leggi aſtratte del moto al concreto, cioè di preparare un materiale neceſſario per l' inſtituzione della Scienza del moto concreto de' ſolidi.

ARTICOLO IV.

Conſiderazioni ſugli eſperimenti, e ſulle opinioni di alcuni Fiſici intorno alla reſiſtenza di attrito, che incontrano i ſolidi in movimento.

§. XXVIII. Tra i molti Autori, che cercarono di ſtabilire la legge della reſiſtenza di attrito, che provano i ſolidi in movimento, non ſi trova che il *Muſſchenbroechio*, il quale, dopo aver conſultato ciò ch' era ſtato detto ſull' argomento dagl' Illuſtri *Amontons*, *Leibnizio*, *Sturmio*, *Camus*, *Deſaguliers*, *Bulſingero*, *Parent*, *Belidor*, *Rowus*, *Nollet*, ed altri, abbia tentato di por mano all' eſperienza; ed eccone ciò che da eſſa concluſe. “ (*a*) In minoribus corporum velocitatibus ſequitur attritus utcumque rationem velocitatis, non tamen accurate. Verum in majoribus velocitatibus ratio attritus multum increſcit: idque locum habet, ſive corpora, quæ ſupra ſe moventur, ſicca, ſive oleo uncta fuerint, quamvis in ſiccis id potiſſimum ſit, quia cito quamplurimæ partes abraduntur, ab abraſis ſulci in altero corpore inciduntur, & aſperantur ſuperficies vehementer. Cum enim axis in Tribometro chalybeus volvebatur in cupro rubro, oleoque large ungebatur, & velocitates erant uti 4, 6, 7, 8, 10; fuit attritus uti 1, 1 $\frac{1}{2}$, 2, 3, 4; quando erant velocitates in cupro ſicco 1 $\frac{1}{2}$, 3, 5, 7, 8; attritus fuit 1, 1 $\frac{1}{2}$, 2, 3, 4. Cum velocitas erat maxima in his experimentis ſive æqualis 10, fiebant 25 revolutiones axeos *D D* (*Fig. VII.*) intra tempus 2m″, & 24m‴. Attritus qui ponitur æqualis 1 eſt ad pondus motum uti 16 ad 95.,, Chiaro pertanto appariſce ben diverſa eſſere la riferita legge Muſſchenbroechiana dalla noſtra (Art. III. §. XXVIII), mentre colla prima ſi ſtabiliſce, che la reſiſtenza di attrito incontrata da un ſolido in movimento creſca ſecondo il maggior grado di velocità di cui è dotato, e colla ſeconda ſi ſtabiliſce, che la predetta reſiſtenza ſia ſempre coſtante e quella medeſima che incontra il ſolido pel ſuo equilibrio meccanico ſulla ſuperficie per cui ſi muove, qualunque ſia il grado di velocità con cui egli procede. Eſſendo pertanto ambedue l' enunciate leggi fiancheggiate dall' eſperienza, qual fra eſſe adunque avremo a conſiderare come certa e vera, e quale come falſa e ripugnante? Queſto è uno di que' tanti e molti eſempj, che dimoſtrano quanto difficile ſia il promuovere con certezza la Fiſica de' corpi, tuttochè abbia ella a' noſtri tempi ſcoſſo il giogo peripatetico, e dirigaſi ſoltanto per la via de' fatti, e dell' eſperienza. Così è, e biſogna confeſſarlo, che il Fiſico ſperimentatore non può giammai uſare abbaſtanza di circoſpezione prima di affidarſi interamente alle proprie ſperienze, dovendo ſempre dubitare della loro certezza, finchè almeno non rimanga con tutta evidenza con-

---

(*a*) *Introductio ad Philoſophiam naturalem. Tomus Primus pag.* 160 §. *DXXIII. Patavii, Typis Seminarii. MDCCLXVIII.*

vinto aver egli veramente ottenuti nelle di lui ſperienze riſultati unici, e direttamente appartenenti a quella cauſa, che ha preſo di mira. Ma venendo all' eſperienza Muſſchenbroechiana ſiaci permeſſo di eſporre intorno ad eſſa il noſtro giudizio coll' unico, ed ingenuo fine di rintracciare la verità.

§. XXIX. La macchina, denominata dall' Autore *Tribometro*, e colla quale effettuò egli la ſopra citata ſperienza, conſiſte in un cilindro *AB* (*Fig. VII.*) di legno di 4 poll. di diametro ſoſtenuto orizzontalmente ne' due perni *D D* di $\frac{1}{4}$ poll. di diametro ad eſſo anneſtati in direzione del proprio aſſe. Tali perni, e così pure i ſoſtegni, ne' quali s' inſerivano, potevano cambiarſi a tenore della qualità de' ſolidi, che volevanſi porre in cimento. Aggravando pertanto il cilindro *AB* ſopra i ſuoi perni *D D* del peſo 95, ſoſpendendo ad eſſo peſi uguali *P*, *Q* come indica la figura, poſe il noſtro Autore nella lance *R* i peſi 1, 1 $\frac{1}{2}$, 2, 3, 4 ſucceſſivamente uno dopo l'altro, ed oſſervò, che nell' attrito dell' acciajo col rame roſſo, eſſendo cioè i perni *D D* del primo metallo, e del ſecondo i ſoſtegni, ne' quali s' avvolgevano, ungendo copioſamente d' olio le ſuperficie in isfregamento, oſſervò, dico, che il cilindro *AB*, nel tempo coſtante di $2''$, $24'''$, faceva 10, 15, 17 $\frac{1}{2}$, 20, 25 rivoluzioni intorno al proprio aſſe, relativamente alle accennate cariche della lance *R*, dichiarando con ciò eſſere le velocità del cilindro in ragione de' numeri 4, 6, 7, 8, 10: e pulendo le ſuperficie in isfregamento da qualunque untume, le rivoluzioni del cilindro erano 3 $\frac{3}{4}$, 7 $\frac{1}{2}$, 12 $\frac{1}{2}$, 17 $\frac{1}{2}$, 20, cioè procedeva eſſo con velocità proporzionali a' numeri 1 $\frac{1}{2}$, 3, 5, 7, 8. E queſti ſono i riſultati, su' quali ſi fonda la poco ſopra riferita legge Muſſchenbroechiana, vale a dire che la reſiſtenza di attrito incontrata da' ſolidi in movimento ſegua, nelle velocità minori, proſſimamente la ragione delle medeſime velocità; e che nelle velocità maggiori le reſiſtenze ſieno maggiori del biſogno per ſeguitare la ſteſſa legge delle velocità, tali eſſendo le relazioni, che ſi rimarcano fra i peſi 1, 2 $\frac{1}{2}$, 2, 3, 4 eſprimenti la reſiſtenza dell' attrito provata da' perni *D D* (avvegnachè il raggio del cilindro *AB*, all' eſtremità di cui tutti agiſcono, è coſtante), ed i numeri 10, 15, 17 $\frac{1}{2}$, 20, 25, ovvero 3 $\frac{3}{4}$, 7 $\frac{1}{2}$, 12 $\frac{1}{2}$, 17 $\frac{1}{2}$, 20 indicanti le velocità del cilindro *AB*, ed in conſeguenza de' ſuoi perni *D D*, com' è manifeſto. Supponghiamo pure ſormontate in tale ſperienza tutte le gravi, e penoſe difficoltà, che non poſſono ſchifarſi nella pratica eſecuzione di eſſa, fra le quali certamente è d' annoverarſi quella di miſurare il tempo delle rivoluzioni del cilindro *AB*, mentre è d' uopo inoltrarſi nella delicata diviſione del tempo in minuti terzi; e l' altra, che nel rivolgerſi il cilindro *AB* ſi mantengano coſtantemente i peſi *P Q* fra di sè in equilibrio, benchè nell' iſtante che uno di eſſi s' inalza, l' altro s' abbaſſa, onde non venga alterato per tale riguardo il movimento cagionato nel cilindro *AB* dal peſo ripoſto nella lance *R*: nondimeno io dico, che da' reſultati della deſcritta ſperienza non può dedurſi legittimamente la legge, che deduſſe il noſtro Autore. Imperocchè abbia, o non abbia luogo ſiffatta legge in natura, è manifeſto, che eſſendo ſtati i peſi 1, $1\frac{1}{2}$, 2, 3, 4 atti a porre in movimento il cilindro *AB*, ciaſcuno di eſſi, e ſempre più procedendo dal primo all' ultimo, è maggiore del biſogno per l' eſatto equilibrio colle reſiſtenze di attrito incontrate da' perni *D D*; ma poichè i peſi ſuddetti ſono proporzionali alle loro maſſe o ſia quantità di materia, e ciaſcuno di eſſi ne applica un' egual porzione per l' equilibrio delle reſiſtenze accennate, i loro momenti liberi adunque non ſaranno proporzionali alle loro maſſe riſpettive, ma vie più ne' peſi maggiori avranno maggior ragione; e quindi il loro movimento, ripoſti che ſieno nella lance *R*, ſarà accelerato, e vie più accelerato paſſando dal minimo al maſſimo fra eſſi: e ſiccome il movimento del cilindro *AB* dipende da quello della lance *R*, così non v' ha difficoltà ad intenderſi, che con ſiffatta legge eſſo pure ſi muoverà intorno a' ſuoi perni. Non poſſono adunque aſſumerſi i peſi 1, $1\frac{1}{2}$, 2, 3, 4 aggravanti la detta lance *R* come equivalenti alle reſiſtenze di attrito incontrate da' perni *D D* nelle diverſe velocità, colle quali eſſi congiuntamente al cilindro *AB* ſi raggiravano intorno al proprio aſſe, ſalvo già il dovuto riguardo delle diſtanze dal comun centro di moto. Un Comentatore però della Fiſica Muſſchenbroechiana', per non incontrare forſe il da noi eſpoſto obbietto, crede poterſi aſſumere le rivoluzioni del cilindro Tribometro come equabili in sè ſteſſe, e fra di sè, atteſo il breve tempo, in cui ſi compiſcono; ma ſecondo me non è queſto un eſperimento, in cui ſieno lecite ſiffatte ſuppoſizioni; avvegnachè ſia quanto ſi voglia breve il tempo impiegato dal cilindro nelle ſue rivoluzioni, la differenza di tempo dall' una all' altra di eſſe non diventa traſcurabile in sè ſteſſa, nè può aſſolutamente conſiderarſi, neppure in ſenſo fiſico, per quantità infiniteſima. Non v' ha eſperienze in Fiſica, che ricerchino maggiore eſattezza e preciſione di quelle, nelle quali v' abbia il moto per uno de' ſuoi elementi: l' introduzione di minima forza, o circoſtanza ſtraniera al ſoggetto può apportare differenze ne' riſultati di ſomma rilevanza. L' uſo, e la pratica di eſperimentare da per me ſteſſo mi addottrinarono di tante avvertenze importantiſſime, che ſorprendere ſarebbero quelli, che lontani dal diſcendere al fatto materiale, ſi pongono in calma coll' affidarſi o alla propria immaginazione, o all' autorità degli altri. Per tentare con qualche buon ſucceſſo l' eſperimento del noſtro Autore, ſarebbe d' uopo non già d' una macchina da Gabinetto Fiſico, ma che foſſe di conſiderabile altezza onde poter oſſervare ſe dopo il movimento accelerato de' peſi aggravanti la lance *R*, ſuccede l' equabile, e poter così con certezza determinare, che nel tal grado di velocità uniforme incontrano i perni *D D* la reſiſtenza di attrito aſſegnata da' detti peſi. Senza però fermarſi d' avvantaggio ſulle difficoltà inevitabili, che porta ſeco cotale eſperimento, ſarà qui opportunamente riferito il giudizio, che lo ſteſſo Autore, nel luogo ſopraccitato, teneva de' riſultati della propria ſperienza, giudizio che certamente l' onora, e ne forma il di lui elogio, dando a divedere egli medeſimo chiaramente, ch' era ne' ſuoi ſtudj condotto dal ſolo amore della verità, e che non laſciavaſi ſedurre da quello, che pur troppo gli uomini affettano per le proprie aſſerzioni con danno e pregiudizio delle ſcienze: ed ecco com' egli ſi eſprime". In hiſce experimentis tamen mihi non plane ſatisfeci: quo tempore capiebam, fere nihil innotuerat Philoſophis de Mechanica Motus, quæ omnino hic eſt conſideranda: præterea error facile committitur in via percurſa, quando prærapida velocitate corpus movetur, tum in potentia movente, quæ vel eſt elater magni horologii tabularii, vel pondus deſcendens & volubile, ſed motum in

,, curva Tautochrona . Vix in hac ſenectute mihi vires ſu- ,, perſuturas ſperare licet , ut hæc omnia denuo ad incudem ,, revocem , potius alios Philoſophos adhortor , ut hæc , quæ ,, magni in Mechanica ſunt uſus , liment , emendentque ,, .

§. XXX. La legge, che parve al *Muſſchenbroechio* poter ſtabilire da' riſultati della ſua ſperienza ſuperiormente rapportata (§. XXVIII.) venne ſoſtenuta , ſalve certe modificazioni come vedremo , da più e più Fiſici ancora , ragionando del ſeguente tenore . *(a)* " Supponiamo, dicon eglino, che *DE*, ,, ed *FG* (*Fig. VIII.*) rappreſentino due ſuperficie di corpi ,, duri , le cui ineguaglianze inſenſibili ſieno inſerite le une ,, nelle altre ; la preſſione , che le uniſce , operi nella direzione ,, *AB* perpendicolare a quella del moto , il quale fa ,, sdrucciolare queſti due corpi l' un ſopra l' altro . Già ſi vede, ,, che il corpo, ch' è di ſopra, non può muoverſi ſecondo ,, la direzione *BC*, ſe le ſue parti più elevate *e*, *f*, *g*, *h* ,, non ſi ſviluppano dalle cavità, nelle quali ſono affondate ; ,, il che non ſi può fare, ſe non a miſura, che il corpo intero ,, *DE* ſolleveraſſi contro lo sforzo della preſſione . Se ,, queſta preſſione è tanta , che faccia ricadere coteſte parti ,, ingaggiate nelle cavità, che immediatamente ſuſſeguono a ,, quelle, che hanno laſciate; vale a dire, che la parte *e* uſcendo ,, dalla prima cavità ricada nella ſeconda , nella terza ,, ecc. è viſibile, che lo sforzo, che ſarà meſtieri di ſare ,, per ſollevare il corpo *DE*, o (il che è la ſteſſa coſa) per ,, disgiugnere, e disgomberare le parti, tante volte ſi ripeterà ,, , quante di queſte picciole elevazioni ci ſono nella ſuperficie ,, *FG* ; e quanto più procederà nel ſuo cammino in ,, un dato tempo il corpo sfregante ſopra quello , al quale ,, è applicato, tanto più avran luogo queſti ſollevamenti, e ,, queſte ricadute : così la reſiſtenza degli sfregamenti creſce ,, per la velocità, ſino a tanto che queſta velocità non impediſce, ,, che le parti alte d' una ſuperficie s' annicchino ſucceſſivamente ,, in tutte le parti baſſe dell' altra , nel modo ,, che abbiamo eſpoſto ,,. Soggiungendo inoltre gli ſteſſi Autori : " Ma può accadere , che il moto , che ſi fa ſecondo ,, la direzione *BC*, ſia sì rapido , che quando le parti ſporgenti ,, *e*, *f*, *g*, *h* ſono ſtate diſimpedite, ſieno traſcinate da

,, una

(a) *Nollet.* Fiſica Sperimentale. Tom. I.

„ una conſiderabile quantità, avanti che la preſſione le im-
„ pediſca, o ingombri di nuovo; che la parte *e*, per eſem-
„ pio, avendo laſciata la prima cavità della ſuperficie *FG*,
„ in luogo di ricadere nella ſeconda, ſia traſportata ſino al-
„ la terza, o ſino alla quarta; ed allora ſi concepiſce facilmen-
„ te, che il corpo sfregante *DE* potrà traſcorrere due, ov-
„ vero tre volte altrettanto di ſuperficie ſopra *FG*, ſenza che
„ le ſue parti vi ſieno più frequentemente intricate „. E quanto alla prima parte di tale diſcorſo convengo io pure, che quanto maggiore ſarà lo ſpazio percorſo dal ſolido sfregante in un dato tempo, tanto maggiore ſarà il numero degli oſtacoli da eſſo incontrati, e conſeguentemente degli sforzi, che contro il proprio peſo avrà eſercitato per ſormontarli (parlando già di un corpo, che ſi muova ſopra un piano orizzontale, nel qual caſo la preſſione è lo ſteſſo peſo del corpo sfregante); ma non ſo poi comprendere come da queſta conſiderazione poſſa inferirſi la legge, che la reſiſtenza di attrito incontrata da' corpi in movimento creſca col creſcere la velocità in eſſi: imperocchè è vero, che lo ſteſſo corpo percorrerà in un dato tempo maggiore ſpazio, ſecondo che ſarà dotato di un maggior grado di velocità, e che però la ſomma degli oſtacoli ſormontati ſarà eziandio maggiore nella velocità maggiore, ma non perciò può ſtabilirſi la mentovata legge, avvegnachè biſognerebbe dimoſtrare per la di lei ſuſſiſtenza, che il corpo sfregante incontraſſe maggior reſiſtenza nel ſuperare d' iſtante in iſtante gli oſtacoli che incontra, di quella che incontrerebbe pure d' iſtante in iſtante procedendo eſſo con velocità minore. Dimoſtrata ripugnante, e di niun valore la prima parte del riferito ragionamento, cade pure da per sè la ſeconda parte di eſſo: nulladimeno non paſſeremo ſotto ſilenzio una rifleſſione, che ſola può baſtare a farci anche di queſta conoſcere evidentemente la fallacia. E' principio incontraſtabile, che un corpo s' aggrava contro il piano che lo ſoſtiene con quell' intero sforzo, o preſſione, che eſercita come nello ſtato di quiete, così anche in quello di moto, qualunque ſia il grado di velocità, con cui proceda: coſicchè, prendendo il caſo del piano orizzontale, il ſolido sfregante preme ugualmente contro il piano ſoggetto con tutto il ſuo peſo, ſia egli in quiete, oppure in

movimento, sì tardo, che veloce quanto mai; colla ſola differenza, che ſe in iſtato di quiete continua a perpetuamente premere il piano ſoggetto in quello ſteſſo luogo, in cui ſi trova collocato, in iſtato di moto la preſſione medeſima eſercitaſi ſucceſſivamente per tutti i luoghi, per li quali va paſſando nello ſcorrere per lo piano ſoggetto. Che ſe così è la coſa, non è ella forſe un'idea chimerica il concepire, che poſſa muoverſi con tal velocità il corpo sfregante, sì che le ſcabroſità ſciolte una volta, ſoſtenganſi diſimpegnate per un conſiderabile ſpazio, prima che s' avviluppino nuovamente? Imperciocchè ſe l'inneſtamento delle ſcabroſità del corpo sfregante in quelle della ſuperficie, per cui traſcorre, naſce dalla preſſione, con cui contro di eſſa ſi aggrava; ne ſegue pel principio mentovato, che qualunque ſia la velocità del corpo sfregante, ſuccederanno uno dopo l' altro, e ſenza interruzione nuovi inneſtamenti ai primi ſviluppi delle dette ſcabroſità, e quindi la reſiſtenza incontrata da eſſo corpo, conſiderata in ciaſcun punto dello ſpazio che percorre, ſarà ſempre la medeſima, e indipendente affatto dal maggiore, o minor grado di velocità, di cui foſſe affetto. Il vedere che oltre alle eſpoſte ſentenze ed opinioni tenute da' Fiſici ſulla reſiſtenza degli attriti de' ſolidi in movimento, ve n' ebbe anche qualcuno, il quale allontanandoſi dall'opinion più univerſale, miſe in campo, che la predetta reſiſtenza doveſſe ſeguire non già la ſemplice, ma la duplicata ragione della velocità, di cui è dotato il ſolido sfregante, mi fece entrare in ſoſpetto, che da tali Autori conſiderata foſſe la reſiſtenza degli attriti de' ſolidi di natura analoga a quella, che i medeſimi ſolidi incontrano nello ſcorrere per entro i mezzi come l'aria, l'acqua ecc., e che quindi laſciandoſi per dir così da una prevenzione traſportare, ragioni cercarono, ed argomenti, onde comprovare, che la prima delle accennate reſiſtenze, a ſimiglianza della ſeconda, ſeguir doveſſe una qualche ragione della velocità, ſecondo cui è moſſo il corpo sfregante: ma quanto la coſa proceda diverſamente lo faremo ora conſiderare. Qualora un ſolido ſi muove in un mezzo fluido ne caccia le molecule, che d' innanzi gli ſtanno, comunicando ad eſſe un movimento, il quale paſſa, e ſi diffonde a grado a grado per la maſſa fluida, venendo nello ſteſſo iſtante riempiuto dallo ſteſſo fluido il vuoto, che il corpo dietro sè laſcia ſeguendo il ſuo cammino; ma per li principj dinamici, il ſolido urtante nel comunicare movimento al fluido ambiente dee perderne del ſuo proprio, e perderne maggior quantità, ſe maggiore ſarà la maſſa fluida, in uno ſteſſo tempo, poſta in movimento. Chiaro adunque appariſce, che quella, che noi diciamo reſiſtenza di mezzo, propriamente conſiſte nella quantità di moto, che il ſolido dentro di eſſo ſcorrendo comunica, e trasfonde con perdita, e conſumo del proprio; e che ſiccome movendoſi il ſolido con maggior velocità maggiore quantità di fluido dee mettere in movimento nello ſteſſo tempo, così tale reſiſtenza dee dipendere ed aver per norma eſſenziale, in parità di circoſtanze, la velocità di cui è fornito il ſolido, derivandone poi la legge dalla fluidità, dalla denſità, dall' elaſticità, ed in una parola dalla natura ſteſſa del fluido ambiente. Che ſe per un altro canto ſi muova l' enunziato ſolido ſopra un piano orizzontale, facendo aſtrazione da qualunque mezzo ambiente, ſappiamo che in tal caſo non può egli procedere pel ſuo cammino, ſe di mano in mano non ſi ſviluppino, e diſinneſtino le di lui ſcabroſità da quelle della ſuperficie, ſopra cui ſi muove; il che ſuccede eſercitando il ſolido uno sforzo contro il proprio peſo, al quale sforzo appunto noi applichiamo il nome di reſiſtenza di attrito. Ora manifeſtamente ſi conoſce l' indole ben diverſa tra la reſiſtenza de' mezzi, e quella degli attriti, mentre la prima deriva da una comunicazione di moto, che il ſolido in movimento trasfonde nel fluido ambiente, e la ſeconda da uno sforzo, che il ſolido sfregante eſercita contro il ſuo peſo; e ſi arguiſce inoltre dalla ſvolta natura di tali reſiſtenze, che ſiccome la prima dee neceſſariamente procedere ſecondo una qualche legge della velocità impreſſa al ſolido in movimento; così la ſeconda ne va affatto eſente, e perciò non ha eſſa a variare di valore per conto della velocità con cui ſi trasferiſce il ſolido sfregante. Ma qui cade finalmente in acconcio di far vedere come la legge da noi ſtabilita per la reſiſtenza degli attriti de' ſolidi in movimento (Art. III. §. XXVII.), e dedotta dall' eſperienza, ſi confermi anche con un ragionamento, che ci ſembra quanto può deſiderarſi fortemente appoggiato alla natura del ſoggetto medeſimo. Egli è un fatto innegabile, che un ſolido ſimile a queſli, che abbiamo uſati nelle noſtre ſperienze, eſercita coſtantemente lo ſteſſo sforzo, e renitenza a diſporſi in iſtato di equilibrio meccanico ſopra una tavola orizzontale di uniforme ſcabroſità, cioè ridotta ad un egual grado di ſorbitezza al giudizio de' ſenſi, venga egli riposto in qual luogo più piaccia ſu d' una medeſima direzione, a quella guiſa che lo ſteſſo ſolido non laſcierebbe di premere con tutto il ſuo peſo ſopra un piano orizzontale, che ſi muoveſſe pure per linea verticale o in ſu, o in giù verſo il centro de' gravi. Poſto ciò ne conſegue immediatamente, e con evidenza matematica, che il predetto ſolido, movendoſi ſulla tavola orizzontale, abbia ad avere ſucceſſivamente per forza ritardatrice quello ſteſſo sforzo, che eſercita per diſporſi in iſtato di equilibrio meccanico in ciaſcun luogo della direzione, ſecondo cui ſi trasferiſce; naſcendo quindi la legge, che la reſiſtenza degli attriti de' ſolidi in movimento ſia quella medeſima, ch' eſſi incontrano pel loro equilibrio meccanico ſopra quella ſuperficie, per cui ſcorrono, ma operante contro il loro movimento in via di coſtante forza ritardatrice, come abbiamo concluſo dall' eſperienza.

§. XXXI. Dalle coſe eſpoſte nel preſente Articolo ſi rileva in quanta oſcurità, e confuſione ſi trovava avvolto il ſoggetto, così importante nella ſcienza del moto concreto de' corpi, e generalmente in tutta la Fiſica, che abbiamo ora noi tentato di ponere in chiaro lume coll' appoggio non ſolo dell' eſperienza, ma eziandio di ragionamenti ſeveri a quel grado, che può permettere la natura del ſoggetto medeſimo. E per dire il vero ſtabilendo alcuni, che la reſiſtenza degli attriti de' ſolidi in movimento ſeguitaſſe ne' peſi minori la ragione della velocità, e ne' peſi maggiori creſceſſe alquanto ſopra tale ragione; volendo altri, che la detta reſiſtenza doveſſe procedere in ragione delle velocità ne' movimenti mediocri, dovendoſi poi diminuire nelle grandi velocità; e finalmente altri pretendendo che ſiffatta reſiſtenza ſeguir doveſſe la duplicata ragione della velocità del corpo sfregante; dovea tanta, e così varia diſcrepanza di leggi tenerci in diffidenza, e farci anche ſoſpettare, che il ſoggetto non veniſſe preſo, e conſiderato nella ſua propria, e naturale coſtituzione ; il che appunto venne dimoſtrato dalle noſtre indagini , mentre la nuova legge , che abbiamo ſcoperta, non ha affinità , nè analogia alcuna colle già enunziate . Io mi rimetto però ben volentieri al giudizio de' dotti per que' progreſſi, ch'io mi luſingo di aver fatto ſu tale argomento, eſſendo intimamente perſuaſo della difficoltà ſomma di ſtabilire con certezza una legge , un canone , nella Fiſica de' corpi. Ragionano poi con molta leggerezza coloro, i quali ſi sforzano di dar ad intendere, che atteſa la varietà della teſſitura ſuperficiale de' ſolidi, e la moltiplicità degli accidenti, che poſſono concorrere in fatto, di poca utilità , ed anche , come eſſi dicono, di veruna certezza ſieno le leggi, che ſi cercano di ſtabilire ſulla materia, che abbiamo per le mani, o in altre materie analoghe nella Fiſica de' corpi . Se in tal guiſa ragionaſſe il volgo ſoltanto , non vi ſarebbe niente a meravigliarſi; ma il male ſi è , che uomini inſigni per ogni riguardo ſi ſieno così eſpreſſi pubblicamente nelle opere loro, che non crediamo neceſſario di qui citare; e niente meno m' è accaduto di ſentire dalla viva voce di alcuni , forniti per altro di dottrina , e di ſapere , co' quali ho avuta occaſione di parlare più e più volte ſul propoſito. Rivolgendo pertanto il penſiero ſul noſtro argomento, io ragiono così. Sia pure quanto ſi voglia varia la teſſitura ſuperficiale de' ſolidi, ciò non dee recare imbarazzo al Fiſico ſperimentatore d' indagare la legge delle reſiſtenze degli attriti, qualora ha egli l' avvertenza di ſperimentare coſtantemente colla ſteſſa maniera di ſolidi ridotti per quanto può apparire a' ſenſi in parità di circoſtanze, nè può egli, così operando , in veruna maniera dubitare , che la legge manifeſtatagli dalla ſerie de' riſultati, che avrà ottenuto , non ſia deſſa preciſamente quella, che a ſiffatta natura di reſiſtenze appartenga . Siccome poi le teſſiture ſuperficiali de' ſolidi , oltre di eſſere varie per la diverſa natura loro, lo poſſono eſſere anche in riguardo ad una maggiore, o minor forbitezza; così la legge dedotta dee riguardarſi come una legge aſtratta, la qual facilmente può nullameno condurſi al concreto, mediante un particolare eſperimento ſul ſolido, intorno a cui debba accaderne l' applicazione, ricercando, che così eſattamente ſi dee chiamare, il termine di paragone: in ſomma inveſtigata la legge, come s' è ſpiegato, pel di lei uſo, non occorre che conoſcere in un dato caſo la quantità aſſoluta della reſiſtenza di attrito, di cui è capace la qualità, e coſtituzione ſuperficiale di que' ſolidi, ſopra i quali verſar ſi doveſſe. E quanto all' eſattezza e preciſione dei riſultati, che poſſiamo ſperare nell' applicazione di tali leggi, non v' ha dubbio primieramente, che quanto più diligenza ed attenzione verrà preſtata da chi le maneggia, potrà anche aver egli la compiacenza di vedere vie più verificati nella pratica eſecuzione delle proprie idee quegli effetti, che gli verranno antecedentemente indicati, e promeſſi dal calcolo; dico poi in ſecondo luogo, che moſtrerebbero del pari poca conoſcenza della Fiſica de' corpi, tanto chi prendeſſe l' aſſunto di ſtabilire regole, e canoni tali, che ſomminiſtrar doveſſero nell' applicazione pratica riſultati di preciſione matematica, quanto chi diſperando un tal eſito giudicaſſe perciò di poca utilità quelle leggi e regole, che atte foſſero a indicare riſultati proſſimi al vero, come poſſiamo luſingarci di ottenere nel preſente fiſico argomento. Ed in fatti non è da ſupporſi nemmeno, che ſiavi alcuno, il quale abbia a contare coſa di lieve importanza il poter prevedere, che, a cagion d' eſempio, un ſolido projetto ſopra un piano orizzontale con un dato grado di velocità, perderà egli il ſuo movimento, e ridurraſſi alla quiete dopo aver percorſo un tale determinato ſpazio, benchè paſſando al fatto, ciò ſuccedeſſe con qualche differenza o in più, o in meno, mentre per la legge aſtratta l' enunciato ſolido dovrebbe procedere, poſto il piano in tutti i ſuoi punti egualmente diſtante dal centro de' gravi, col grado di velocità impreſſogli di moto uniforme all' infinito.

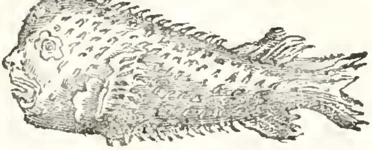


Fig I

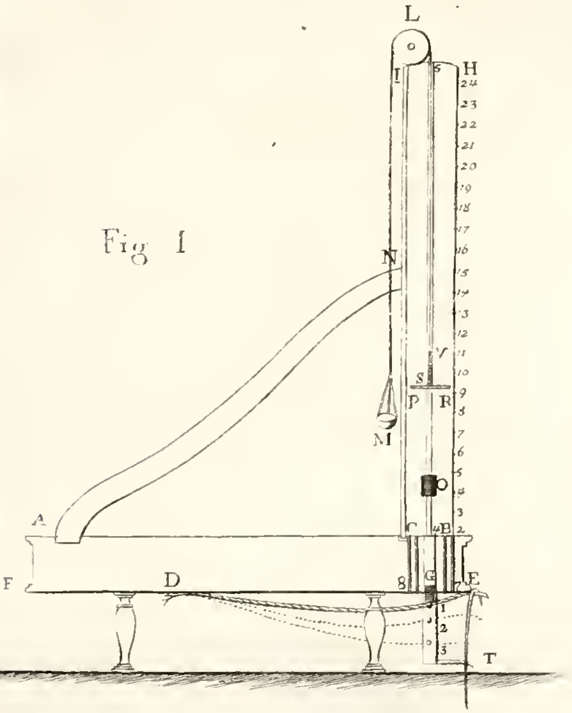
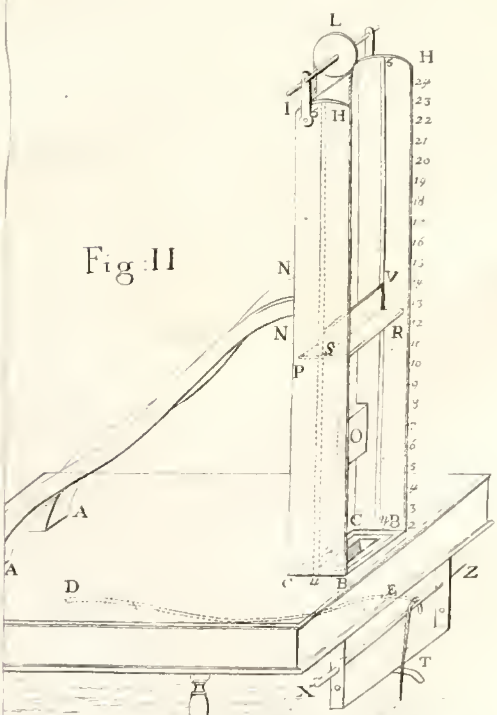

L
I
5
H
24
23
22
21
20
19
18
17
16
N
15
14
13
12
V
11
10
S
P
R
9
8
M
7
6
5
O
4
3
A
C
4
B
2
F
D
8
G
E
1
2
3
T

Fig:II


L
H
I
5
H
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
N
V
14
13
N
R
12
S
11
P
10
9
O
8
7
6
5
4
A
3
C
4B
2
A
C
4
B
D
E
Z
T
X

d
az
ee co
tuttor
per ch
ſterità
maturc

Fig. I

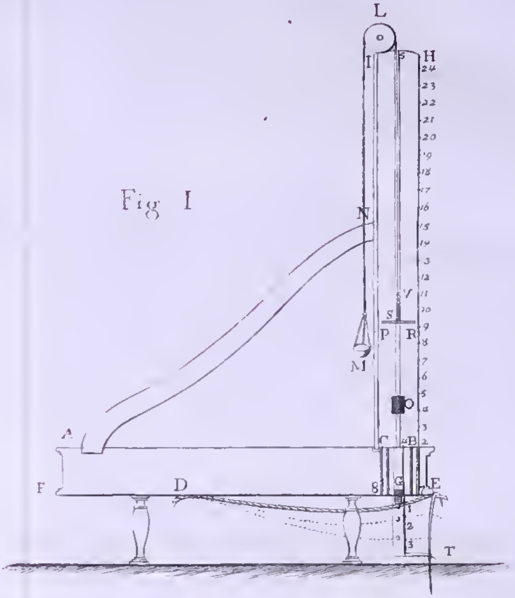
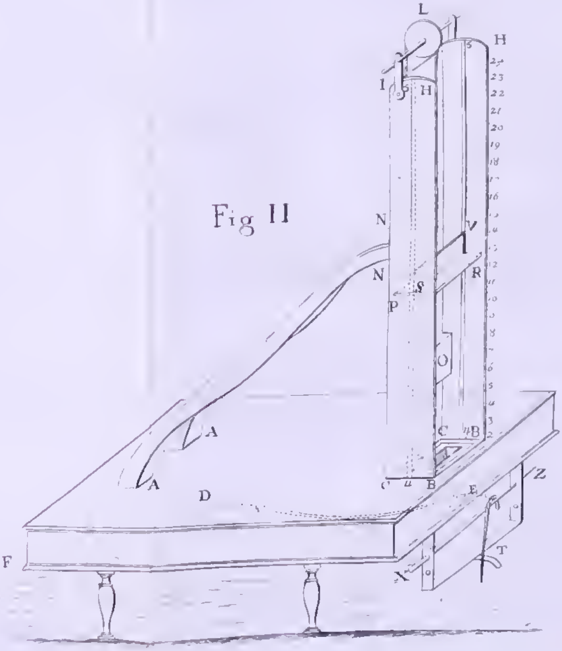

L
I
H
N
V
S
P
R
M
A
C
4B
F
D
G
E
T

Fig. II


L
I
H
H
24
23
22
21
20
19
18
16
N
V
N
R
S
P
O
A
A
C
4B
D
u
B
E
Z
T
X
F

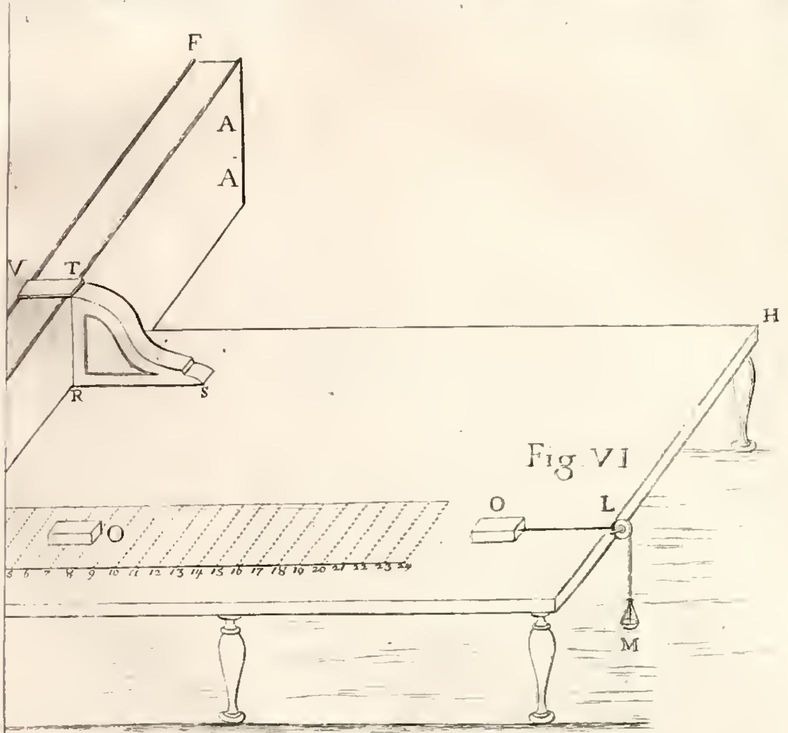
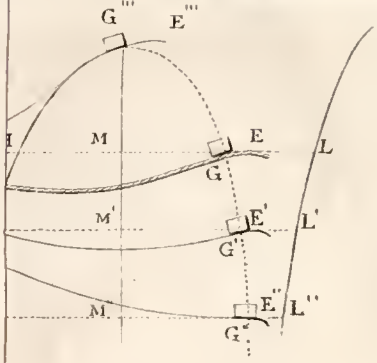


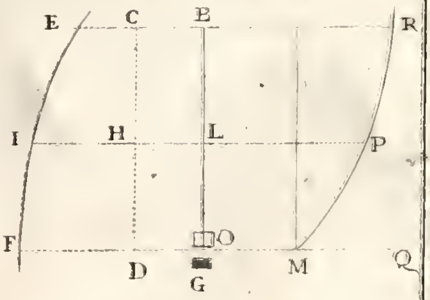
Fig. VI

F
A
A
V
T
R
S
H
O
O
L
M
5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24



G'''
E'''
I
M
E
G
L
M'
E'
G'
L'
M
E''
L''
G''

Fig. V



E
C
B
R
I
H
L
P
F
D
O
G
M
Q

g: VII

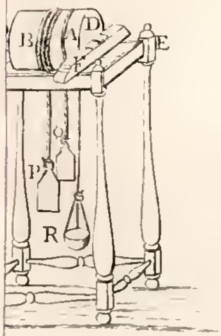
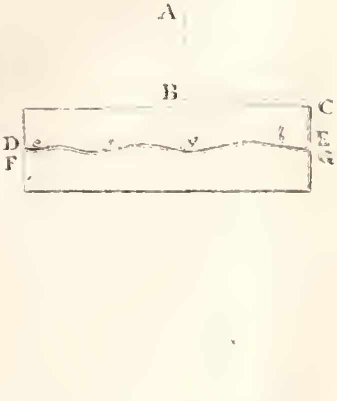


Fig. VIII



A
B
C
D
E
F
G
e
f
g
h

a
. az
ee co
tuttor
per ch
ſterità
maturo

Fig. III

Fig. VI

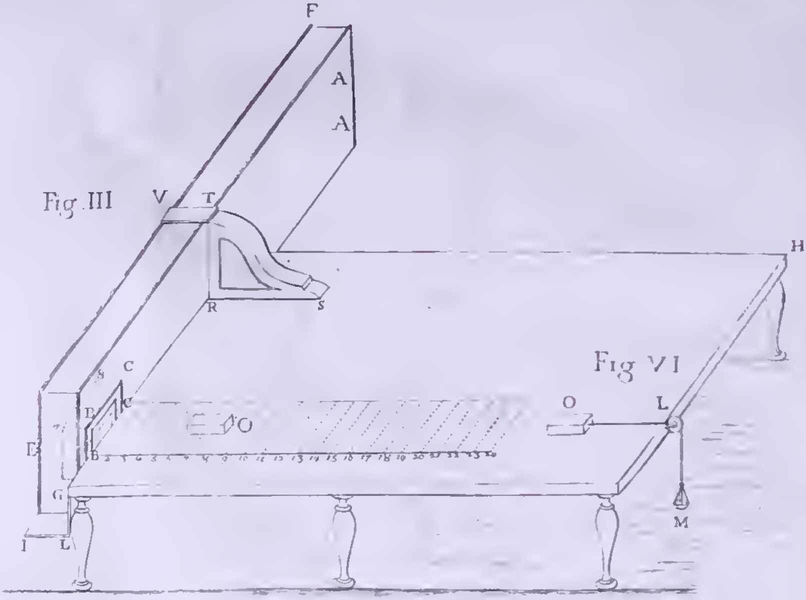

F
A
A
V
T
R
S
H
S
C
E
D
O
B
G
I
L
O
L
M

Fig. IV

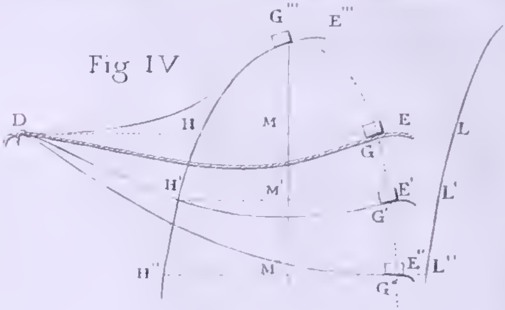

G'''
E'''
D
H
M
E
G
L
H'
M'
E'
G'
L'
H''
M''
E''
L''
G''

Fig. V

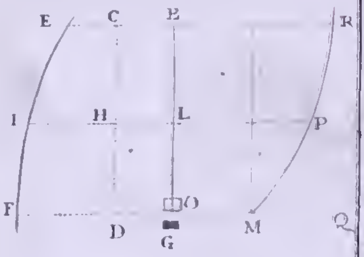

E
C
B
R
I
H
L
P
F
D
O
G
M
Q

Fig. VII

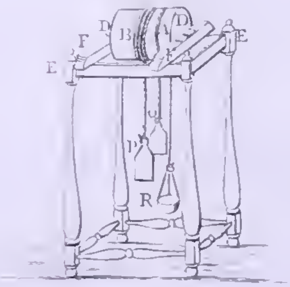
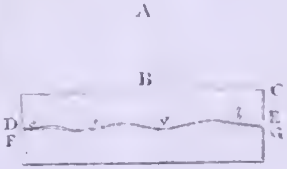

D
B
A
D
F
E
E
Q
P
R

Fig. VIII



RICERCHE

INTORNO ALL' ORIGINE DEL NATRO O ALCALI MARINO NATIVO.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

TRa le cauſe, che concorrono più in un tempo che in un altro ad accelerare o ritardare l'avanzamento delle ſcienze, e dell' arti, non è l' ultima per avventura il coſtume dominante del ſecolo. La tendenza naturale degli uomini a imitarſi ſcambievolmente tien vivo un certo ſecreto dilicatiſſimo conſenſo, per cui la ſcuola del maggior numero diventa a poco a poco la ſcuola di tutti, ove ciaſcun ſi modella ſenza avvederſene, e va impercettibilmente uniformandoſi all' eſempio, all' opinione, all' autorità de' ſuoi tempi. Quindi il languore negli ſtudj in un ſecolo guerreſco, il fervore in un altro dedito alle lettere, il variar perpetuo delle umane ſollecitudini al variar ſucceſſivo delle iſtituzioni, e conſuetudini predominanti. Qual meraviglia pertanto ſe innumerabili oggetti non men utili, che dilettevoli ſieno rimaſti ſino a' dì noſtri inoſſervati, ſe ne' paſſati tempi non abbiano fatto le umane cognizioni progreſſi pari a' noſtri sì rapidamente, ſe oggidì pulluli novità da ogni canto? Chi non ravviſa in ciò l' opera, la ſcuola del ſecolo dedito all' eſperimentare, al far oſſervazione e cimento ſu tutto? E' vero, che in tutto ciò ch' è fatto non è dileguata ogn' incertezza, che moltiſſime verità ſon tuttavia iſolate e ſconneſſe, che un gran numero d' illazioni non ha baſtevole fondamento, che moltiſſime oſſervazioni ſembrano in oppoſizione tra di sè. Ma non altro dee conchiuderſi da queſto, ſe non che reſta molto e molto tuttora da farſi. Un edificio non è comunemente deſtinato per chi non ſa che adunar materiali per fabbricarlo. La poſterità e ben tarda corrà il frutto delle noſtre cure, oggi immaturo, e a' viventi baſti intanto il dolce preſentimento de' plauſi che verran fatti un dì a' nomi ſuperſtiti degli uomini benefattori. Non è però ſenza eſempio nel ſecolo l' eſſerſi fatte or in una or in altra parte della Fiſica oſſervazioni capitali e feconde, onde abbiamo prevenuto i poſteri nel trarne ampliſſimi vantaggi con rapida e felice anticipazione. Me fortunato ſe quelle che ſto qui per eſporre ſieno di queſta claſſe, e vagliano a ſparger luce ſu moltiſſimi oggetti della Terra che abitiamo involti ancora in una denſiſſima caligine.

Nozioni generali intorno al Natro, o Alcali-baſe del Sal marino.

I.

Natro, fatta noſtrale la voce greca νάτρον, è quell' alcali fiſſo baſe del ſal marino, altramente detto alcali minerale ed anche muriatico, che ſi trae per liſciva dalle ceneri ſemifuſe e ſodate delle piante marittime, e per ciò prende il nome di ſal di Soda. Gli uſi importantiſſimi, a cui queſto ſale ſuppliſce a' dì noſtri, l' hanno fatto oggetto di momento non lieve, e argomento di ſeria indagine pe' Fiſici da gran tempo. Gli antichi il conoſcevano al par di noi, ma non ne avevano idee tanto diſtinte, come noi abbiamo, per non confonderlo e col nitro, e coll' alcali vegetale, che ſi ricava dalle ceneri delle piante terreſtri. Il biſogno dell' arti non rendeva per avventura più l' uno che l' altro di queſti ſali, come oggidì, neceſſario e prezioſo ſeparatamente. Sapevano per altro render cauſtico il natro con la calce, *adulteratur in Ægypto calce. Deprehenditur guſtu; ſincerum enim facile reſolvitur, adulteratum pungit* (Plin. nel Cap. X. del Lib. XXXI.). Conoſcevano l' azione di queſt' alcali ſu la cera, *Cera punica fit hoc modo: ventilatur ſub dio ſæpius cera fulva: deinde fervet in aqua marina ex alto petita*, *addito nitro* ecc. (Plin. Lib. XXI. Cap. XIV.). Sopra di che in un Opuſcolo ſtampato poco avanti in Verona ho oſſervato per avventura il primo, che queſta cera privilegiata per la pittura, e per la medicina, come la decanta *Plinio*, non poteva eſſere una cera puramente imbiancata, che non avrebbe potuto nè farſi arrendevole

rendevole meſcolata co' colori per dipingere, nè oltre le prime vie penetrare, ed inſinuarſi nel corpo umano. E che però eſſendo da *Plinio* ſempre indifferentemente detto nitro anche il natro, dimoſtrato tale da' ſuoi evidentiſſimi caratteri, ben diſtinti da quelli del nitro propriamente detto, il caſo era queſto più ch' altri mai in cui andava inteſo per un natro, per un vero alcali marino, il nitro adoperato nella compoſizione della cera punica. Quindi la cera punica diveniva neceſſariamente un ſapone di cera agli uſi della pittura, e della medicina adattiſſimo, come le mie ſperienze prime, e le altrui fatte ſucceſſivamente il comprovano, ſenza che qui ne faccia parola ulteriormente. Ma non ignoravano nè pure la compoſizione de' ſaponi direttamente combinando un alcali con qualche ſoſtanza oleoſa concreta *prodeſt & ſapo; Gallorum hoc inventum eſt rutilandis capillis. Fit ex ſebo & cinere. Optimus fagino & caprino; duobus modis ſpiſſus & liquidus* (Plin. Lib. XXVIII. Cap. XII.).

II.

Fioriva abbondantemente ſpontaneo il natro ne' contorni de' laghi del baſſo Egitto, nella Nubbia, nelle pianure della Perſia, nell' India, nel Tranquebar, nella Siria, nell' Aſſiria, e in moltiſſime parti dell' Aſia minore, ed ora il trovavano gli antichi libero, or meſcolato col ſal marino. Se ne raccoglie pur oggidì in quelle regioni, e nelle vicinanze di Tripoli, come pure in Efeſo, e a Smirne. Ve n'ha nell' Ungheria, nella Siberia, intorno al mar Caſpio, e in moltiſſime altre parti dell' Impero Ruſſo. E non laſcia pure di manifeſtarſi tuttodì qua e là per l' Europa or involto in ſoſtanze vulcaniche, or in effloreſcenza ſu materie calcaree, e per ſin nell' acque minerali ſe ne trova diſciolto non di rado. Non ſaprei però dire ſe oltre allo ſpontaneo e nativo conoſceſſero diſtintamente gli antichi quello che or ricaviamo dalle ceneri delle piante marittime familiarmente. Per verità fa menzione *Plinio* nel Cap. X. del Lib. XXXI. del ſale, che ſi trae dalla combuſtione della quercia. Ma non è poi queſto, che un alcali vegetale, come il mentovato qui ſopra pe' ſaponi inventati da' Galli. Per la qual coſa la combuſtione delle piante marittime ſegnatamente per trarne il natro libero ſembra eſſere lavoro de' noſtri dì al più confuſamente dagli antichi conoſciuto. Non avevano però alcun lume, che il ſal marino, ſale prezioſo, e forſe più d' ogni altro benefico, di cui la terra e il mare abbondano ſenza miſura, aveſſe per baſe il natro combinato intimamente e compiutamente con un acido particolare; ed erano molto meno in grado di ſapere, che poteſſe e queſt' unione romperſi, e, decompoſto il ſal comune, otteнerſi il natro libero per queſta via.

III.

Ma un alcali sì copioſamente diffuſo ne' regni di natura e libero, e combinato, onde mai può trarre origine e principio? E' d' uopo credere, che l' alto ſilenzio di tutti i Fiſici ſu queſto argomento non d' altronde ſia provenuto, che dal non eſſerſi giammai maniſeſtata loro da vicino la generazione di queſto ſale, perchè aveſſero campo di corre ſul fatto, per così dire, il ſegreto operare della natura. V' ebbe chi ſoſpettò, che apparteneſſe in origine al regno vegetabile; ma il fatto e l' eſperienza, come il vedremo nel decorſo di queſta Memoria, hanno da molto tempo convinto i Fiſici, che queſt' alcali è totalmente ſtraniero alle piante da cui il ricaviamo per combuſtione, non mai eſſenziale di loro, ſiccom' è il vegetale. Per la qual coſa intorno all' origine di lui non ſiamo punto avanzati in cognizione più degli antichi, eſſendo ella a' tempi noſtri niente men oſcura di quel che ſia ſtata in tutti i ſecoli paſſati. Ed ecco donde ſiamo per muovere con le ricerche preſenti. Sciolto un nodo capitale nella Fiſica, tutte ſi ſvincolano le fila che vi mettevano capo d' ogn' intorno. Scoperta la ſede nativa del natro, ſi fa paleſe a un tempo e l' aver ivi pur ſede la magneſia, e il differire l' un dall' altra più nello ſtato ſalino, che nella ſoſtanza elementare. Queſte prime cognizioni ad altre fanno ſtrada e lume ſucceſſivamente sì intorno al trovarſi comunemente accoppiata all' alcali marino la magneſia, che all' eſſere coſtantemente l' uno e l' altra con uno ſteſſo acido in combinazione ne' ſali marini, e all' annidarſi di loro nelle piante marittime, e al maniſeſtarſi ne' letti abbandonati dal mare in tante parti della terra. E più addentro internandoſi molte oſcurità prendono in oltre a ſchiararſi intorno alla coſtituzione del mare. La formazione e congerie di tanto ſale marino nel mare e ſotterra non è più sì miſteriosa, riconoſciuto che ſia ove hanno ſede i principj proſſimi di lui. Così della ſalſedine può dirſi del mare, che a quel ſale, e alla di lui produzione e riproduzione ſi attiene radicalmente. Ma non laſcia di tralucere a un tempo l' intima cauſa del fosforeggiamento del mare, e di farſi chiara la ragione d' altri fenomeni moltiſſimi tra via. Ma venghiamo al fatto.

Del Natro nativo.

IV.

Accade ſovente, che gli uomini s' aggirino lungo tempo intorno ad un oggetto, ſenza che lor venga fatto di conoſcerlo a fondo, ſinchè non iſquarcia il velo un' oſſervazione fortunata, e per lo più accidentale. Così vedremo per appunto eſſere in queſto caſo intravenuto, di che non è inutile il far parola, affinchè la parte che v' ebbe l' accidente non vada con quella indiſtintamente confuſa, che alla rifleſſione dee attribuirſi.

Nel paſſare dinanzi ad un ſotterraneo delle Fortificazioni di Verona nel 1782 oſſervai ne' fianchi della volta sì carico di fioritura ſalina un mattone, che mi preſe voglia di raccorne, ſiccome feci ſul fatto. Ne preſi un poco ſulla lingua, e mi ſorpreſe il ſentirvi oltre alla freſchezza una particolare acredine, ed un ritorno sì diſguſtoſamente urinoſo, che ne liberai la lingua preſtamente. Parvemi di riconoſcervi tutti i caratteri di un alcali ben puro diſtintamente. In fatti cimentatolo alla mia abitazione ſu le brace ardenti replicatamente non fece che gonfiarſi e bollire; e diſcioltane un' altra porzione nell' acqua, filtrata la diſſoluzione, e fattala ſvaporare a ſecchezza, verſai ſul ſale poche ſtille d' acqua per la criſtallizzazione. Queſto ſale criſtallizzato ſugli orli del piattello pareva ſquamoſo, ma nel mezzo affettavano i criſtalli una figura al ſenſo priſmatica quadrangolare, e di acquea traſparenza. Laſciatolo all' aria preſe tutto a ſcolorarſi, e i criſtalli divennero bianchi come neve, ſpugnoſi, e leggeri, e finalmente ſi convertirono in finiſſima farina. Su d'un' altra porzione verſai un po d'aceto diſtillato, con cui ſece viva effervefcenza, e ſi criſtallizzò poſcia perſettamente. Ma ſu queſto ſale acetoſo torneremo qui appreſſo. Conchiuſi pertanto da queſti ſaggi, che aveva in potere un ſal alcali, cui le prime apparenze denunziavano per l' alcali ſiſſo minerale al ſapore, alla figura de' criſtalli, allo sfarinarſi, perduta l' acqua di criſtallizzazione, e che dando preſa all' acido vegetale, non pareva con altro acido combinato fuorchè coll' aereo, come l' effervefcenza il manifeſtava. Ecco quello che ad un' accidentale oſſervazione è dovuto.

V.

Da quel momento non ho più perduto d' occhio nè quel ſotterraneo, nè altri di quelle Fortificazioni. Trovava qualche volta di queſte fioriture, che contenevano meſcolato del nitro. Ma vedeva vicina la cauſa di quella nitrificazione negli eſcrementi animali, che giacevano a piè de' muri, da' quali eſaltandoſi nella putrefazione le emanazioni volatili, il gaz della putrefazione, ſe così vuol dirſi, egli ſi elaborava nelle calci dell' incamiciatura generando un nitro. Ed è coſa da notarſi, che il più di queſto nitro aveva una figura romboidale, e per baſe l' alcali predominante in quelle fioriture. Prima pertanto d' inoltrarmi in ricerche volli accertarmi dell' indole di queſt' alcali, e conoſcerla perfettamente. Nel caſtello di S. Felice particolarmente il trovai abbondantiſſimo in un ſotterraneo, ove era meſtieri introdurſi col lume, freddo ed umido, e il raccoglieva puriſſimo ammonticchiato a piè de' muri, che ſoſtenevano la volta, a guiſa di neve bianchiſſima accollata. Queſte ſono le ſperienze, che ne ho fatto, meſſi da parte i cimenti di pura indicazione per mezzo de' noti reattivi.

I. Ho precipitato con queſto ſale e la terra dell' allume, e il metallo di molti ſali metallici.

II. Decantato il liquore dietro alla precipitazione della terra alluminoſa, il filtrai, e concentratolo a dolce foco l' abbandonai alla criſtallizzazione. N' ebbi un ſale in priſmi allungati e ſtriati, traſparente, amaro, che sfarinava prontamente perdendo l' acqua, e cui non ebbi difficoltà di riconoſcere per un deciſo ſale di Glauber.

III. Ma ottenni lo ſteſſo ſal mirabile dall' immediata combinazione dell' acido vitriuolico libero con queſt' alcali. Il combinai poſcia cogli acidi marino e nitroſo, ed ho conſeguito un perſetto ſal marino, ed un nitro quadrangolare, il quale fulminava con attività e vivezza.

IV. Meſcolato queſt' alcali con rena, e in un crogiuolo chiuſo ſottopoſto il meſcuglio per quattro ore ad un foco viviſſimo, ſi fuſe e vetrificò, e reſtonne intaccato il crogiuolo medeſimo d' ogn' intorno.

V. Con olio di uliva ne composi un ottimo ſapone. E come ne aveva in abbondanza, e poteva raccoglierne a talento, così ho più volte ripetuto queſte ſperienze, ed altre molte che non rimembro. Per la qual coſa non ebbi più alcun dubbio, che non foſſe queſto il vero natro, l' alcali-baſe del ſal marino. Ed è ben notabile coſa che non v' abbia mai ravviſato indizio di ſal marino meſcolato, nè d' altro ſale ſtraniero.

VI.

Donde mai queſt' alcali sì puro? Come in diſtanza diretta di ben ſeſſanta miglia dal mare ſu d' una collina, ove il mercurio nel Barometro ſi tiene quattro linee più alto, che non fa ſu la coſta del mare Adriatico, può egli annidarſi in tanta copia? E' agevole da crederſi, che una viva curioſità e voglia mi ſi eccitaſſe nell' animo d' inoltrare le mie ricerche, quanto mai poteva eſſermi conceduto di fare. L' averlo continuamente ſotto gli occhi, il vederlo ſotto gli occhi riprodurſi, tutto denunziava, che la cauſa di un effetto sì familiare e foſſe proſſima, e poteſſe diſcuoprirſi indubitatamente oſſervata da vicino. Preſi pertanto ad eſaminare la natura del ſuolo ſu cui la Fortezza è piantata, il materiale onde ſono coſtrutte le mura, e l' indole del terrapieno poſto in groppa de' ſotterranei. Trovai primamente argilloſo il colle, di argilla per altro impura, e ſparſo di ſpoglie e tritumi d' animali marini; di quella terra e tritumi formato il terrapieno;

l' oſſatura della collina di pietra tenera tuſacea di color giallaſtro, impaſtata di marine conchiglie; e con queſto tufo coſtrutte finalmente le volte e le mura ſteſſe de' ſotterranei in gran parte. Non mi ſorpreſe altramente il ravviſar quivi pure, come in tante altre parti della terra ſi riconoſcono tuttodì, ſpoglie patentiſſime di animali marini, ma m' induſſe ben toſto a ſoſpettare che non foſſe già nativo di quel luogo il natro, ma annidatovi e ſopravvenuto con le produzioni marine, che vi ſi trovavano in tanta abbondanza. E s' inoltrò il ſoſpetto ſino a farmi penſare, che tutta la parte calcarea del colle, e quella che l' effervefcenza cogli acidi moſtrava contenerſi sì nell' argilla che in tutte quelle concrezioni tufacee, non d' altronde veniſſe, che da' disfacimenti evidentiſſimi de' croſtacei, onde s' offerivano gli avanzi, e le ſpoglie d' ogn' intorno, in qualunque tempo e per qualunque rivoluzione ſi foſſero ivi ammaſſati, che non è mio ſcopo l' indagare, e può ben eſſerlo meritamente e con frutto di qualche diligente Naturaliſta.

VII.

M' avviſai dunque di fare oſſervazioni accuratiſſime ſul terreno, ſu le conchiglie, e ſu' tufi ſeparatamente. Dal terreno lavato e rilavato non mi riuſcì di trar lumi deciſivi, non avendovi trovato che qualche poco di natro diſſeminato, onde reſtava ſempre a dimandarſi donde traeſſe l' origine. Ne trovai pure nelle conchiglie polverizzate, e più nelle ſoſtanze de' tufi conchigliferi, e ne' cementi ſingolarmente che commettevano i mattoni delle muraglie, ſu' quali cementi il vedeva fiorire in copia; il che attentamente ripetuto e verificato ſu tutte queſte materie cavate da varie ſituazioni della collina, baſtò bensì per confermarmi nel penſiero, che a quegli avanzi marini apparteneſſe il natro indubitatamente, ma per queſta via non mi ſi apriva adito all' intima cognizione che deſiderava. Come conoſceva perfettamente, ch' era queſto un articolo di ſommo rilievo nella Fiſica, e che il momento non poteva eſſere più di queſto opportuno e propizio per iſcuoprire la ſede originaria di queſt' alcali; così, fatti i primi paſſi, mi rivolſi tutto a ſtudiare da vicino la ſpontanea efflorefcenza di lui, e ſu le parti di quelle ſoſtanze argilloſo-calcaree, ond' egli sbucava immediatamente. Scelſi per ciò fare e tufi, e mattoni, e cementi calcarei, e tutte quelle ſuſtanze per fine ſu la ſuperficie delle quali fioriva il natro e rifioriva coſtantemente. Andava ſpazzando il ſale con una piuma, e ve lo laſciava riprodurſi ſucceſſivamente ponendo attenzione a tutto di dì in dì. Ma non mi venne mai fatto di comprendere il magiſtero chiaramente, finchè non mi pervennero alla mano alcuni pezzi di tuſo particolari, ov' erano qua incaſtrate conchiglie marine, là pezzetti nericci, che parevano contraſſegnare ſoſtanza animale, e qua e là piccole aree interpoſte di nuda terra calcarea in parte, e in parte argilloſa. Spazzando in queſti più di frequente che non ſoleva la fioritura ſalina, guardando attentiſſimamente di momento in momento, per così dire, il rinaſcere del ſale, finalmente m' accorſi che non dalle nude guſcie, non dalla concrezione cretoſa, ma bensì da quelle diſtinte parti, cui giudicava animali, sbucava il natro deciſivamente. Fatto avveduto di queſto ſpezzava i tufi, eſtraeva e ſeparava l' una parte dall' altra, e vi faceva le mie oſſervazioni partitamente; perchè venni ſempre più a confermarmi, che le conchiglie ſemplici non ſomminiſtravano altramente il ſale, e che tutto eſciva dell' animale, che aveva meſſo da parte, dalle ſpoglie di lui diſanimalizzate, ove dopo pochi dì tornava quello a comparire coſtantemente. Di qualche pezzo di queſte concrezioni tufacee ſingolari ho fatto qua e là dono, e n' ho mandato anche in Francia, da cui ſpontaneamente fioriſce e rifioriſce il natro libero puriſſimo ſu le parti animali terrificate e fatte pietroſe, che vi ſi trovano ſparſe ed incaſtrate; baſtano in vero elle ſole a mettere in chiaro la generazione di quel ſal alcali, di cui è tanta abbondanza in queſta collina. Ma ne vedremo le prove allorchè paſſeremo ad inveſtigare la preſenza di lui negli animali viventi nel mare.

VIII.

E qui prima d' inoltrarmi è d' uopo, che alcune oſſervazioni riferiſca fatte nel ſottoporre all' eſperienza tutte quelle marine ſuſtanze, che ho detto, le quali oſſervazioni mi ſembrano meritare tutta l' attenzione de' Fiſici. Faceva in polvere le pietre, polverizzava le conchiglie, e tutto metteva a diſciorſi nell' acqua e fredda, e tepida, e per ſin bollente ſucceſſivamente per non laſciarvi appiattato alcun ſale. In tutte queſte ſperienze, che divennero per un anno, direi quaſi, giornaliere,

I. Non ho mai potuto, non già ottenere caratterizzato, ma nè pur diſcernervi alcun veſtigio di ſal marino.

II. E all' oppoſto non ve n' ebbe alcuna, in cui, operando con le diſſoluzioni d' argento e di mercurio, non diſcopriſſi manifeſtamente perpetue e ſenſibili traccie di un acido marino *latente*, sì nella terra delle conchiglie, che ne' tufi e nel terreno ſteſſo, ov' erano tutti que' teſtacei diſſeminati. Comprendendo bene l' importanza di queſti due fatti, non ho laſciato di ripetere, variare, e verificare le prove in guiſa da non poterne più dubitare. Sopra di che torneremo a luogo.

IX.

Veggendo dunque, che tutte le più ſcrupoloſe oſſervazioni menavano a conchiudere, che nell' animale marino riſiedeſſe in proprietà il natro, e che in conſeguenza tutto quello che traevaſi ſu quella collina, e in que' ſotterranei bello e formato sì in effloreſcenza, che per liſciva, foſſe un prodotto degli eſſeri marini decompoſti ond' erano quivi i tritumi sì copioſi e viſibili da per tutto, rivolſi il penſiero a prender per mano gli animali ſteſſi che poteva proccurarmi in natura dal mare. Imperciocchè era neceſſaria coſa il ben conoſcere, per quanto ſarebbe conceduto, ſe il natro annidato nella ſoſtanza animale marina vi foſſe eſſenziale, o pure ſtraniero, come dicemmo eſſere quello delle piante marittime; quiſtione inſeparabile dal ſuggetto, che non può meglio per avventura dilucidarſi che coll' interrogare la natura direttamente coll' eſame di quegli eſſeri medeſimi ancor viventi, e nella loro intatta organizzazione. M' accinſi pertanto all' opera con molte prevenzioni e cautele, una delle quali ſi fu di ben conoſcere alcuni caratteri diſtintivi del natro acetoſo, cioè del natro combinato coll' acido dell' aceto diſtillato. Converranno i Fiſici eſſere

eſſere operazione ſommamente incerta e pericoloſa l' adoperare acidi minerali in traccia di un alcali, di cui ſi voglia in qualche miſto non tanto accertare la preſenza, come lo ſtato di lui libero o combinato. Un acido vegetale ſembra eſſere il più acconcio per tal uopo, ſiccome quello ch' è impotente a decomporre i ſali neutri, che potrebbero nel miſto avere quell' alcali per baſe, laſciandoveli egli intatti. E non è ultimo oggetto pure il poter ſeparare l' alcali dalla ſoſtanza in cui può eſſere involto, e averlo in potere totalmente libero; al che fare più d' ogni altro mezzo ſembra valevole l' acido vegetale, come vedremo. Per la qual coſa le ſperienze addotte dal Sig. *Wiegleb* per provare l' eſiſtenza dell' alcali vegetale libero nelle piante prima della combuſtione, fondate ſull' uſo degli acidi minerali ſu le materie eſtrattive, non laſciano di eſſere da molte dubbietà accompagnate. Quindi è, che mi ſono in primo luogo occupato a preparare il natro acetoſo, che ho detto, per ben conoſcerlo al caſo. Ecco le principali oſſervazioni, che v' ho fatto.

I. Affuſo l' aceto diſtillato, concentrato baſtevolmente, ſull' alcali marino criſtallizzato, s' eccita immediatamente una viva efferveſcenza. Ma fa d' uopo affonderlo a poco a poco, non verſando nuovo acido che al terminar dell' effervefcenza ſuſcitata poco innanzi.

II. Svaporato a ſecchezza il liquore o al ſole, o a moderatiſſimo fuoco, perchè il ſale non ſi decomponga, e affuſevi poche goccie d' acqua diſtillata ſi criſtallizza il ſale perfettamente, ma non altramente a ſcaglie o a lamine ſottiliſſime, come la terra fogliata. La criſtallizzazione è regolariſſima, compoſta di faſcetti lunghi radiati, e quaſi a filamenti ſetoſi formanti una belliſſima ramificazione. La figura de' fili è priſmatica poliedra, veduta con occhio armato, e pare compoſta di priſmi minori tetraedri.

III. Il ſapore del natro acetoſo è freſco e piccante; molto meno però della terra fogliata d' alcali vegetale. Vi ſi diſtingue perfettamente e a un tempo il ſapor dell' aceto, e l' urinoſo del natro.

IV. Egli è interamente diſſolubile nello ſpirito di vino rettificato.

V. Eſpoſto all' aria ſecca non s' umetta, nè va in deliqueſcenza, ma ſi sfarina come il ſal di Glauber preciſamente.

VI. Finalmente mettendo di queſto ſale ſu' carboni acceſi, fugge l' acido, e prende odore empireumatico l' emanazione ſenſibilmente.

Valendoſi pertanto dell' aceto diſtillato al caſo d' inveſtigare un alcali nativo in ſoſtanze gelatinoſe, non ſenza miſcuglio di ſali marini e vitriuolici, oltrachè non ha egli preſa ſu queti ſali neutri, è certo, che il ſale acetoſo, che ne riſulta, vien rapito e diſciolto dallo ſpirito di vino, ſenza che ne reſtino attaccati i ſali neutri, e reſta perciò l' acetoſo ſeparato, da cui può quindi l' alcali precipitarſi agevolmente.

X.

Prima di ſoggettare gli animali marini, penſai di far cimento ſu le pure conchiglie di varie ſpecie di teſtacei, che mi proccurai dal mare Adriatico, come oſtriche, datteri, granchj, ed altri tali moltiſſimi peſci armati, ch' è inutile il denominare. Ne faceva venire di tratto in tratto de' freſchi per ripetere le ſperienze, le quali dovevano unicamente eſſere rivolte a riconoſcere l' eſiſtenza del natro, ovunque poteva in queſti marini viventi annidarſi, ſenza divertire le mie ricerche in analiſi non opportune all' oggetto, che aveva in veduta. Di queſti guſcj parte ne faceva ſeccare al ſole, e parte calcinare, dopo di averli replicatamente lavati nell' acqua calda. Diremo pertanto ciò che de' primi è intravenuto. Ridotti in polvere li diſcioglieva in acqua puriſſima, e filtrava le diſſoluzioni. Faceva poi ſvaporare le liſcive a ſecchezza. Da queſte intanto non ebbi mai reſiduo ſalino manifeſto, e non ſolamente non n' ebbi di ſal alcali, ma nè pur di ſale marino, che pur m' aſpettava non irragionevolmente diſciolto nell' acqua. Delle ſoſtanze terroſe che rimanevano ſul filtro faceva queſt' uſo. Le ſaziava primamente di ſpirito d' aceto verſato per interruzione, con cui facevano effervescenza gradatamente creſcente. Filtrava quindi il liquore, lo ſvaporava al ſole a ſecchezza, e tornava a diſciorre il ſal ſecco nello ſpirito di vino; filtrava e ſvaporava di nuovo a ſecchezza, e finalmente con poca acqua diſtillata bagnando il ſale il riponeva in luogo freſco a criſtallizzarſi. Come è queſto il modo, che ho coſtantemente praticato e ſu le conchiglie, e ſu le materie eſtrattive in traccia del natro, non lo ripeterò più, contentandomi d' indicarlo ſolamente.

La criſtallizzazione di queſto ſale è ſtata più o men lenta, e difficile ſecondo l' indole varia delle ſoſtanze coſtitutive delle conchiglie. I guſcj delle oſtriche, e di que' teſtacei tutti che non avevano legame intimo coll' animale, ſomminiſtrarono un ſale di forma ſetoſa ſimile alla zeolite, e di lentiſſima e malagevole criſtallizzazione. All' oppoſito quando il guſcio polverizzato apparteneva a ſquille od altri granchj di corteccia tenera, e quaſi parte dell' animale, il ſale acetoſo più facilmente ſi criſtallizzava, e ve ne aveva ſu' piattelli, che affettava una figura priſmatico-romboidale. Ma non potei giammai accertarmi, per quanto eſaminaſſi attentamente il carattere di queſti ſali, che vi aveſſe deciſivamente indizio di natro acetoſo. Per altro ſu' carboni acceſi laſciavano tutti sfuggir l' acido con un odore empireumatico, come fa il natroſo. Ma ne' ſali acetoſi fatti colle conchiglie calcinate s' ebbero altre apparenze. Tutti ſi manifeſtavano pure terre fogliate calcaree, ſvanendo quelle apparenze ſaline, che aveva notato nelle corteccie in parte animalizzate, che non avevano ſofferto l' azione del fuoco. La terra non era ſoſtanzialmente che una vera calce.

XI.

Aſſicurato da molte e replicate ſperienze fatte con tutto lo ſcrupolo, che non riſiedeva altramente il natro nelle conchiglie de' teſtacei, prima di rivoltarmi agli animali, giacchè di materia abbondava e calcinata, e in iſtato naturale, volli ripetere anche ſu queſte le ricerche che avea fatto precedentemente ſulle conchiglie antiche quali terrificate, quali lapidefatte del noſtro colle, di cui nel §. VIII. Non ebbi pertanto ſenſibile veſtigio di ſal marino in tutti i dilavamenti che ne feci, ſiccome delle antiche era accaduto; e all' oppoſito, come in quelle, non laſciò giammai di manifeſtarſi l' acido marino fiſſato nella loro ſoſtanza, e più nelle non calcinate, che in quelle che erano ſtate tormentate dal fuoco. Potrebbe quindi non eſſere ragione ſufficiente per conghietturare non appartenere una terra calcarea a ſpoglie animali marine , o per caratterizzarla primitiva , il non dar ella ſegni d' acido marino *latente* , avvegnachè non può queſt' acido conſiderarſi da lei inſeparabile , ſe il fuoco può intaccarlo, come n' ebbi indizio manifeſto. Baſta intanto , che dell' eſiſtenza di un tal acido *latente* ſi abbiano prove ſuperiori ad ogni eccezione , ove non è traccia di ſale marino naſcoſto, il quale renda equivoca l' oſſervazione. Di che faremo parola in altra ſezione.

XII.

Ed eccoci giunti al nodo, al maſſiccio della quiſtione, la quale reſta pienamente deciſa ſe ci rieſce di ſcuoprire libero il natro negli animali marini , e coſtituente parte della ſoſtanza di loro, qualunque ſiaſi l' ufficio di lui nell' organica condizione di quegli eſſeri.

Su due claſſi d' animali ho iſtituite le mie ſperienze, cioè ſu' peſci armati o teſtacei, e ſu' peſci propriamente detti del mare. Mi limiterò a dire il modo, che ho uſato ſu entrambe, ch' è l' eſſenziale a ſaperſi , e proprio ad eſſere da chicheſia ripetuto, e ad eſporre il finale riſultamento, ſenza involgermi in una ſtucchevole e minuta deſcrizione di più che cinquanta eſperimenti fatti in due anni di tempo, e tutti ad un modo.

Lavava più volte l'animale, e il dilavava in acqua calda, ſinchè queſta ceſſava di contrarre ſapore, e colore diverſo dal ſuo naturale. Il faceva quindi peſtare in un mortajo, e parte ne poneva a macerare nell' acqua calda , parte a ſeccare al ſole per indi a poco calcinarlo.

I. E parlando della porzione macerata faceva paſſar tutto per un filtro di tela, e ſpremeva sì, che l' acqua ſi caricaſſe della materia eſtrattiva, e tornava a filtrare aggiugnendo nuova acqua. Ciò fatto, a dolce calore ſvaporava a ſecchezza la diſſoluzione , e la ſoſtanza ſecca metteva a digerire nell' aceto diſtillato tepido , e concentrato . Sin da principio oſſervava farſi un' effervеſcenza ſenſibile . Di nuovo a calor dolce ſvaporava a ſecchezza , e tornava a verſarvi interrottamente un po di quello ſpirito di aceto ben caldo.

Ceſſata ogni effervescenza filtrava finalmente il liquore, e ridottolo a ſecchezza al ſole, vi verſava poche goccie d' acqua diſtillata abbandonandolo in luogo freſco alla criſtallizzazione.

Queſta era ſempre confuſa, parte in lame criſtalline, parte in lucidi criſtalli ſparſi, viſibilmente priſmatici. Allora poneva tutto a digerire nello ſpirito di vino, decantava, ripetendo l' operazione ſinchè lo ſpirito reſtava nel ſuo ſtato naturale. Meſſi da parte i reſidui, faceva ſvaporare lo ſpirito per ottenere ſecco il ſale acetoſo di cui s' era quello caricato.

Queſto è il coſtante metodo che ho uſato in eſperienze di tanto rilievo.

Il riſultamento di tutti i cimenti fatti in queſta guiſa è ſtato, che il ſale acetoſo comparve ſempre a baſe di natro, o d' alcali marino a prova non equivoca. Imperciocchè ora facendo criſtallizzare quel ſale ſeccato, aveva il natro acetoſo co' ſuoi caratteri deſcritti al §. IX., ora decomponendolo col calore, ne ricavava il natro libero, natro caratterizzato, ed or decomponendolo coll' acido nitroſo, ne traeva un bel nitro priſmatico quadrangolare, cui mi dilettava d' inſiammare ſu carboni acceſi, e n' otteneva l' alcali indurito e pietroſo, per così dire, sloggiato l' acido.

II. Quanto all' altra porzione ſeccata al ſole, la calcinava all' aria libera ſinchè riducevaſi in cenere brunaſtra ſenza odore. Facea quindi bollire la cenere nell' acqua, filtrava e ſvaporava la liſciva finalmente a ſecchezza. Eſpoſto queſto ſale ſecco all' aria ſi sfarinava in gran parte. Il trattava poſcia coll' aceto diſtillato, indi con lo ſpirito di vino, come qui innanzi preciſamente. Non mancò in queſti pure, come ne' precedenti ſaggi, di comparire il natro libero, con cui combinati gli acidi vitriolico, nitroſo, e marino, ottenni ſal di Glauber, nitro, e ſal marino tutti ben caratterizzati.

XIII.

Ed ecco verificata negli animali viventi nel mare l' eſiſtenza del natro libero, come le effloreſcenze ſpontanee, e tutti gl' indizj ed apparenze concorrevano a manifeſtarcelo nelle oſſervazioni fatte ſulle ſpoglie terrificate degli animali marini, di che abbiamo fatto eſpoſizione e preſagio ne' §. §. precedenti.

Ma, come dicemmo al §. IX., è egli eſſenziale o avventizio e ſtraniero queſt' alcali nella ſoſtanza animale marina, in cui dietro a tante prove è fuor di dubbio, ch' egli riſiede? E' tolto già ogni ſcrupolo, che potrebbe averſi, ch' egli poſſa annidarviſi in iſtato di ſal marino, mentre, oltre che ſarebbe ridicolo l' avviſarſi che la calcinazione dell' animale foſſe baſtevole a decomporre queſto ſale, troviamo ſempre libero e puro l' alcali nella ſoſtanza animale coll' uſo di un ſemplice acido vegetale ſenza alcuna combuſtione. Il che toglie pure ogni ſoſpetto, che l' alcali marino che ſi trae dalle ſoſtanze vulcaniche, e quello ſteſſo che troviamo in tanta abbondanza fiorire ſul colle di Verona, provenga da una decompoſizione di ſal marino operata dal fuoco, o da altra cagione ignota, toſto che il ricaviamo a piacere bello e ſviluppato dalla ſoſtanza degli animali vivi, e viventi nel mare. Pertanto di quella quiſtione parlando, tutto induce a credere, appartenere il natro libero originariamente e eſſenzialmente alla ſoſtanza animale marina, e far parte di eſſa propriamente. Imperciocchè per qualificarlo ſtraniero e accidentale biſognerebbe, che nel medeſimo animale poteſſe verificarſi il caſo di totale privazione e aſſenza di queſto ſal alcali, ſalvo l' eſſere organico di lui, e la vita, come delle piante accade le più natriſere, che ſi conoſcano, le quali poſſono ſpogliarſene interamente, ſe lungi dal mare vengano coltivate, del che altrove parleremo. E d' altronde ſappiamo per le analiſi non avervi altramente nell' acque del mare natro libero diſciolto, di cui poſſano i viventi marini nutricarſi. Che ſe il ſi voglia attribuire al ſal marino, che nel ſervire all' organizzazione ed incremento di loro poſſa decomporſi, che è ardua coſa da concepirſi, avuto rifleſſo all' intimo legame de' principj proſſimi in un ſal neutro perfettiſſimo, com' è il marino, il trovarſi co' noſtri ſperimenti coſtantemente paſſato in ſoſtanza animale, e nella materia eſtrattiva ſegnatamente, e libero d' acido muriatico il natro, lo rende e qualifica neceſſariamente nativo ed originario in un animale, di cui è nativo, originario, e proprio quel modo di eſſere, quell' organizzazione, ed incremento nel mare. Ne' peſci intanto d' acqua dolce armati e diſarmati non m' è mai riuſcito di ravviſarvene ſenſibilmente veſtigio. Al qual fine ho ſuggettato nel 1783 varj peſci del noſtro Lago di Garda, dell' Adige, e di altre acque del Territorio Veroneſe, alle ſperienze medeſime poc'anzi deſcritte. Per la qual coſa ſe una tale coſtante eſiſtenza di queſto ſal fiſſo negli animali marini vivi, ſe il ſomminiſtrarne che ſanno in copia dietro alla riſoluzione e terrificazione della loro ſoſtanza dopo un corſo d'anni ſenza numero, come appariſce nelle fioriture che accennammo, non decidono la quiſtione a tutto rigore, caratterizzano certamente il natro come naturalizzato e fatto proprio nelle ſuſtanze degli eſſeri marini; ch' è quanto nel bujo eterno de' magiſteri di natura poſſiamo ſperar di vedere. Qualche chiarore di più ci ſi offrirà nell' eſame che faremo della terra animale nella ſeguente Sezione.

XIV.

Tra le altre cognizioni acquiſtate in queſte ſperienze, di una vo' far qui menzione, ch' è il luogo acconcio, ſembratami notabiliſſima, ed è, che dietro a' dilavamenti fatti collo ſpirito di vino delle ſoſtanze animali ſeccate, onde ricavarvi il natro acetoſo, trovai ſempre rimanere aſſai piccola quantità di ſale marino, relativamente alla maſſa degli animali. La materia reſidua, eſtratto il ſale acetoſo, era fatta bollire in acqua puriſſima, la quale dovea neceſſariamente caricarſi de' ſali, e però filtrava la diſſoluzione, ottenendo due oggetti di oſſervazione ſeparati, la terra ſul filtro, di cui qui appreſſo, e la liſciva filtrata. Reiterate, e ponderate eſtimazioni m' hanno fatto conchiudere, che 40 parti di ſoſtanza animale calcinata, or più or meno, ſi riducevano a ſei di cenere. La decima parte di queſte ceneri era ſalina, di cui un terzo appena era ſale marino perfettamente criſtallizzato. In conſeguenza negli animali marini, che ho potuto ſoggettare, ho trovato contenerſi di ſal marino appena la 200^{ma} parte della lor maſſa; il che può ſembrar piccola coſa in animali che naſcono, ſi nutriſcono, e vivono continuamente nel mare.

XV.

Ma non vo' tacere un' altra oſſervazione che ho fatto della quantità diverſa d' alcali, che le due vie di operare umida e ſecca ſomminiſtravano nelle ſperienze precedenti. Non ottenni giammai da pari quantità di ſoſtanze animali trattate con la macerazione, e con la combuſtione, pari quantità di natro, eſſendo ſempre riuſcito l' alcali tratto dietro alla calcinazione minore dell' altro, che traevaſi dietro alla macerazione. E non ſenza fondamento ho ſoſpettato, che l' azione del ſuoco ne diſtruggeſſe alquanto nel primo caſo volatilizzandone parte, e parte riducendone in iſtato di terra indiſſolubile nell' acqua. Ma vedremo poi di queſt' effetto deciſo del fuoco.

XVI.

Queſt' importantiſſimo fatto del trovarſi il natro inerente, proprio, e come in luogo nativo coſtituito nella ſoſtanza degli animali che naſcono, vivono, periſcono, e ſi riproducono nel vaſtiſſimo Oceano continuamente, ſvela intanto moltiſſimi arcani, ed apre la via ad altre cognizioni moltiſſime, che ci ſarebbero ſtate mai ſempre occulte, ſe non iſcioglievaſi il nodo capitale, come dicemmo al §. III. Ecco intanto donde può venire il natro in tante regioni meridionali, che abbiamo rimembrato, conoſciuto dagli antichi, e che ora pure ſi trova abbondantiſſimo; ecco donde può procedere il natro in vicinanza del mar Caſpio, nella Siberia, nella Tartaria, e in tante altre parti del Settentrione; come può fiorire e rifiorire dalle concrezioni tufacee conchiglifere; come può introdurſi tra via nell' acque minerali, nelle materie vulcaniche; come ne' vegetabili; come finalmente annidarſi e ſpargerſi nelle ſoſtanze de' varj regni di natura. Ovunque il mare ſia ſtato (che pur non ha quaſi parte la terra, in cui di mare non ſieno impreſſe veſtigia), ovunque abbia egli co' ſuoi abitanti ſoggiornato, e vi ſi ſieno queſti decompoſti o per naturale putrefazione, o per l' azione de' ſuochi ſotterranei, ovunque le ſpoglie loro ſi ſieno arreſtate, qual meraviglia che ſiaſi manifeſtato per l'addietro, e ſi manifeſti tuttora in ogni parte del globo indiſtintamente il natro libero che fa tanta parte della materia animale marina? Dall'accidentale in fuori, che può anche lungi dall' origine rinvenirſi, s' indichi un ſito, ove fioriſca e abbondi queſt' alcali, in cui non ſieno viſibili e manifeſti i ſegni di vicina o remota ſtazione fatta ivi dal mare, e preſenti le ſpoglie d' animali marini decompoſti. Quindi l' alcali volatile, che hanno oſſervato i Fiſici ſepararſi dal natro; quindi le terre natrifere dall' Egitto ai deſerti della Tartaria, ove ha fatto oſſervazione il Sig. *Georgi* (Acta Acad. Imp. Petrop. An. 1777.), trovate ſempre cretoſe, e manifeſtanti disfacimento di teſtacei. E non è più neceſſario il ricorrere nè a ſpontanee ineſplicabili decompoſizioni del ſal marino, nè a decompoſizioni di queſto ſale operate dal fuoco, o dall' organizzazione delle piante marittime che il ſucchino per nutrimento, onde render ragione della preſenza di un alcali, cui la decompoſizione e diſorganizzazione degli animali marini può ſomminiſtrare, in qualunque modo ella accada.

XVII.

Si faccia ora più attenta oſſervazione ſu le fioriture ſaline delle abitazioni, ovunque hanno luogo, ſegnatamente ne' paeſi marittimi, fioriture che il volgo co' ſal-nitraj chiama ſempre nitroſe: vi ſi diſcernerà facilmente un natro libero familiare, e più comune, che ſino al dì d' oggi non s' è eſtimato, e non potrà confonderſi col nitro, che vi foſſe per avventura meſcolato, facendo attenzione anche al ſolo ſapore urinoſo, che de' ſali neutri non è mai proprio. La città di Venezia, ed altre marittime ſituazioni dell' Adriatico me ne hanno ſomminiſtrato negli anni addietro, e me ne ſomminiſtrano prove tutto dì ne' ſaggi ſenza numero fatti ſu le ſpontanee fioriture ſaline, dopo che ho riconoſciuto poterſi generare il natro dietro alla totale decompoſizione degli animali marini, e ſbucare dalle ſoſtanze di loro. Lo ſteſſo dee accadere da per tutto, ove ſimili circoſtanze ſi verifichino, e non ſia diſſipato l' alcali, o decompoſto egli ſteſſo, il che avviene per replicati lavamenti, e replicate eſſiccazioni, come tutti ſanno.

XVIII.

M' era da principio propoſto di far eſtimazione, ſe mi foſſe ſtato poſſibile, della quantità d' alcali libero contenuto negli animali marini relativamente alla loro maſſa, e aveva intrapreſo qualche appoſito eſperimento. Ma veggendo eſſere ſommamente varj i riſultamenti, eſtremamente difficile l' accertamento, e non fondamentale per tutti il cimento che ſu pochi animali del mare era conceduto d' iſtituire, ho abbandonato l' opera. Le parti oleoſe, le gelatinoſe, le gommoſe, la terra ſteſſa animale che fa tanta parte di quegli eſſeri, tutto vi dee naturalmente trovarſi sì difformemente diſtribuito nell' immenſa quantità di loro, generi, e ſpecie innumerabili, da non poterſi far caſo di ſingolari eſperimenti.

Della Magneſia.

XIX.

La Magneſia ha tali e tanti caratteri ſpeciali e ſuoi proprj, che non ſenza fondamento vien ella diſtinta da tutte le altre terre conoſciute. Se n' aveva contezza ſin dal principio di queſto ſecolo, ma più per gli uſi medicinali che per riguardo alle proprietà di lei, nè prima della metà poterono averſene nozioni un po più chiare, eſſendo ſolamente del 1755 comparito l' eſame fattone dal Sig. *Black*, indi del 1759 quello del Sig. *Margraff*. N' è poi ſtato ſcritto in appreſſo da molti altri Chimici, e ſingolarmente dal Sig. *Bergman* ſapientemente sì, che mi credo diſpenſato dal parlare di un oggetto di cui ogni Fiſico è ormai pienamente iſtrutto. Vo' qui ſolamente eſporre quello, che intorno all' origine tuttora ignota di queſta terra le ricerche precedenti ſul natro hanno dato occaſione di penſare, e di tentare coll' eſperienza alla mano. Se queſta è la maeſtra, cui dobbiamo conſultare, e ſu la cui fede dobbiamo ripoſare, apparirà, far ella parte eſſenziale della ſuſtanza degli animali marini al par del natro, e doverſi a buon diritto diſtinguere dalle terre calcarea, e alluminoſa, come l' hanno avvedutamente diſtinta i celebri *Mar-*

graff e *Bergman*, del che hanno addotto ragioni validiſſime ne' loro Opuſcoli Chimici. E vuol di più il ſecondo, ch' ella ſia *placée au nombre des ſubſtances primitives juſqu' à ce que l' on ait decouvert ſon origine*. Sopra di che potrà ſparger luce per avventura ciò che vedremo qui appreſſo.

XX.

Nel leggere la Memoria ſopraccitata del Sig. *Georgi* mi venne notato al §. V., che dal natro della Ruſſia impuro ſi precipita coll' alcali tartaroſo maggior quantità di magneſia che non ſi trae dall' acqua-madre del ſal marino. Entrai quindi in un primo ſoſpetto, che la magneſia, che ſi precipita per un alcali fiſſo o volatile dall' acque-madri del ſal marino, poteſſe avere col natro comune l' origine, e un ufficio nell' organizzazione degli animali marini. In appoggio di queſta idea venne il conſiderare, che un gran numero di caratteri proprj a un tempo del natro e della magneſia avvicinava talmente queſte due ſoſtanze, che parevano non differire tra di sè, che nell' eſſere ſalino. In fatti

I. Il vitriuolo di natro, o altrimenti il ſal di Glauber richiede 15 parti di natro, e 27 d' acido vitriuolico, e il vitriuolo di magneſia 15 parti di magneſia, e $26\frac{1}{9}$ d' acido vitriuolico (*Bergman* Opuſc. T. 1. pag. 148. 150.)

II. Per diſciorre uguali doſi di entrambi queſti ſali occorre proſſimamente la ſteſſa quantità d' acqua bollente, dimandandoſene pel primo $\frac{12}{15}$ del peſo del ſale, e quaſi $\frac{11}{15}$ per la diſſoluzione del ſecondo.

III. Il vitriuolo di natro, e quel di magneſia prendono non molto differente quantità d' acqua per la loro criſtallizzazione, e le figure de' criſtalli non ſono al ſenſo eſtremamente diſſimili tra di sè.

IV. Si criſtallizzano entrambi per raffreddamento: il ſapore in amendue è freſchiſſimo, e il ritorno amaro: amendue eſpoſti all' aria ſecca perdono l' acqua di criſtallizzazione e la traſparenza, e ſi riducono in farina bianchiſſima.

Queſte analogie, ed altre che non rimembro, non mi parvero totalmente accidentali, potendo ogni lieve modificazione della ſoſtanza principio, ſe mai foſſe comune, dar luogo alle differenze, che ſembrano diſtinguere il natro dalla magneſia, allontanando per avventura queſta più che quello dallo ſtato ſalino alcalino.

XXI.

Ma non volendo dar corpo all' ombra mi rivolſi all' eſperienza, profittando dell' occaſione in cui era di maneggiare ſoſtanze animali in copia per le oſſervazioni precedenti. Prima di tutto pertanto feci queſt' eſperimento. Preſa la materia animale freſca di un gran numero d' oſtriche la feci peſtare in un mortajo, e macerare nell' acqua per tre giorni; feci poſcia ſvaporare e ſeccare al ſole l' eſtratto, e ſu d' una porzione della materia ſecca verſai dell' acido vitriuolico, laſciandola in digeſtione ſopra un fuoco moderato. Fatta di nuovo ſvaporare la diſſoluzione e ſeccare, diſciolſi la materia ſecca nell' acqua, filtrai, e ſvaporai nuovamente la diſſoluzione ſino ad un certo grado di concentramento. Preparate ſucceſſivamente tre diſſoluzioni d' alcali vegetale, d' alcali volatile, e di calce viva, e ſeparatamente filtrate e concentrate, verſai in ciaſcheduna pari doſe di queſta liſciva di ſale vitriuolico. In tutte e tre le diſſoluzioni ottenni un' abbondante precipitazione. Decantati i liquori, purgai con acqua puriſſima i precipitati a poco a poco da ogni miſtura di ſal neutro, e trovai in tutti una terra ſiniſſima, leggera, bianca, e inſipida. Scelta quella porzione ch' era ſtata precipitata dall' alcali volatile, ne combinai parte coll' acido vitriuolico, e dopo le conſuete operazioni n' ebbi un ſale amarognolo, il quale ſi diſciolſe in poco men del ſuo peſo d' acqua bollente, e tutto ſi sfarinò eſpoſto all' aria, come fa la magneſia vitriolata.

XXII.

Sull' altra porzione di eſtratto animale ſecco verſai dell' acido marino, e compiuta la combinazione, feci ſeccare e diſciorre nell' acqua ſucceſſivamente il ſale, filtrare e ſvaporare a certo ſegno la liſciva ſalina, e nelle tre ſeparate diſſoluzioni alcaline, qui innanzi preparate, verſai, come nell' eſperimento precedente, di queſta liſciva. N' ebbi abbondanti precipitazioni terroſe. Ma preſcelto il precipitato per l' alcali volatile, da porzione di lui combinata coll' acido vitriuolico ottenni un ſale amariccio in tutto ſimile al precedente, e co' medeſimi caratteri della magneſia vitriolata avuta qui ſopra.

XXIII.

Serbata la terra ſopravanzatami, e le altre pure precipitate colla calce, e coll' alcali vegetale, come termini di comparazione, precipitai da una libbra d' acqua-madre di ſal comune coll' alcali volatile mezz' oncia di magneſia. Ne combinai quindi parte coll' acido vitriuolico, conſervando il reſtante per altri confronti. La magneſia vitriolata, che n' ebbi, fu meſſa a paragone dell' altra ottenuta dalle operazioni de' §. §. XXI. XXII., e le trovai tutte per ogni conto della ſteſſa indole, e co' medeſimi caratteri a tutte le prove.

Mi ſono in appreſſo fatto a confrontare le due terre in natura quella cioè tratta dagli animali per le precedenti precipitazioni, e queſta dalla liſciva di ſal marino. Per quanto mi ſia adoperato nel farne i più accurati riſcontri, non ho potuto diſcernervi differenze, per cui, ſe la terra precipitata dal ſal marino è magneſia, non debba quella pure conſiderarſi magneſia, che ho ricavato nel modo predetto dalla ſoſtanza animale. Pari finezza e bianchezza, pari leggerezza e inſipidezza. Entrambe potentemente calcinate non avevano cauſticità, non ſi ſcioglievano nell'acqua, nè vi ſi riſcaldavano, e ſi diſcioglievano negli acidi ſenza effervеſcenza. Elle del pari produſſero nella ſoluzione di nitro lunare una precipitazione nericcia, e roſſiccia in quella di ſublimato corroſivo. Meſcolate entrambe in ſeparati crogiuoli in pari doſe con terra vitreſcibile, e ſottopoſte a gran fuoco non diedero ſegno di fuſione. Non ſecero entrambe parimenti, che indurarſi meſcolate ſeparatamente con la terra dell'allume. A queſte prove, laſciando a parte alcuni altri cimenti, parvemi di potere fondatamente conchiudere, che le terre ricavate per la via ſopra eſpoſta dalla materia animale marina, erano le ſteſſe, che precipitiamo dall' acque-madri del ſal comune deciſivamente.

XXIV.

Dietro a queſti primi paſſi m' accinſi a fare qualche ſperimento ſu la materia animale calcinata di cui aveva meſſo a parte più di ſei oncie in vaſe ben chiuſo, perchè non s' imbeveſſero di acido aereo. Diſciolſi due oncie di queſte ceneri in acqua bollente, e filtrata la diſſoluzione, preſi a far cimento ſu la terra indiſſolubile nell' acqua rimaſa ſul filtro. Queſta terra non fece ſenſibile effervescenza coll' acido vitriuolico, ma sì bene coll' acido nitroſo fumante, combinata col quale diventò gelatinoſa, e deſtramente maneggiata ſi criſtallizzò; ma ben toſto umettatoſi il ſale, cadde in deliqueſcenza. Mi limitai pertanto a far uſo dell' acido vitriuolico ſolamente, e trovai, che era meſtieri verſarvelo ſopra interrottamente, eſſendo aſſai lenta la combinazione, agitare con iſpatola di vetro il meſcuglio, e ſpogliarlo in fine dell' acido ſoprabbondante con ottimo ſpirito di vino ben caldo. Ciò fatto poſi queſta calce ſopra un filtro, e vi andai verſando a poco a poco dell' acqua caldiſſima, continuando così finchè cominciò a gocciolare l' acqua inſipidiſſima. Meſſa a parte la prima, ch' era amariccia, la ſvaporai, e poſta a criſtallizzarſi, n' ebbi una magneſia perfettamente vitriolata, come le precedenti. Ma la materia rimaſta ſul filtro era inſipida, nè ſi diſcioglieva nell' acqua, e però ripoſta in piattello di porcellana vi aggiunſi poche goccie d' acqua diſtillata, e abbandonandola alla criſtallizzazione, dopo alquanto tempo trovai formata una ſelenite deciſa. Preſi di quella magneſia vitriolata, che era ormai convertita in farina, e la diſciolſi in un po d' acqua bollente concentrando la diſſoluzione. Infuſi poſcia in una porzione acqua di calce, e ſi fece un' abbondante precipitazione. E ſimilmente verſando nel reſtante un po d' alcali volatile, nacque pure copioſa precipitazione. La terra precipitata confrontata con la magneſia che ſi precipita dall' acqua-madre del ſal marino, aveva tutti i caratteri di queſta ſenza alcun dubbio.

XXV.

Ed ecco verificata nella ſoſtanza degli animali marini la preſenza di tre ſoſtanze diſtinte, cioè del natro, della magneſia, e della terra calcarea: articolo importantiſſimo, e degno della conſiderazione de' Fiſici. Al qual paſſo non è fuor di propoſito l' aggiugnere, che prende ſempre più forza il primo giudicio fatto dell' eſſere inerente, eſſenziale, e non avventiccio e ſtraniero il natro nella ſoſtanza animale. E così può dirſi ora della magneſia. Altramente ſarà pure ſtraniera la terra calcarea, e immaginando tolta via via una ſoſtanza dopo l' altra dall' animale, ſe non gli ſono eſſenziali, che ſarà dell' animale? Sembra dunque che negli eſſeri animali viventi nel mare riſieda la gran conſerva sì del natro che della magneſia, non meſſa in conto la terra calcarea, di cui neſſuno ha giammai dubitato.

XXVI.

Ma qui ci ſi prepara un altro fenomeno di ſommo rilievo. Ho detto al §. XX., che i caratteri del natro, e della magneſia moſtravano tanto ſtretta relazione, che ſoſpettava differir quello da queſta, più che nella ſuſtanzia principio, nell' eſſere nell' uno più deciſa la condizione ſalina, che nell' altra. Ecco come mi ſono diretto per verificarlo.

I. Avendo preſo quattro dramme di natro criſtallizzato puriſſimo il combinai coll' acido vitriuolico, e ben lavato il ſale di *Glauber* collo ſpirito di vino, onde torgli ogni ſtilla di acido ozioſo e ſoprabbondante, il diſciolſi nell' acqua; filtrai poſcia e concentrai la diſſoluzione. Vi affuſi due dramme di alcali volatile, e non ſenza contento oſſervai farſi un' abbondante precipitazione; decantato il liquore, lavato, e rilavato con acqua puriſſima il precipitato, trovai ch' era egli una vera e deciſa magneſia al peſo di tre ſcrupoli e quindici grani, la quale accompagnava quel natro, e vitriolata potè poi decomporſi per un alcali, come vedeva. E' intanto veriſſimo, ciò che oſſervò il Sig. *Georgi* nel natro nativo della Ruſſia, ſiccome notammo al §. XX. M' accinſi quindi all' eſperimento di confronto. Tutti ſanno che per reiterate diſſoluzioni, ed eſſiccazioni gli alcali fiſſi ſi ſnaturano, e ſi terrificano in qualche modo. Mi propoſi pertanto di riconoſcere, che coſa accadeva dell' alcali marino trattato così; ſe s' accoſtava per queſta via più e più ad un certo ſtato terroſo; che coſa finalmente poteva egli eſſere in queſto ſtato di digradazione, e ſe la magneſia che ne avrei ottenuto foſſe in maggior copia, che nell' eſpoſto eſperimento.

II. Preſi altre quattro dramme del medeſimo natro criſtallizzato, e diſcioltolo nell' acqua il filtrai due volte per carta non collata, e feci ſvaporare la diſſoluzione a ſecchezza. Diſciolſi di nuovo il ſal ſecco, e tornai a farlo ſvaporare a ſecchezza. E così via via procedendo ho ripetuto l' operazione ſei volte. Dopo ciò il combinai, come precedentemente, coll' acido vitriuolico, lavai il ſale di *Glauber* collo ſpirito di vino, diſciolſi, filtrai, e concentrai la diſſoluzione. Verſando poi in queſta due nuove dramme del medeſimo alcali volatile, decantando, lavando, e rilavando il precipitato, e ſeccandolo finalmente, trovai che la terra avea il peſo di quaſi ſei ſcrupoli. Volli però accertarmi del ſuo carattere, e però la combinai coll' acido vitriuolico, e n' ebbi una vera, e manifeſta magneſia vitriolata, che ſcioglievaſi tutta in poca acqua bollente, e ſi sfarinava all' aria.

III. Non contento di queſto accertamento volli replicare l' eſperienza per maggior ſicurezza. Pertanto meſſe altre quattro dramme del medeſimo natro a diſciorſi nell' acqua, filtrai due volte la diſſoluzione come prima, onde torvi ciò che vi poteſſe eſſere di terroſo, e ripigliai l' evaporazione nello ſteſſo vaſe, che fu ſempre di vetro. Seccata la materia vi affondeva nuova acqua, e così ſucceſſivamente replicando l' operazione giunſi all' ottava volta pazientemente. Era notabile coſa il vedere dopo la ſeſta la ſoſtanza alcalina diſcioglierſi a ſtento, e andar nuotando per l' acqua a fiocchi come fa la neve per l' aria. Dopo l' ottava eſſiccazione combinai la materia coll' acido vitriuolico, dilavando il ſale con lo ſpirito di vino, e ſciogliendolo poſcia in acqua diſtillata. Vi affuſi due dramme d' alcali volatile, come qui innanzi, ed ebbi prontiſſima precipitazione di terra, la quale lavata, e ſeccata peſava quaſi ſette ſcrupoli, leggiera, inſipida, e combinata coll' acido

acido vitriuolico ſomminiſtrò un ſale amarognolo, un vero vitriuolo di magneſia, come poco avanti.

XXVII.

Per quanto eſſer dobbiamo riſerbati nel trar conſeguenze da particolari ſperimenti, alcuni fatti ſono di tal natura, che danno luogo a conſeguenze d' ogni eccezione maggiori. Sembra dunque, che ſu la fede delle coſe vedute e ſperimentate ſin qui poſſa eſſere permeſſo di riconoſcere, al par del natro, propria della ſuſtanza animale marina la magneſia: contenere molto ragionevolmente l' uno e l' altra una ſteſſa terra-principio, e differire tra di sè nella condizione ſalino-alcalina: poterſi entrambi ricavare direttamente dagli eſſeri organici animati che vivono nel mare ſenza alcuna azione del fuoco, cui voleſſero attribuirſi: e finalmente poterſi non ſenza fondamento giudicare la magneſia coſtituita in uno ſtato medio tra la pura terra e l' alcali marino. Quindi le proprietà analoghe, di cui s' è fatto menzione al §. XX., e la ſpiegazione del bel fenomeno oſſervato dal Sig. *Bergman*, e riferito nel III. Vol. de' nuovi Atti della Società R. di Upſal alle pag. 128. 129. Trovò queſt' illuſtre uomo, che la magneſia ſi combina col zolfo, e genera un fegato. Ed ecco come ſon di rado le magneſie diſgiunte dal natro nativo; come può ella meſcolarſi con tante materie nelle viſcere della terra, ove il mare è ſtato co' ſuoi abitatori, come nelle argille, nelle ſteatiti, nell' asbeſto, nello ſchiſto, nello ſchorl, in alcuni ſpati, nelle ampeliti ecc.; come ſia ella abbondantiſſima nelle fonti ſalmaſtre, ov' è combinata coll' acido marino; come riſieda combinata e in tanta copia nel vaſto Oceano, di cui rende l' acqua sì diſguſtoſamente amara; come ſia tenacemente aderente a' ſali comuni; come ſi trovi diſſeminata in parti ſottiliſſime nelle pietre calcaree ſtate una volta coperte dall' acqua del mare; come finalmente l' effloreſcenza delle materie piritoſe ſomminiſtrando un acido vitriolico, nell' atto che con la terra calcarea ſi producono le ſeleniti, con la magneſia, che vi ſta incorporata, ſi generino de' ſali amari, delle magneſie vitriolate, le quali or ci vengono recate di ſotterra da fonti amare, ed or trovanſi foſſili belle e formate, com' è quella anche tra noi ſcoperta di recente nella Carnia Veneta dal Sig. *Tavelli*, di cui ho mandato ultimamente un ſaggio al celebre Sig. *Lavoiſier* a Parigi proccuratomi dall' illuſtre e dotto Naturaliſta Sig. *Arduini* di queſta Società. Non ſia però chi ſi affretti di conchiudere, dal che ſono lontaniſſimo, che tutta la magneſia proceda dagli animali marini diſorganizzati, o dal ſal marino magneſiano decompoſto, quaſi repugnaſſe l' avervene in natura, che non ſia entrata nell' economia animale, o nella compoſizione de' ſali marini: concluſione mal fondata e prematura.

Del ſal marino, e della ſalſedine del mare.

XXVIII.

Se queſto foſſe il ſecolo de' ſiſtemi, che non è, le verità luminoſe, onde ſiamo fortunatamente venuti in cognizione, potrebbero ſomminiſtrare baſe e principj a più di una teoria. Ma come non tutte le umane comentazioni ſervono realmente a promuovere la ſcienza, di cui anzi ritardano bene ſpeſſo gli avanzamenti, così al vantaggio unicamente della Fiſica provvedendo, non altro frutto mi ſon propoſto di ricavarne fuorchè quello di alcune immediate, e, per quanto a me ſembra, legittime conſeguenze. E ſe mi farò lecito di accompagnarvi qualche penſiero mio, non ad altro ſarà egli inteſo, fuorchè ad aprire all' altrui viſta il nuovo orizzonte, che s' è affacciato alla mia, e ciò forſe darà motivo e campo a nuove indagini. E primamente è d' oſſervazione degno il fenomeno di quelle eterne traccie d' acido deciſivamente marino, cui abbiam detto *latente*, ravviſate in tutte le marine ſuſtanze, ove non è veſtigio di ſal marino: acido che ſi manifeſta dopo ſecoli e ſecoli, ch' elle ſon terrificate e impietrite. Onde mai queſt' acido? Se il ſi voleſſe proceduto da ſal marino decompoſto ſpontaneamente in tanta ſerie d' anni, decompoſizione che non ſaprei ammettere ſenza conoſcere gl' intermezzi che poſſono averla operata, ond' è poi che il troviamo nelle conchiglie di freſco tratte dal mare, ove pure non è indizio di ſal marino (§. §. VIII. XI.), nè apparenza, che autorizzi sì fatta decompoſizione? Nell' acqua del mare certamente non abbiamo traccia d' acido muriatico libero, eſſendovi egli ſempre combinato col natro, con la magneſia, e con la terra calcarea. E' egli dunque nativo e proprio delle conchiglie, o ſi trasfonde dall' animale quaſi ſucco nutricante deſtinato a recarvi il principio del vivere, creſcere, e configurarſi di loro? L' oſſervarvi arreſtato il corſo della vita al mancar dell' animale, il rimanerſi la conchiglia dopo di lui pura maſſa figurata di terra calcarea ſenza moto, e il non trovarvi altro di ſtraniero, che queſt' acido intimamente unito, invitano a credere non ſolamente che vi ſia egli dall' animale provenuto, ma che eziandio l' ufficio di lui foſſe per avventura il portare, diffondere, e mantenervi il principio attivo e vivificante, durante la vita dell' animale. Dunque parrebbe l' acido marino aver ſede nell' animale indubitatamente. Ma ſe non torniamo a ricorrere al ſuſſidio della decompoſizione de' ſali tolti al mare dall' animale nel vivervi e nutricarſi, che vi ſa continuamente, decompoſizione ſempre miſterioſa, ſiamo coſtretti a mettere queſt' acido originariamente nella claſſe degli acidi nativi di lui: ſoggetto belliſſimo di ricerche totalmente nuove ſugli acidi degli animali marini, il quale merita l' occupazione de' Fiſici quant' altro mai. E' vero, che ſe nella vita di quegli eſſeri organici entrano i ſali diſciolti nell' acque in cui vivono, i ſali marini terroſi, e magneſiani potrebbero cedere non difficilmente tutto o parte del loro acido decomponendoſi in qualche modo, e laſciarvelo intruſo. Ma la decompoſizione del ſale a baſe d' alcali fiſſo, ch' è il principale, non dee metterſi in campo sì leggermente da chi ben conoſce l' indole di lui e l' intimo legame de' ſuoi principj.

XXIX.

E qui ſi faccia attenta conſiderazione ſu quell' acido oſſervato dal Sig. *Bergman*, indi dal Sig. *Morveau* (Opuſ. Chim. T. 1. pag. 7.), e da altri illuſtri Fiſici ſucceſſivamente nelle terre calcaree, e ſempre preſente. Egli è quello ſteſſo di cui parliamo, da me ne' viventi animali marini ravviſato direttamente. Si ha dunque tutto il fondamento di credere, che le crete, e in genere tutte le terre calcaree dotate di queſto ſpirito acido latente non ſieno che ſpoglie d' animali marini disfatti, e terrificati. Ma che s' avrebbe a penſare di una terra calcarea, che ſe ne trovaſſe ſprovveduta? O può eſſerne ſtata ſpogliata per l' azione di qualche potente intermezzo, come tra primi è il fuoco (§. XI.), o può ella non aver fatto giammai parte di ſimili animali; mentre non repugna per alcun conto, che v' abbia in natura una terra vergine per così dire, e primigenia, la quale non ſia entrata non ſolamente nella animalizzazione degli eſſeri marini, ma nè pure nell' economia di alcun altro eſſere organico della terra.

XXX.

Ma intanto laſciando a parte le quiſtioni e attenendoci a' fatti, un acido marino ravviſiamo diffuſo ne' corpi animati del mare, della cui preſenza non è permeſſo di dubitare, indipendentemente da quello che vi ſta combinato ne' ſali neutri, e medj che vi ſon diſciolti, e in piccola doſe pure diſſeminati in quelle ſteſſe organiche ſuſtanze (§. XIV.). Sappiamo in oltre, che nell' immenſa copia di que' viventi, e ſegnatamente nella ſuſtanza animale, riſiedono nativi il natro, e la magneſia in un con la terra calcarea, ch' è già la terra privilegiata e deſtinata per eccellenza dalla natura a meſcolarſi in tutto, e in tutti i ſuoi regni. Ed è poi certo, che, come è ſtabilito per ogni eſſere che vive il ceſſar di vivere, e dar luogo al rinaſcere e riprodurſi d' altri ſucceſſivamente, tutto pure quel ſiſtema d' innumerabili viventi nell'Oceano è in perpetua rivoluzione di naſcere, perire e riprodurſi continuamente. Dietro pertanto alla diſorganizzazione di que' corpi, reſtano in libertà neceſſariamente i principj, ond' erano compoſti, e tutto è in procinto di metterſi in nuova combinazione. Queſti fatti ormai innegabili ci accoſtano talmente al laboratorio della natura, che quaſi ci vien fatto di conoſcere dond' ella può trarre la produzione e perpetua riproduzione di tutti i ſali ond'è fecondo il mare, e che ci ha pur laſciati ſparſi e ſepolti nelle viſcere della terra abbandonandola, meſſi in libertà di unirſi i principj proſſimi di loro dietro al disfacimento degli animali marini. In fatti l' analiſi iſtituita dal fu illuſtre Sig. *Bergman* ſull' acqua del mare attinta a 60 braccia di profondità nell' Oceano all' altezza dell' iſole Canarie in diſtanza inſigne dalle coſte, ratifica mirabilmente queſta conſeguenza, e fa vedere, che il mare ha un certo fondo proprio di ſali diſtinti da quelli che poſſono eſſere nel di lui ſeno apportati d' altronde, cioè i ſali propriamente marini aventi per principio acido l'acido marino. Trovò queſt' accuratiſſimo Fiſico, che ogni Canna Svezzeſe d'acqua corriſpondente un po più che a 131 pollici cubici parigini, contiene (opuſc. T. 1. pag. 194.)

	Oncie	Grani
Sal marino a baſe di natro	2	. . . 433
Sal marino a baſe di magneſia . .	„	. . . 380
Selenite	„	. . . 45

I principali ſali pertanto del mare, e più abbondanti, che ſuoi proprj poſſono dirſi, ſono i due ſali marini a baſe di natro, e di magneſia, cioè una combinazione di quell' acido muriatico con quelle preciſe ſuſtanze alcaline, che il fatto dimoſtra riſiedere nella ſoſtanza degli animali marini.

XXXI

Se dunque il mare può avere in sè, e ne' ſuoi ſteſſi innumerabili viventi il fondo ineſauſto, i principj de' ſali proprj, ceſſa d' eſſere un miſtero la perpetua e coſtante ſalſedine del mare da eſſi procedente. Queſta caratteriſtica proprietà dell' acque marine ha ſempre dato che dire a' Fiſici, e v' ebbe chi, tenendo opinione che vada ella creſcendo continuamente, pensò che da' ſaggi fatti in diverſi tempi ſe ne poteſſe ricavare l' età del mondo (*Halley* Tranſaz. angl. an. 1715). Parte degli uomini ravviſa nel fondo del mare miniere di ſale, da cui ſi diſtribuiſce la ſalſedine uniformemente, e ſi rinnova; parte ve la fa mantenere dalle ſorgenti d' acque ſalſe, che vi metton capo dalla terra; ed altri altrimenti ſi fa a rendere ragione di queſt' ammirabile magiſtero. Che che però ſiaſi di queſte opinioni ſarebbe abuſo del tempo il combatterle or poi che co' fatti alla mano ſiamo venuti a capo di conoſcere, che l' Oceano racchiude nel ſuo ſteſſo ſeno le ſuſtanze preciſe, ch' entrano nella compoſizione de' ſali marini, e che quivi poſſono queſti ſali perpetuamente rigenerarſi, ſenza ſtranieri ſuſſidj, mantenendo del proprio la ſalſedine dell' acque. Gratuita pertanto è l' aſſerzione d' una ſalſedine uniforme in tutta la maſſa di loro col ſolo divario d' una maggiore intenſità nelle parti meridionali, che non è nelle ſettentrionali, e del tutto arbitrario il ſupporvi un aumento regolare, da cui l'età del mondo poſſa legittimamente inferirſi. Imperciocchè in ragione non può avervi primamente uniformità, ſtante che, le oſſervazioni di fatto moſtrando che in cento libbre d'acqua marina non ſi trovano diſciolte quaſi mai quattro libbre di ſale, e potendone elle contenere ſino a venticinque libbre, è coſa evidente, che non manca luogo all' intruſione d' altro ſale moltiſſimo, e ad una varietà di proporzioni ſenza confine. E meſſi anche a parte i ſali proprj, la quantità de' quali non può mai eſſere coſtante, fan capo nel mare tante acque non iſpoglie di ſali che dilavano l' eſterno, e l' interno della terra noſtra, e tante ſuſtanze e sì varie ingoja egli nel vaſto bacino terreſtre che il contiene, che non può mai preſumerſi una diffuſione uniforme di ſali da per tutto. Ma ſe la ragione eſclude una tale uniformità, l'eſclude eziandio il fatto. Veggiamo l' analiſi fatta dall' illuſtre Sig. *Lavoiſier* (Mem. dell' accad. Reale del 1772.) di 40 libbre d' acqua marina attinta ſu la coſta di Dieppe quattro leghe in mare. Egli vi trovò

	Oncie	Dramme	Grani
Terra Calcarea	„	4	56
Sal marino a baſe di natro . . .	8	6	32
Sal di Glauber, e ſal d' epſom .	„	4	26
Sal marino magneſiano	1	„	„
Sal marino calcare miſto col magneſiano	1	5	10

Qual differenza tra queſti, e i riſultamenti dell' analiſi antecedente in differenti tratti di mare! Se ne' mari chiuſi ed aperti, in diverſe ſituazioni, a diverſe profondità s' iſtituiſſero analiſi egualmente accurate, ſempre per mio avviſo ſi troverebbe diverſità di prodotti, e in diverſa proporzione diſtribuiti. E' poſſibile dunque, che vada in qualche parte aumentandoſi la ſalſedine, ſecondo l' opinione del Sig. *Halley*, e non è impoſſibile nè pure che il faccia regolarmente. Ma la poſſibilità iſteſſa vale anche per una regolare diminuzione in altra parte. Sarà però ſempre vero, che mancherà in tutti i caſi il principio della graduazione, e che l' incremento o il decremento, e la conceduta regolarità ſarà ſempre accidentale, parziale, e dipendente da ſingolari circoſtanze, non mai da legarſi col tutto, e molto meno col naturale, e ſempre uniforme corſo dell' età del mondo.

XXXII.

E qui baſti l' eſſerſi meſſi in via onde ravviſar da vicino nel mare medeſimo una dimeſtica ſorgente e inteſtina della ſalſedine indipendente da ogni eſterno concorſo di ſali, quanto però atta a conſervare il fondo ſtabile de' ſali marini nativi, altrettanto pur eſſa ſuſcettibile di variazione ne' varj tratti dell' Oceano. Imperciocchè la maſſa degli animali che vi naſcono, periſcono, e ſi rinnovano continuamente, è e deve eſſere variabile in diverſi climi quant' altra produzione mai di natura, dietro a tante rivoluzioni che accadono tutto dì in quella ſmiſurata conſerva d' acque, la quale tanta parte occupa del globo che abitiamo. Qual meraviglia, ſe, come nella decompoſizione degli eſſeri organici ſu la ſuperficie della terra ſi genera il nitro, di cui i principj proſſimi, cioè l' acido nitroſo e la baſe alcalina, ſi ſono preparati ed elaborati gradatamente in quell' operazione fermentativa da' materiali in quegli eſſeri preeſiſtenti, del che non è ad uom ſano conceduto ormai di dubitare, così dietro alla diſorganizzazione de' viventi marini ſi formi nel mare il ſal marino, i di cui principj proſſimi, che abbiamo trovato riſiedere nelle ſoſtanze di loro in proprietà, e qualità di principj materiali, ſi preparino del pari, e ſi elaborino nella decompoſizione, come de' principj accade del nitro nelle fermentazioni putride ſu la terra? Ma molto ancora reſta da farſi prima di ſtabilire tra' fatti certi della natura un magiſtero non mai finora, ch' io ſappia, nè pur ſoſpettato, e di cui non facciamo che vedere un primo barlume.

Della Luce notturna del mare

XXXIII.

Ma donde è mai, che nelle analiſi dell' acqua marina eſpoſte qui innanzi non appariſca ſegno di alcuna ſoſtanza bituminoſa? Credevaſi ne' tempi andati che queſt' acqua ne conteneſſe in copia, da cui e l' amaro, e il diſguſtoſo traeſſe ella neceſſariamente e inſeparabilmente. L' eſperienza dimoſtra il contrario. Per l' eſame che ne fece particolarmente l' illuſtre Sig. *Macquer* non ſe ne manifeſta indizio alcuno. La ſteſſa acqua ſalſa del Lago asfaltico, o Mar morto, che pur avrebbe dovuto più dell' altre per avventura trovarſi bituminoſa, non ha veſtigio di bitume, come il comprova l' analiſi fattane eſpreſſamente da' Signori *Lavoiſier*, *Sage*, e *Macquer*. Non ha dubbio, che indipendentemente da' ſali di *Glauber* e dalle magneſie vitriolate, che poſſono introdurſi nel mare per traſporto dalla terra, le acque marine ridotte a contenere anche i ſoli ſali proprj nativi non poſſono non riuſcire ſempre diſguſtoſamente amare, atteſo il ſal marino di magneſia che contengono, il quale è amariſſimo per natura, ſenza neceſſità di ricorrere per queſto ad alcun principio bituminoſo. Ma oltre l' amarezza ha l' acqua marina un ſapor nauſeoſo di mucido, il quale forſe unito all' apparenza foſca, e ad una certa untuoſità, che accompagnano queſt' acqua, ha dato luogo all' illuſione, e all' attribuirle un carattere bituminoſo. Non è difficile il conoſcere che queſto ſapore procede dalle materie eſtrattive degli animali, che vi periſcono continuamente, e da queſte propriamente ſi è, che mi ſembra dipendere l' apparenza, che s' è detto. In fatti ſe i ſali medeſimi, tutti quanti ſono, che avvenga di eſtrarre per un' accuratiſſima analiſi da cento libbre d' acqua marina, ſi tornino ad infondere in cento libbre d' acqua diſtillata, onde rifare per ſinteſi l' acqua marina, non ſi otterrà mai di riaverla col ſapore, colore, ed untuoſo di prima. Al che facendo ſeria attenzione, e conſiderando, che queſti caratteri ſono inſeparabili dall' acqua marina, col ſolo divario dal più al meno, e non unicamente proprj della ſuperficie, una prima conſeguenza

ſeguenza io ne traggo, che queſte materie animali ſono neceſſariamente diffuſe per tutta la maſſa dell' acqua, non già alla ſola ſuperficie coſtituite. Ma come vi ſon elle diſſeminate? Come fatte miſcibili coll' acqua e nell' acqua diſſolubili? Queſta quiſtione diſcuſſa, e riſoluta a dovere ci apre un bell' adito, onde intendere e ſpiegare moltiſſimi fenomeni di grande importanza. Mi vi fo ſtrada con un appoſito eſperimento. Nel meſe di Maggio del 1784 avendo fatto peſtare una certa quantità di animali teſtacei freſchi, e tratti dalle conchiglie, ne poſi parte a putrefarſi all'aria libera, per un' oſſervazione di cui parlerò a luogo, e parte in un gran vaſe di vetro nell' acqua dolce, cui aveva attenzione di rimettere alla ſteſſa altezza a miſura che andava ſvaporando. Laſciando a parte la putrefazione a ſecco, di queſta nell' acqua dirò, che dopo alquanto tempo ſi formò una croſta bianca alla ſuperficie, da cui poco appreſſo uſcì una gran quantità di vermi. Indi tutto ſi disfece, e a poco a poco calò la materia al fondo. L'acqua reſtò ſempre giallaſtra, e mucilagginoſa, e poco dopo che ve ne aggiugneva di nuova per rimettere l' acqua ſvaporata, e agitava la materia, tornava la ſoſtanza gelatinoſa a diffonderſi, e ne reſtava coſtantemente carica tutta l' acqua del vaſe. Dopo undici meſi decantai al peſo di una dramma di queſt' eſtratto in un bicchiere, e allungatolo con due libbre d' acqua diſtillata, v' infuſi un' oncia di ſal comune brutto come appunto proviene dall' evaporazione ſpontanea dell' acqua marina nelle ſaline d' Iſtria. Coperto il vaſe laſciai queſto meſcuglio ſei giorni in ripoſo, dopo i quali dilicatamente decantato il liquore, lo filtrai due volte, e ripoſtolo in una boccetta il conſervo tuttora, ch' è il meſe di Settembre del 1785, ſenza che vi ſia fatta alcuna precipitazione. Il color foſco, il ſapore ſalſo ed amaro, il mucido inſeparabile, tutto avvicina talmente queſt' acqua marina artificiale alla naturale che mi ſon proccurato da Venezia, che può l' una per l' altra prenderſi indubitatamente. All' oppoſito avendo in que' dì medeſimi in due libbre d' acqua diſtillata meſſo un' oncia creſcente di quel ſal comune d' Iſtria, il che è un po più di quel che contengono ordinariamente due libbre d' acqua marina naturale, e avendo filtrata la diſſoluzione, queſt' acqua ſalſa artificiale nè all' apparenza, nè al ſapore s' accoſtava per alcun modo a quella del mare, ed era pur dall' altra diverſa in cui non altro aveavi oltre alla ſteſſa quantità di ſale, fuorchè la detta piccola doſe di eſtratto animale, che ho detto. Non è dunque ſenza fondamento il credere che delle gelatinoſe ſoſtanze degli animali che tutto dì periſcono nel mare le parti craſſe ed oleoſe poſſano e debbano coll' agitazione continua dell' acque marine combinarſi co' ſali proprj e con quei che ſono nel mare diſſeminati, tanto intimamente quanto baſta per rendere il compoſto miſcibile coll' acqua, ſiccome dimoſtra il fatto, prendendo un certo carattere ſaponoſo tanto più deciſo, e meglio diſſolubile nell' acqua, quanto più a lungo vengano agitate e incorporate colle ſaline le ſuſtanze animali. Al che ſembrano già per sè diſpoſti i ſali eſſenziali degli animali in particolare, ſiccome quelli, nella compoſizione de' quali in iſtato naturale entrar debbono, ſe può dirſi, neceſſariamente parti oleoſe intimamente unite alle ſaline; di modo che poſſono riguardarſi come ſaponi naturali originarj, e perciò, indipendentemente eziandio da qualunque agitazione ſtraniera, diſſolubili nell' acque del mare naturalmente. Come però aveva conſervato in vaſe di vetro la materia animale rimaſta dietro alla prima decantazione, ho fatto un altro eſperimento col verſarvi ſopra dell' acqua diſtillata, e per più giorni andar agitando e meſcolando inſieme il liquore con quel reſto di gelatina cinque ſei volte al giorno. Queſta lunga agitazione non mancò di combinare nuova materia craſſa colle ſaline, sì che potei prepararne un nuovo liquore ſaponoſo per la fabbrica d' altra acqua marina artificiale. Il che valſe pienamente a convincermi, che poſta l' agitazione continua dell' acque del mare, almeno pel continuo e periodico fluire e refluire di loro, indipendentemente da ogni fluttuar più violento, poco aſſai della ſuſtanza gelatinoſa degli animali, che ſi disfanno nel mare, potea avervi, che in tal modo non ſi rendeſſe diſſolubile nell' acqua, e coll' acqua miſcibile in iſtato ſaponoſo.

XXXIV

Ma per illuminarmi più e più intorno alla diffuſione per queſta via delle parti craſſe degli animali per tutta la maſſa dell' acqua ho fatto queſto eſperimento. Trovandomi in Venezia preſi un po' d' acqua marina da uno de' ſuoi canali, e in una pignatta vernicata la poſi a riſcaldarſi al fuoco, finchè per evaporazione, ſi riduſſe alla quarta parte circa di quel ch' era da principio. Preſi quindi a infondervi a poco a poco dell' alcali marino fatto prima cauſtico con un po' di calce. Agitava la diſſoluzione con iſpatola continuamente ſinchè ſvaporò la maggior parte dell' acqua, e preſe il miſcuglio conſiſtenza di balſamo, di cui il colore era brunaſtro. Non ebbi difficoltà di accertarmi con ſommo contento, che me n' era riſultato un compoſto untuoſo, avente qualità ſaponacea, e perfettamente diſſolubile nell' acqua; il che certamente non poteva avvenire, ſe in quell' acqua marina non aveſſe trovato l' alcali materia oleoſa diſciolta con cui unirſi, la quale poi non poteva d'altronde per natura eſſere coll' acqua fatta miſcibile, ſe in contatto ed unione con qualche ſale non aveſſe di già preſo antecedentemente un certo carattere, imperfetto come ſi vuole, di ſapone. Non è però da tacerſi eſſere aſſai difficile coſa, che il mare poſſa generalmente tanta materia animale contenere diſciolta quanta ne contiene in particolare l' acqua de' canali in Venezia, procedente dalle abitazioni d' una grande e popolatiſſima città. Ma il riſultamento non può andare che dal più al meno, ſalvo ſempre l' effetto e la realtà di lui, che non può aver dubbio. Ed ecco anche per queſta via ricavato un indizio non equivoco del trovarſi, dietro alla decompoſizione giornaliera e perpetua degli eſſeri animali marini, diſciolto per l' acqua del mare un compoſto animale, che l' acqua di lui diſtingue da un' acqua ſemplice in cui non altro che ſali neutri e medj foſſero diſciolti, compoſto indubitatamente ſaponoſo.

XXXV.

Ma così eſſendo, non è più sì malagevole l' aprirſi una via, onde aſſegnare origine e ragione d' uno de' più ammirabili fenomeni di natura, dell' infiammazione notturna del mare. Intorno alla cauſa di lui non tutti i Fiſici convengono in opinione, altri a materia fosforica attribuendolo contenuta nel mare, altri a materia elettrica, ed altri moltiſſimi ancora da animalucci marini fosforici ripetendola concordemente. In vece di ſarne trattato, come la materia il potrebbe meritamente richiedere, eſaminando e diſcutendo tutte queſte ſentenze d' uomini per ogni conto riſpettabili, vo' piuttoſto di primo lancio eſporre i miei diviſamenti ſu la ſede delle ſperienze qui innanzi deſcritte, laſciandomi guidare dalle oſſervazioni, e dalla ragione, perſuaſo che le cure ſpeſe in diſtruggere ſieno meglio impiegate nel fabbricar di nuovo ſu buoni fondamenti. Accade di molti fenomeni naturali, che ſieno dall' umana impazienza ſpiegati prima di eſſere per ogni verſo conoſciuti. Prima che foſſero ben diſtinte le circoſtanze di queſto fosforeggiamento, e prima che ſull' intenſità e indole di queſta luce varia in varie parti de' mari conoſciuti, e varia nello ſteſſo mare alla ſuperfizie, e ſotto inſigne profondità, il più degli uomini s' era acchetato del ſiſtema de' nottiluci animaletti marini. E in fatti dopo di eſſere ſtati ſcoperti la prima volta, che io ſappia, dal Sig. *Vianelli* nelle Venete lagune, ed oſſervati diligentemente, furono eſſi anche da altri rinvenuti, e in altri mari eziandio, come può vederſi nella Relazione del Sig. *Forſter* in occaſione del ſecondo viaggio fatto dal Sig. *Cook* in compagnia di lui; anzi di molte ſpecie totalmente nuove ne ha ſatto ſcoperta ultimamente nel mar Liguſtico il ſagaciſſimo Naturaliſta Sig. *Spallanzani* (Mem. della Società Italiana Tomo II. Parte II.), sì che non può più dubitarſi nè dell' eſiſtenza di loro, nè della proprietà di fosforeggiar ſul mare. Ma non è queſta la ſola luce fosforica che ſul mare abbia luogo, come non è ſola ſu la terra quella delle lucciole notturne, e non va confuſa con la viva luce e ſcintillante che tramanda bene ſpeſſo il mare nottetempo in varie circoſtanze, di cui non mancano eſatte deſcrizioni preſſo moltiſſimi autori, e recentiſſime eziandio, tra le quali è quella dell' illuſtre Sig. Co. *Razoumovſki* (Rozier Journ. de Phys. Janvier 1784 pag. 56) dottamente e giudicioſamente fatta del 1781 ſul fiammeggiare del mar Baltico. Il Sig. *Canton*, Ingleſe oſſervatore, avendo poſto alcuni peſci nell' acqua marina, oſſervò che allorchè cominciarono a infracidarſi preſe la ſuperficie dell' acqua una certa lucentezza, che prima non aveva. A queſta oſſervazione appoggiandoſi, e forſe anche al ſapere, ch' è proprio di moltiſſime ſuſtanze organiche il fosforeggiare nell' infracidirſi, non eſitò di attribuire la luce fosforica del mare a quella che v' induce nel putrefarſi il prodigioſo numero di animali, che vi periſcono. E queſta pure è ſentenza dall' altre diſtinta, com' è quella eziandio del Sig. *Forſter*, il quale all' acido fosforico de' medeſimi animali putrefatti un tal fosforeggiar del mare in certi caſi attribuiſce, delle quali ho creduto d' uopo il fare particolar menzione e parola, perchè non vengano confuſe con quella che ſiamo qui appreſſo per eſporre. Non ha dubbio, che da principio gli animali, che periſcono nel mare, ſi gonfiano, e s' alzano alla ſuperficie. Queſto è il caſo del fosforeggiare di quelle ſuſtanze, come d' altre s' è da gran tempo oſſervato, ne' primi movimenti inteſtini di fermentazione che vi ſi eccitano, prima di giugnere all' ultimo grado della putrefazione, dietro a' quali le loro parti ſi rammolliſcono, e perdendo a poco a poco la coeſione ſi diſuniſcono finalmente. Il fosforeggiamento dunque del mare attribuito alla lucentezza degli animali in queſta circoſtanza del Sig. *Canton* ſi riduce alla ſuperficie dell' acqua, ed è attaccato a' primi gradi della putrida fermentazione che può alla ſuperficie di lei operarſi. Ciò ben inteſo, tutt' altra ſentenza certamente da queſta del Sig. *Canton* verrà giudicata quella, in cui ſi ricorra ad una diffuſione della ſoſtanza animale in perfetta diſſoluzione per l' acque del mare, e in tutta la loro maſſa dalla ſuperficie al fondo; il che totalmente decompoſti ſuppone gli animali, e in altre combinazioni aſſortiti i loro principj proſſimi per eſſere diſſolubili nell' acqua, come a' Fiſici è ben noto.

XXXVI.

Io dunque credo, che come diverſi ſono i gradi di queſto ſosforeggiare, diverſa l' indole della luce che ſi manifeſta agli occhi ſul mare in diverſe circoſtanze, e diverſi i caratteri che l' accompagnano, così eſſenzialmente diſtinte poſſano eſſere l'una dall'altra le varie luci ſosforiche, che appariſcono ſul mare nottetempo. Per la qual coſa e quello degli animalucci, e quello del Sig. *Canton*, ed altri tali fosforeggiamenti poſſono aver luogo in diverſi caſi, repugnando il fatto all' aſſegnare a tutti una medeſima origine. Ed è poſſibile eziandio che ſe ne generi in qualche circoſtanza per abbondantiſſimo concorſo di moluſche, o di altre produzioni marine, che cuoprono talvolta a tratti il mare di ſuſtanze mucellagginoſe piene zeppe di viventi; di che ſi fa menzione nel terzo viaggio di *Cook* al mar Pacifico Vol. 5 Lib. 3 Cap. 13 dell' edizione franceſe, e nel ſecondo eziandio del Sig. *Forſter* ſoprannominato. Ma conviene ben diſtinguere il tranquillo luccicar del mare in qualche momento dal ſuo ſiammeggiare in tempo di ſorte agitazione e ſcuotimento, come l' oſſervò il predetto Sig. *Forſter*, il primo de' quali non moſtra certamente di avere ſempre comune l' origine col ſecondo; ed è pur eſſenziale il far attenzione a' tratti di mare, ove queſto accade, alla profonda diffuſione di lui, all' intenſità della luce, che tramanda per non confonderlo col primo, e ſoprattutto vuol eſſere atteſo diſtintamente il fenomeno capitale che lo accompagna del moſtrarſi inerente in tutta la maſſa dell' acque marine, non alla ſola ſuperficie, o poco ſotto, una materia, la quale bruſcamente e ſortemente ſcoſſa mandi dall' acqua non una debole luce, ma quaſi fiamma, e ſprizzo di fuoco meſſo in libertà. Queſt' inſuocamento ſi manifeſta particolarmente di notte nelle grandi ondulazioni dell' acque del mare, quando ſi ſpezzano le onde, e più ſovente ne' profondi ſolchi fatti da' vaſcelli in corſo, ove le falde s' infiammano e gettano fuoco, e più nel ripercuoterſi che fanno inſieme al riempierſi del ſolco. Talvolta ſi oſſervano nelle grandi burraſche uſcir nelle colliſioni de' flutti come ruſcelli di fuoco, e ſopra tutto le ſpume abbondantiſſime, che ſi generano in queſte occaſioni, ſembrano tutte infiammate. E di queſto fiammeggiare parlando il Sig. *Spallanzani* ſi è, che il crede proprio inſeparabilmente dell' acque marine; nel che vedremo apporſi egli al vero qui appreſſo ancorchè ingenuamente confeſſi di non aver preſentemente alla mano fuorchè conghietture intorno all' origine di un tanto fenomeno. Deſidero che le ſperienze, ch' ei ſi propone di fare, ratifichino quello che qui ſon per dire ſu queſto argomento.

XXXVII.

Laſciando intanto da parte gli altri particolari ed accidentali fosforeggiamenti, che or da congerie di animaletti nottiluci, come s' è detto, or da moluſche, ed or dall' una or dall' altra delle cagioni addotte da' Fiſici poſſono eſſere originati, a queſto ſingolarmente, che da magiſtero più recondito deriva, volgiamo il penſiero. Fatto innegabile ſi è, che tutto ciò che ha vita nel mare, periſce pur nel mare, generalmente parlando, e nel mar ſi decompone. Dunque della prodigioſa quantità di eſſeri organici, che vi ſi producono, e disfanno continuamente, e ſi riproducono per perirvi di nuovo con quella ſteſſa perpetua circolazione, che ammiriamo in tutte le altre claſſi di eſſeri vegetabili e animali del noſtro ſiſtema terreſtre, parte depoſita morendo nell' Oceano e reſtituiſce ſeparati i principj, ond' era organizzata, e parte a vicenda ne riaſſume di nuovi, e prende a vivere. Altro fatto pertanto da non poterſi negare ſarà, eſſere l' Oceano un vaſto depoſito di ſimili principj, altri in ufficio, operoſi, e combinati nell' organizzazione degli eſſeri viventi, ed altri inoperoſi, come accade ſu la terra, e nell' atmosfera, che ci circonda, per poco che vi ſi rifletta. E appunto le ſperienze, che abbiamo eſpoſto ne' §. §. XXXIII. e XXXIV. nel dimoſtrare ad evidenza, che i principj gelatinoſi degli animali marini diventano col tempo nell' acqua un compoſto ſaponoſo, paleſano chiaramente il carattere che prendono queſti principj che ho detto inoperoſi nell' Oceano, che però non lo ſono, come vedremo. Diſgregate le parti coſtituenti, le terroſe puramente, non combinate con alcun principio, precipitano neceſſariamente al fondo ; ma dell' altre, oltre i ſali , tutte quelle, che contengono olio , rientrano in diſſoluzione nell' acque del mare, e vi ſi mantengono non per via meccanica puramente, ma sì bene per l' intermezzo de' principj ſalini, che le rendono miſcibili coll' acqua. Imperciocchè e gli olj, che ſotto forme di graſſi non ſono propriamente combinati con altri principj animali , e quelli che generalmente ſono involti nelle ſuſtanze gelatinoſe, tutti quanti ſono, trovano preſenti da ogni canto de' principj ſalini, che hanno azione ſopra di loro, sì che preſto o tardi con eſſi ſi combinano formando de' compoſti ſaponoſi , i quali ſi rendono per queſto mezzo perfettamente diſſolubili nell' acqua. Ammeſſa pertanto, che non può non ammetterſi , la formazione neceſſaria nel mare di queſte ſuſtanze ſaponoſe , dietro al disfacimento de' corpi organici, che vi periſcono , e vi ſi decompongono tutto dì , concepiamo immediatamente il facile e sì copioſo generarſi delle ſpume nell'acque marine agitate, e donde abbia origine non alla ſola ſuperficie , ma in tutta la maſſa dell' acque il mucido, che le accompagna, il nauſeoſo. Sfugge tutto ciò nelle analiſi , e non reſtano per prodotto che i ſali; ma non è per queſto men vero , eſſere un tal carattere ſaponaceo diſtintivo e proprio dell' acque del mare. Di qua per avventura viene quell' apparenza bituminoſa , che non pel ſolo amaro s' è a queſt' acque attribuito . Che coſa ſono i bitumi ? Compoſti di ſuſtanze oleoſe e di materie saline . La proprietà caratteriſtica de' bitumi è di cominciar dall' eſſere materie ſaponoſe, e non è che col tempo che di ſaponi diventano elle bitumi . I bitumi per mio avviſo non ſono che vecchj ſaponi. Queſto principio , queſto germe , ſe così può dirſi, eſiſte in tutte l' acque marine , ove vivono animali , dal che contraggon eſſe a lungo andare un certo che di preparazione bituminoſa, per così eſprimermi, abbozzata . Anzi non ſono lontano dal credere che molta parte de' bitumi foſſili tragga particolarmente la ſua origine da' depoſiti di ſuſtanze organiche fattivi dal mare , e per vetuſtà divenuti bituminoſi. Ciò ſi potrebbe provare con molti fatti, ſe qui cadeſſe in acconcio l' argomento.

XXXVIII.

Ma ſe deve eſſere incontraſtabilmente inerente in tutta la maſſa dell'acque marine queſta ſoſtanza ſaponoſa animale, del che non può dubitarſi, ſe tanta parte de' viventi nell'Oceano ſi riſolve finalmente, e termina coll' aumentarne tutto dì la maſſa in diſſoluzione, come in tanti ſecoli e dietro alla diſorganizzazione di tanta immenſità di animali, che vi ſono periti neceſſariamente, non ſe n' è ſaziato, per così dire, l' Oceano, ed è sì lontano dall' eſſerlo? Quiſtione che può farſi ragionevolmente graviſſima, e di non facile riſoluzione, ſe non venga alla mente di ricorrere a quell' ammirabile economia con cui natura provvede alla ſuſſiſtenza di tutti gli eſſeri, che di continuo nutrimento e riſacimento abbiſognano. Raccogliamoci pertanto a conſiderare profondamente ciò che accade ſotto gli occhi noſtri. Al perire e diſfarſi continuo di tanti vegetabili, di tanti animali ſu la terra che abitiamo, è contemporaneo pure il nutricarſi, e il ricreſcere d' altri ſucceſſivi eſſeri, che ſottentrano a goder della vita. Le ſpoglie, i principj diſgregati degli eſtinti riformano le ſpoglie, i principj aggregati, e coſtitutivi de' viventi con un' ammirabile circolazione, la quale aſſolve da nuove creazioni, e concilia la ſuſſiſtenza e conſervazione di tutto col rimpaſtare, e adoperar ſotto varie forme la quantità determinata di materia, che coſtituiſce il ſiſtema terreſtre.

Ed ecco con qual ſegreto magiſtero un certo equilibrio pure ſi mantiene nell' Oceano, ſervendo gli eſtinti per paſcolo della vita, per incremento degli eſſeri rinaſcenti, sì che la ſoſtanza di quelli non è altramente inoperoſa, nè può creſcere a diſmiſura, rientrando di mano in mano nel circolo delle ſoſtanze in opera, neceſſarie alla vitale coſtituzione di queſti. E così la quiſtione è riſoluta, e può molto bene intenderſi perchè ſia tanto lontano il mare dall' eſſere ſatollo di ſpoglie de' ſuoi morti abitatori, e limitate, non a ribocco, vi ſieno in diſſoluzione le ſuſtanze oleoſe combinate, che dicemmo.

XXXIX.

E qui ſiamo pervenuti al ſegno, onde muovere per la ſpiegazione, ſecondo che a me pare, chiariſſima dell'infiammarſi dell'acque marine in certe circoſtanze. Toſto che ſiamo convinti dalla ragione e dal fatto della preſenza di quelle ſuſtanze diſciolte per l' acqua, inerenti e diffuſe in ogni parte, e non poſſiamo dubitare, che in quelle non riſieda copioſiſſimo il fuoco, anzi nella più grande abbondanza, e direi quaſi come in luogo nativo, la luce, che ſprizza dal mare violentemente ſcoſſo, viene indubitatamente dalla libertà ed azione in cui è meſſo quel fuoco combinato. Imperciocchè è certo che il ſuo più vivo manifeſtarſi accade allorchè le parti, ov'egli riſiede in iſtato oleoſo, ſono fortemente percoſſe, e meſſe in potentiſſimo fregamento. In queſto ſtato riſulta ſenza dubbio nella maſſa dell' acqua un moto inteſtino di oſcillazioni o vibrazioni di tutte le ſue parti, tanto più forte quant' è più gagliardo lo ſcuotimento. Quindi un riſcaldamento dee ſuccedere neceſſariamente, e aver luogo nell'acqua, come l' avrebbe in ogni altro corpo ſolido le di cui parti foſſero in ſimili circoſtanze coſtituite. In fatti il Sig. *Phips* trovò, che il mercurio di un termometro dal grado 50.° in cui era poco prima alla temperatura dell' acqua del mare non agitato, balzò al grado 62.° immerſo nel mare ſcoſſo, e burraſcoſo. Ma non ha biſogno di eſſere verificato coll' eſperienza ciò che dal fatto è tutto dì confermato pienamente. Pertanto in proporzione dell' intenſità di queſto riſcaldamento, e della ſucceſſiva dilatazione di quella ſoſtanza ſaponoſa, che ſi trova inerente nell' acqua marina, prende il fuoco contenuto a ſloggiarſi, a rompere i ſuoi vincoli, e farſi più o men libero, attivo, e manifeſto fuor d'acqua, avendovi, oltre all'aria deflogiſticata ſomminiſtrata dall' acqua medeſima, preſente quella che ſa parte dell' atmosfera in contatto, e tutto in opera ciò che può ſviluppare in un baleno il principio infiammabile da' corpi che il contengono. Voglia o no da' Fiſici attribuirſi la luce di tutte le ſuſtanze fosforiche ad una combuſtione lenta e debole quant' eſſer ſi voglia, d' una certa quantità di flogiſtico, ch' è in eſſe contenuto, il caſo del mare luminoſo va diſtinto da quello de' corpi fosforici, ne' quali il principio infiammabile può eſſere ſtraniero. Imperciocchè le ſoſtanze, onde ripetiamo il fuoco che ſi manifeſta nel mare, ſon vere e reali materie combuſtibili o infiammabili, ove la materia del fuoco entra come principio coſtituente. Quindi è, che portate elle per iſcuotimento, come dicemmo, a calore, e da queſto ad incandeſcenza, producono tutti i fenomeni del fuoco in azione, come fanno le ſuſtanze combuſtibili. E qui veggiamo appunto verificarſi ciò che accade per queſta parte di tutte le ſoſtanze vegetabili ed animali decompoſte, nelle ſpoglie di cui reſta appiattato il fuoco, e ſprizza libero in tante guiſe per ſin da' letamaj, da' cimiterj, dalle fogne, e continuamente poi con lievi ſcuotimenti ſotto forma d' aria infiammabile dalle paludi, dalle foſſe, dall' acque ſtagnanti, come l' ha sì bene eſpreſſo, e ricavato in tante guiſe il celebre Sig. *Aleſſandro Volta*, come a tutti è noto. Quello ch' eſce dal mare è della ſteſſa natura, dalle ſteſſe cauſe procede, ed ha l' origine anch' eſſo dalle ſoſtanze organiche decompoſte, che vi ſono inerenti e ſparſe dappertutto, e ſegnatamente da quelle che il fuoco racchiudono in iſtato oleoſo. In queſto modo la proprietà del mare di diventar ardente e luminoſo nottetempo, diſtinta da quella che accidentalmente può avere per altre cagioni recate in campo da' Fiſici, non è della ſuperficie di lui ſolamente, ma di tutte le profondità, e inſeparabile dall' acque marine. E s' intende poi come una tal luce, e in qual ſenſo debba dirſi foſforica, atteſo che proviene ella da vera combuſtione d' una certa quantità di flogiſtico contenuta in quelle organiche materie. Quindi è che come dipende la quantità di queſte ſoſtanze diſciolte dalla quantità de' corpi organici, che ſi decompongono, maggiore in una che in altra parte del mare, ſecondo che di quegli eſſeri è egli più in una che in altra parte popolato; così la quantità di fuoco in procinto di metterſi in libertà diverrà per queſto conto più in una, che in altra parte dell' Oceano abbondante. Ma l' azione di lui, e in conſeguenza il fiammeggiar del mare, dipenderà eziandio, in parità di copia, dall' eſſere la materia nel convenevole ſtato di attenuazione, dalla vibrazione e oſcillazione più o men forte, che le ſarà impreſſa, dal modo con cui verrà ella ſcoſſa ed agitata; come pure il renderſi ſenſibile agli occhi più o meno in diverſe occaſioni dipenderà dalle ſtagioni per avventura, dalla temperatura, e dallo ſtato umido o ſecco dell' atmoſfera, dal ſoffiar de' venti, e da altre tali circoſtanze.

Quindi tutte le variazioni alle quali queſto bel fenomeno va ſoggetto, il non darne alcun ſegno in moltiſſime occaſioni, e in altre moltiſſime il renderſi coſpicuo per grandi tratti di mare, e l' intenſità di lui diverſa in diverſi mari, e ne' diverſi tratti dell' iſteſſo mare. E non è in oltre da taceſi la conſiderazione che ſo non inopportuna dell' eſſere indiſpenſabile per la verificazione di queſte accenſioni, che le ſuſtanze organiche diſciolte per l' acque del mare contenenti il principio infiammabile ſieno all' ultimo grado di putrefazione pervenute sì, che, come quelle delle paludi e degli altri ammaſſi putrefatti, ſi trovino in procinto di dar uſcita ad un *gas* infiammabile, e al fuoco libero eziandio, dietro all' incandeſcenza indotta per colliſione e agitazione più gagliarda. Ed è sì fatta condizione talmente neceſſaria, che ſarebbe ſenza di eſſa inutile il concorſo di tutte le altre circoſtanze favorevoli per la produzione di un tal fenomeno, come accade tutto dì ne' cimenti che ſi fanno ſu le materie animali e vegetali, dalle quali non eſce il *gas* infiammabile, ſe naturalmente o per opera d' intermezzo ſtraniero non ſon eſſe decompoſte.

Della decompoſizione del ſal marino

XL.

Ma ſe qualche barlume abbiamo conſeguito precedentemente intorno al ſal marino, e a' principj proſſimi di lui, che abbiamo veduto riſiedere negli animali viventi dell' Oceano; e ſe dal trovarſi al natro libero congiunta la magneſia ne' medeſimi animali, traluce pur chiaro non eſſere accidentale la coſtante unione nel mare de' ſali marini a baſe di natro, e di magneſia, non s' è però aperto ancora alcun adito, onde comprendere di quai mezzi ſi ſerva la natura per decomporre queſti ſali, ſe mai il fa, e ſegnatamente il primo ch' è perfettamente neutro. Imperciocchè può ſempre muoverſi quiſtione, come l' abbiamo toccato altrove, ſe que' principj liberi negli animali vi ſieno in quello ſtato di ſeparazione primigenj, o provenuti da' ſali marini decompoſti. Ancorchè dunque, come della terra calcarea s' è detto al §. XXIX. per riſpetto agli eſſeri organizzati, poſſa del natro e della magneſia dirſi parimente non eſſere repugnante in natura l' eſiſtenza di loro indipendente dal ſal marino, non ſarà fuor di propoſito il fare qualche trattazione particolare della decompoſizione di lui, sì perchè l' argomento è utiliſſimo in sè, e sì ancora perchè verremo a conoſcere a quali potenti azioni ſia d' uopo ricorrere per ottenerla.

XLI.

Non v' ha ſale in natura il quale da sè poſſa decomporſi giammai, ſe un agente ſtraniero non s' interponga, il quale eſercitando un' affinità prevalente ſopra uno de' due principj proſſimi del ſale, laſci iſolato l' altro, e il metta in libertà. Si ſcorrano tutti i proceſſi della Chimica ſopra i ſali, tutte le tramutazioni, tutte le precipitazioni, non ſi troverà giammai caſo in cui ſiaſi fatta una decompoſizione che a queſto principio non ſi riduca, e in cui non poſſa additarſi la preſenza di tale o tal altro intermezzo, che l' abbia operata. Poſto ciò la quiſtione del decomporre il ſal marino ſi riduce a quella del trovare un agente il quale o prevalendo all' alcali ſiſſo in affinità coll' acido marino, metta l' alcali in libertà, o prevalendo all' acido marino in affinità coll' alcali, laſci libero e iſolato l' acido marino. E come in tutti e due i caſi un ſolo de' principj è libero, e ricombinato l' altro, è bensì fatta la decompoſizione del ſale, ma per avere anche l' altro principio di lui libero totalmente è neceſſario di nuovo, che la ricombinazione accaduta ſi disfaccia sì, che quel principio reſti anch' eſſo ſciolto ed iſolato, come l' altro. Ed eccoci in via onde cercare la libertà di entrambi i principj coſtitutivi del ſal marino. Ma laſciando a parte i proceſſi per riſpetto all' acido marino, triti e notiſſimi, rivoltiamoci a quello che più importa, ch' è di ottenere l' alcali ſiſſo, il natro diſimpegnato e libero, qualunque ſia il nuovo ſtato della parte acida diſcacciata. Due ſtrade ci ſi offeriſcono da conſiderare per queſt' oggetto, immediata l' una, e l' altra mediata, di cui ſi fe cenno qui innanzi, cioè quella di far invadere l' acido a qualche ſuſtanza, perchè reſti libero l' alcali, e l' altra di rapir l' alcali all' acido marino con un intermezzo il quale ſia in appreſſo molto più agevole da sloggiarſi, che non era di primo lancio l' acido marino. E quanto alla prima, è certo, che vuol eſſere fiſſa quella ſuſtanza, e più che non è il natro affine all' acido muriatico, perchè poſſa impadronirſi di queſt' acido, e mettere il natro in libertà. Ma per tutte le ſperienze, e i tentativi fatti ſino al dì d' oggi non ſe n' è conoſciuta alcuna ne' regni della natura, la quale compiutamente abbia precipitato l' alcali fiſſo totalmente libero e puro dal ſal marino. E qui non ſia chi equivochi buonamente intorno al decomporſi di queſto ſale che ſi fa per arte tutto dì, che non va confuſo con quello in cui ſia l' alcali compiutamente liberato dall' acido marino, e fatto libero per opera di affinità ſemplice. Il caſo del Sig. *Bergman*, di cui farò menzione in fine di queſta Memoria, ſe riceveſſe quell' univerſale ſanzione, che richiedono i fatti capitali nella Fiſica, ſarebbe per grande avventura la vera decompoſizione, di cui qui ſi fa parola, e il ſarebbe pure l' altro proceſſo col litargirio già noto, ſe la decompoſizione rieſciſſe compiuta e totale, e aveſſe egli i caratteri che ſi dimandano per eſſere uſato in grande, prontamente, ed economicamente. Intanto è certo, che nè pure il fuoco, quell' agente potentiſſimo di natura, cui par che non reſiſta alcuna coſa, il più fiſſo per avventura di tutti, è ſtato valevole a compier l' opera per quanti ſaggi n' abbiano fatto, e ripetuto i più valenti Fiſici. S' è dovuto conchiudere ſempre, che l' acido marino non ha diſpoſizione a combinarſi con lui, e che non è egli l' agente proprio per la decompoſizione del ſal marino, il che fa intanto comprendere, che il liberar l' alcali dal legame coll' acido marino direttamente, immediatamente, e compiutamente, non è operazione comune, e da appropriarſi leggermente o all' attenuarſi ſenza confine del ſale nel far parte ſoſtanziale degli eſſeri organici (che non è poi che una meccanica diviſione, non mai una vera decompoſizione), o alla combuſtione anche la più violenta, che non fa che renderlo volatile, e ſublimarlo eziandio, non mai decomporlo veramente. Sinchè dunque per un tal verſo ſtanno entro sì ſtretti limiti coſtituite le noſtre cognizioni, e ſinchè qualche nuova affinità prepotente di ſuſtanza tuttora non cimentata non ſi diſcuopra che diſimpegni l' alcali perfettamente, e in tutta la ſua purità, non è tempo perduto l' appigliarſi all' altro partito, onde s' è fatto parola, in cui non ſono certamente tutti meſſi in opera i mezzi più acconci, onde ottenere l'alcali puro che ricerchiamo con due operazioni ſucceſſive.

XLII.

Avendo in mira un profitto in grande, e non riſtretto a' puri ſaggi di laboratorio, due ſoli poſſono dirſi gli acidi famigliari e abbondanti, onde poſſiamo con la prima delle due operazioni ſcacciare l' acido muriatico dal ſal marino, e prepararſi alla ſeconda col facile, comune, e notiſſimo mezzo della combuſtione, cioè l' acido nitroſo e il vitriuolico. Ma di nuovo nè l' abbondanza dell' acido nitroſo libero, nè il prezzo di lui, e nè meno la copia de' nitri nativi, non poſſono forſe giammai prometterci riuſcimento in grande da preferirſi a quello che può venirne coll' uſo de' ſali medj vitriuolici di cui riboccano le viſcere della terra. E quand' anche, com' è avvenuto di ſcorgere all' illuſtre Naturaliſta Sig. *Fortis* a Molfeta nel Regno di Napoli con inſigne profitto del Governo, e non ſenza laude ed onore di lui per la ſingolarità del caſo, e per la ricchezza del prodotto, ſi trovaſſe in gran copia qua e là ammaſſato il nitro ſpontaneo, o il ſi poteſſe abbondantemente procacciare coll' arte, è egli un ſale per sè troppo prezioſo alle arti, perchè debba cedere ad altri uſi, e a' biſogni dell' alcali marino che poſſono in altro modo ſoddisfarſi. Per eſcluſione adunque, ſenza che mi fatichi a dimoſtrarlo più minutamente, ſiamo pervenuti a trovare più acconcio l' uſo dell' acido vitriuolico per la prima decompoſizione del ſal marino, parlando ſempre di operazioni in grande, giacchè, come s' è detto, n' è sì grande la copia, e a sì vil prezzo, combinato con baſi metalliche e terroſe ſotterra. E' noto, che meſcolando il ſal marino con qualcuno di queſti ſali vitriuolici metallici o terroſi, e ſottomettendo il meſcuglio a gagliardo fuoco, ſi ottiene di ſloggiare dall' alcali fiſſo del ſal comune l' acido marino, di ſoſtituirvi il vitriuolico, e di formare il ſal di Glauber, il natro vitriolato. E ſi ſa pure che col flogiſtico ſi torna poi, ch'è la ſeconda operazione, a sloggiar l' acido vitriuolico, mettendo in piena libertà l' alcali marino. Aſtenendomi pertanto dal rimembrare qui altri proceſſi comuni, conoſciuti dagl' intendenti, e praticati in varie fabbriche, mi contenterò di eſporre ciò che m' è riuſcito di ſcuoprire di nuovo intorno alla prima operazione, cioè intorno al fare il ſal di *Glauber*. Dirò poi quello che ho ſperimentato intorno alla ſeconda.

XLIII.

Qualora vogliamo fare attento eſame ſopra un' infinità di ſenomeni, che intravengono ne' regni di natura tutto dì per iſpontanee operazioni, non havvi per avventura momento in cui non ſiamo in grado di ſorprendere nell' atto del farſi e converſioni, e tramutazioni maraviglioſe. Elle non ſono ordinariamente che opere di affinità eſercitate, ed effettuateſi in ſilenzio gradatamente per contatto di ſoſtanze tendenti ad unirſi, e coll' ajuto d' altri intermezzi ſuſſidiarj, come ſono il calore, l' aria, l' acqua, ed altri tali agenti, alcuni de' quali entrano pure a far parte integrante delle nuove produzioni, ed altri non ſono che veicoli delle traslazioni e permutazioni di principj, che ſuccedono tacitamente. La ſola produzione del vitriuolo e dell' allume per iſpontanea decompoſizione delle piriti marziali ne ſia d' eſempio, quant' altro mai, lumino ſo e familiare. Non manca agli uomini, che la pazienza, frettoloſi di veder tutto ſul momento, e non riflettendo, che moltiſſime operazioni non ſi ſan dalla natura che con lentore, avuta anche l' attenzione di prepararle il laboratorio, e di mettere le ſoſtanze operaje nelle convenevoli circoſtanze. Si crederebbe, che meſcolando poco più di due parti di vitriuolo marziale, ed una di ſal marino, mantenendovi un po d' umido, agitando di tempo in tempo il meſcuglio, a capo di quaranta o cinquanta giorni non ſi trova più veſtigio di ſal marino, nè di vitriuolo, e un perfetto ſal di *Glauber* vi ſi genera, e prende il luogo di tutti e due? Queſto bel fenomeno è il prodotto di doppia decompoſizione operata dalla natura in ſilenzio. Io ho ripetuto l' eſperienza più volte, e l' ha pur ripetuta qualche mio amico, ſenz' altro umido,

umido, che il naturale dell' acqua di criſtallizzazione de' due ſali meſcolati, e ſi è ſempre conſeguito il ſal di *Glauber* ben caratterizzato. Compariſce egli peraltro talmente legato con la terra marziale, che le filtrazioni non poſſono altramente ſepararli. L' eſpediente prontiſſimo che ho trovato per una compiuta ſeparazione è quello di una forte calcinazione per alcuni minuti di tempo; sì che non dubitai di conchiudere, che non era pura ocra marziale quella ſuſtanza sì aderente al ſale di *Glauber*, che andava con eſſo in diſſoluzione nell' acqua, e paſſava pel filtro, ma in gran parte ſale marino a baſe di ferro, ſattaſi non la ſola combinazione dell' acido vitriuolico col natro, ma quella eziandio dell' acido marino sloggiato dal vitriuolico col ferro da queſto abbandonato; e quella calcinazione era poi baſtevole a decomporlo. Ed ecco per queſta via intanto fatta la prima decompoſizione, e ottenuto il ſale prezioſo di *Glauber* non con altra ſpeſa, che con quella del ſal marino e del vitriuolo, la quale può eſſere tenuiſſima in grande, trattandoſi di prodotti comuni, e del ſal marino particolarmente, il quale nelle regioni marittime può ridurſi a viliſſimo prezzo, e non con altro proceſſo che di meſcolare i due ſali vitriuolico e marino nella doſe detta qui ſopra, e abbandonar a natura l' operazione. L' avere altra volta trovato, e confermato con incontraſtabili ſperienze, che il ſal marino vien decompoſto dal nitro terroſo, col ſolo tenere meſcolati e un po umidi i due ſali, ſenz' altre operazioni ſuſſidiarie, m' induſſe a tentare la ſteſſa decompoſizione mettendo col marino in contatto un vitriuolo di marte, e vi ſono riuſcito perfettamente; il che certamente prima d' ora non era noto, come me ne ſono accertato col riandare i migliori e più applauditi trattati di Chimica, diſpoſto com' era a darne laude a chi m' aveſſe in queſto utiliſſimo e facile proceſſo prevenuto. Del che può anche indirettamente far fede il prezzo officinale del ſal mirabile che tuttavia ſuſſiſte in Europa, e del non eſſerſi, come troppo diſpendioſo, ſoſtituito giammai a' ſali d' Epſom, e a' ſali analoghi, il ſal mirabile da preferirſi per ogni conto a tutti i ſali cattartici conoſciuti. Mentre ſe la compoſizione n' è sì facile, e sì lieve il prezzo che può avere, in qualche parte avrebbe preſo piede, ſe il proceſſo foſſe ſtato diſcoperto da qualcuno. Se ſi conſideri che 100 libbre di ſal di *Glauber* criſtallizzato ne contengono ſecondo il *Bergman* 15 di natro, 27 d' acido vitriuolico, e 58 d' acqua di criſtallizzazione, e che 100 libbre di ſal marino criſtallizzato ne contengono 42 di natro, 52 d' acido marino, e 6 di acqua, e che finalmente 100 libbre di vitriuolo marziale criſtallizzato ne contengono 23 di ferro, 39 d' acido vitriuolico, e 38 di acqua, con un facile calcolo ſi troverà che meſcolando parti $2\frac{6}{21}$ di ſal marino con parti $4\frac{24}{39}$ di vetriuolo marziale, ſi può ottenere parti $6\frac{2}{3}$ di ſal mirabile di *Glauber* criſtallizzato. E qui appariſce il grande utile di queſto trovato, avuto rifleſſo al lieve prezzo de' ſali ingredienti, e alla quantità del ſale glauberiano che ne riſulta, non eſſendo da farſi alcun caſo della calcinazione neceſſaria per la decompoſizione finale, che s' è detto, del ſal marino a baſe di ferro, e ſeparazione ſucceſſiva dell' ocra marziale. Il tempo preſcritto de' 50 giorni in circa di ripoſo per la decompoſizione mutua de' ſali vitriuolico e marino ſi accorcia moltiſſimo, ſe i ſali non ſieno tanto impuri, sì che il contatto loro non ſia turbato da ſtraniere materie. S' è pertanto ottenuto di rapire l' alcali all' acido marino con un mezzo aſſai ſemplice, e di averlo in combinazione nel ſal di *Glauber* con un acido ſu cui il fuoco ha azione, come a tutti è noto, più che non ha l' alcali fiſſo con cui è combinato.

XLIV.

Quanto dunque alla ſeconda operazione inteſa a diſciorre col fuoco queſto nuovo legame, e a sloggiare dall' alcali l' acido vetriuolico, onde conſeguir libero e puro il natro che cerchiamo, eſſendo ella notiſſima e familiare agl' intendenti, m' avviſai di far coſa non ancor fatta, ch' io ſappia, cioè di condurre a termine una vetrificazione compiutamente meſcolando ſu le prime ſal di *Glauber* con rena (Macquer Dict. de Chim. ſec. edit. Tom. III. pag, 463.). Si doveva in queſto proceſſo vedere gradatamente, per l' affinità grandiſſima e primaria che ha l' acido vitriuolico col flogiſtico, generarſi da principio un vero zolfo, e queſto poi bruciarſi; fatto poi libero l' alcali, diventar egli fondente immediato della rena, e compierſi indi a poco la vetrificazione. A queſt' oggetto per eſſere ſpettatore di tutto volli far l' operazione ſu' carboni acceſi colla lampana, e col ſoffietto a bocca coll' ajuto di pratica perſona, e avvezza a far uſo di ſimili ordigni. Preſe pertanto dodici parti di ſal di *Glauber* sfarinato, e otto di quella rena finiſſima, che ſi adopera nelle fabbriche di Murano, e meſcolate inſieme, ſi ſottopoſe il meſcuglio alla fuſione ſopra un groſſiſſimo pezzo di carbone, ove s' era ſcavato e preparato con altri carboni ſuſſidiarj un fornello a riverbero. Da principio ſi liquefece il ſale, indi ſi rappreſe, e s' indurò la maſſa. Poco dopo cominciò ella a diventar paſtoſa, e a bollire a ſcroſcio; poi apparvero alcune macchie alla ſuperficie, le quali allargandoſi mandavano una fiamma giallognola, e più e più carica ſucceſſivamente. L' odore che n' uſciva era di zolfo. Ma poco appreſſo ſi vide per ogni parte fiammeggiare il zolfo patentiſſimo, il quale andava formandoſi e diſſipandoſi di mano in mano per combuſtione, e ſingolarmente di ſotto nell' alzare che facevaſi con un ferro la maſſa in fuſione. Si ſoſpeſe il lavoro, e laſciata raffreddare la materia, aveva ella un color roſſo oſcuro, e un odore inſoffribile, e fetente. Vi riconobbi manifeſtamente il fegato di zolfo, il che dimoſtrava che già aveavi dell' alcali libero combinato col zolfo non ancora combuſto. Ripreſi pochi dì dopo l' operazione ſul fegato, e cominciò a ſcemare ſotto l' azione del fuoco la materia, e ceſsò finalmente di comparire fiamma di zolfo. La maſſa preſe indi a filare, come vetro fuſo, e poco dopo ceſſato il lavoro, e raffreddata la materia, n' ebbi un vetro deciſo traſparente. Il tutto inſieme ſi fece in poco più di 50 minuti.

XLV.

Se vogliamo pertanto dar fede a' fatti, non ha dubbio, che parecchi vantaggi poſſiamo da queſte ſperienze ricavare. E primamente è certo che col più facile e men diſpendioſo proceſſo che poſſa immaginarſi potremo proccurarci in avvenire il ſal mirabile; ſale prezioſo in sè quant' altri mai, quand' anche il ſi conſideri dal canto ſolamente della medicina in qualità di ſal cattartico, più acconcio incomparabilmente de' terroſi che ſono in uſo d' Epſom, di Sedlitz, di Modena, e di altri ſimili a baſe di magneſia, sbandendo dalle officine il preteſo ſale d' Inghilterra, che dalle acque-madri delle ſaline Loreneſi proviene, e di cui il baſſo prezzo rende tollerabile il nauſeoſo, l' irritante del ſal marino terroſo che vi predomina. Secondariamente apprendiamo non occorrere altri intermezzi per trar l' alcali dal fegato di zolfo, fuorchè la continuazione del fuoco, sì che poſſiamo prometterci di ottenere con la ſola combuſtione del zolfo ſoſtenuta il natro in tutta la più deſiderabile purità; e ſi conoſce in oltre, che per l' arte vetraria non è d' uopo fare anticipatamente ſeparata decompoſizione del ſal mirabile, compiendo il fuoco da sè tutti i paſſaggi, e tutte le operazioni ſucceſſivamente sì del decomporre quel ſale, che del diſſipare il zolfo, e del convertire per fine in fondente l' alcali meſſo in totale libertà.

Del promuovere la raccolta dell' alcali-baſe del ſal marino

XLVI.

E qui cogliendo il frutto di tutte le diſamine precedenti ci faremo a riandare, e mettere a profitto i mezzi più acconcj, onde promuovere vie più a pro delle arti la produzione dell' alcali marino, della cui natura è or fatta più intima cognizione, che non era per l' addietro. Laſciamo pertanto a parte quello di cui s' è fatto qui innanzi trattazione particolare, conſiſtente nel ricavare queſt' alcali per decompoſizione del ſal marino direttamente, mezzo ch' è pur praticabile in grande con moderatiſſima ſpeſa, e non ſenza vantaggio dell' arte vetraria ſingolarmente ſiccome abbiamo veduto, atteſa la facilità che abbiamo ſcoperto di conſeguire il natro vitriolato, o il ſale di *Glauber*. E prima di tutto parliamo della ſoda. E' queſta, come tutti ſanno, e come s' è detto nel §. I, la cenere ſemiſuſa del Kali, pianta volgarmente detta riſcolo, o roſcano tra noi, dalla cui liſciva ſi trae quel medeſimo ſal fiſſo, baſe del ſal marino, che abbiamo comunemente detto natro. E' quiſtione, ſe queſt' alcali trovato così nel regno vegetabile, vi ſia originario e proprio, oppure ſtraniero, e ſe vi ſia preeſiſtente alla combuſtione. Le moltiſſime ſperienze, ch' ebbi a fare negli anni ſcorſi ſu le piante e marine, e marittime, e ſu le terre de' fondi ſteſſi, ov' elle allignano, cui eſpoſi nel 1781 in uno ſcritto particolare citato dal celebre Sig. *Scopoli* in una nota alla voce Soda del Dizionario di Chimica del Sig. *Macquer* da sè volgarizzato, e ch' è nelle mani di molti, m' hanno ſomminiſtrato occaſione di avvicinarmi al ſuggetto, e di prender non pochi lumi ſu queſta quiſtione, sì che ebbi fondamento di conchiudere, che queſt' alcali è ſtraniero alle piante, e accidentale. Imperciocchè ſenza riportar qui per minuto, che andrebbe in lungo, tutte le particolarità di quello ſcritto, dirò ſolamente, che avendo fatto eſpreſſa raccolta nelle Lagune Venete di grande quantità di alghe, e di altre piante moltiſſime del genere de' fuchi, ma tutte creſciute e viventi ſott' acqua, e avendole ſeccate e combuſte diligentemente in vaſi di ferro all' aria libera, non ſenza grandiſſima pazienza e a grande ſtento ho potuto ſcuoprirvi traccie d' alcali marino libero, piene, come holle trovate, di pretto ſal marino. Così accade, come l' abbiamo dal Sig. *Macquer*, delle ceneri del Varec di Normandia, detto altrimenti *Goemon* e *Sar* in Brettagna. All' oppoſito toſto che non di piante viventi ſott' acqua o marine propriamente, ma di quelle ſi tratti, che creſcono ſu' fondi marittimi ſcoperti, il prodotto è tutt' altro, e vi ſi trova nelle ceneri con altri ſali meſcolato pure in copia l' alcali marino libero. E non è da tacerſi, che non già nel ſolo Kali, ma in cent' altre piante, che ſarebbe inopportuno il nominare, nodrite in que' fondi, ho ſempre trovato annidarſi quell' alcali; e particolarmente nella claſſe de' cardi il carcioffo (di cui abbruciava il fuſto con tutte le foglie) coltivato ne' fondi ſalmaſtri non cede per avventura in ricchezza di queſto ſale al Kali medeſimo, che ſembra eſſere la pianta privilegiata, come me ne ſono aſſicurato più e più volte. Ho coſtantemente oſſervato, che volevano le piante eſſere creſciute in terreni abbandonati dal mare, e non più ſuggetti alle maree. La quantità del ſal marino più e più creſceva, e diminuivaſi la quantità dell' alcali nelle liſcive delle ceneri, a miſura che la pianta era ſottopoſta ad eſſere più di frequente bagnata dall' acqua del mare, ſinchè gradatamente ſvaniva quaſi ogni veſtigio d' alcali, allorchè era ella di quelle, che vivono perpetuamente ſommerſe; oſſervazione importantiſſima. Toſto però che i ſondi marittimi o s' allontanavano troppo dal mare, o appartenevano a letti troppo antichi di mare, o pur anche avevano ſervito all' agricoltura, le piante rientravano nella claſſe delle terreſtri, e non davano che un alcali puramente e deciſivamente vegetale: quelle ſteſſe piante che allignando in ſuolo ſalſugginoſo non mancavano giammai di ſomminiſtrare l' alcali marino. Per aſſicurarmene in un modo ſemplice e faciliſſimo combinava la parte ſalina eſtratta dalle ceneri ſempre coll' aceto diſtillato, perchè ſi caricaſſe egli di tutto l' alcali libero, che poteva eſſervi meſcolato, e così dalla notabile differenza tra la terra fogliata e il natro acetoſo, e dalla figura de' nitri, che ne ricavava, decomponendo i ſali acetoſi coll' acido nitroſo libero, poteva accertarmi di tutto. Ciò conferma mirabilmente quello ch' era ſtato prima di me oſſervato da' Signori *du Hamel* e *Cadet* (Mem. dell' Accad. Reale 1767, 1774) intorno al Kali. Trapiantato queſto vegetabile dal ſuolo marittimo in paeſe mediterraneo, dopo un certo tempo divenne ortenſe, e perdette a poco a poco la facoltà di ſomminiſtrare l' alcali marino col mezzo della combuſtione. Intanto il non trovarſi di queſt' alcali nelle piante marine viventi ſott' acqua, mentre contengono ſal marino a ribocco, è prova di gran forza, che quello non è altramente un prodotto della decompoſizione di queſto, come abbiamo ſoſtenuto in altro luogo. L' eſſere poi or ricca, ora ſpoglia d' alcali una medeſima pianta dall' allignare in terreni ſalmaſtri, e dal creſcere in fondi non ſalmaſtri, dimoſtra evidentemente, che non è egli eſſenziale, e proprio di quella pianta. Ed or poi che ſappiamo riſieder egli libero e proprio nella ſoſtanza degli animali marini, il trovarſene di libero in tutti i fondi ſalmaſtri, il produrſene ſpontaneamente dietro al diſfacimento di quegli animali, tutto inſieme ci porta a conchiudere eſſer egli ſtraniero al regno vegetale, ed entrare nell' economia delle piante ſucchiato dal ſuolo, ov' eſſe allignano, toſto che ivi ſi trovino involti nella terra avanzi, e ſpoglie di animali marini decompoſti. E quanto all' altra quiſtione del preeſiſtere di lui, o no nelle piante alla combuſtione, ancorchè riſulti dal detto, che vi ſia egli aſſorto ne' ſucchi nutritivi, ed abbiano graviſſimi

Autori aſſerito di averne trovato di libero prima dell' abbruciamento, giova che rimembri qui qualche ſperimento, che ho fatto per prendere lumi da me ſteſſo ſopra un oggetto sì importante.

I. Ho preſo un groſſo faſtello di Kali maggiore freſco, tratto da marittimo terreno, ov' era ſpontaneamente creſciuto. Peſtatane una metà la miſi a macerare nell' acqua, e ve la ritenni più giorni; dopo di che filtrato il liquore, il feci ſvaporare a ſiccità. Verſai poſcia ſu la materia ſecca dell' aceto diſtillato, ajutandone l' azione con un dolce calore. Seccato il ſale, lo diſciolſi in uno ſpirito di vino concentratiſſimo. Decantato lo ſpirito il feci ſvaporare a ſecchezza, indi a moderato fuoco decompoſi il ſale acetoſo sloggiando l' acido vegetale, ed ebbi 473 grani di ſal alcali marino ottimamente caratterizzato. Feci ſeccare al ſole l' altra metà del Kali, e la feci in cenere all' aria libera in vaſe di ferro, calcinando la cenere a fuoco lento, la quale trovoſſi eſſere 21 dramma. Col proceſſo altre volte deſcritto dell' aceto diſtillato, e dello ſpirito di vino giunſi a trarre da queſte ceneri 436 grani d' alcali libero. M' accertai dunque in modo non equivoco, che l' alcali marino preeſiſte libero nel Kali alla combuſtione. E qui fu, che mi preſe voglia di verificare una tale preeſiſtenza anche dell' alcali vegetale nelle piante comuni. E però ſcelſi una pianta di collina, e ſegnatamente il tamariſco, dalle cui ceneri ſi pretende eſſerſi ricavato appena veſtigio di alcali vegetale.

II. Avendomene proccurato da Monſelice un faſtello, il feci peſtare, macerare lungamente nell' acqua, e bollire in eſſa alcuni minuti. Raffreddato il liquore, il filtrai e ſvaporai a ſecchezza, come precedentemente. Combinata la materia coll' aceto diſtillato, e fatto criſtallizzare il ſale, qual fu la mia ſorpreſa nel ravviſare ſul piattello la vera terra fogliata! Trattala fuori col mezzo dello ſpirito di vino, e ſeccata di bel nuovo v' affuſi dello ſpirito di nitro per decomporre il ſale acetoſo. Ne ottenni un nitro perfettiſſimo in aghi priſmatici criſtallizzato.

XLVII.

Poteva per avventura ſembrare puramente ſpeculativa la quiſtione di cui s' è trattato, che non è. V' abbiamo guadagnato molte iſtruzioni utiliſſime. E prima abbiamo imparato a ben conoſcere la natura de' fondi ſu' quali poſſiamo mettere a coltura il Kali, e le altre piante più avide di queſto ſal fiſſo, di cui sì è parlato, con profitto maggiore che non ſi ſarebbe per una ſpontanea vegetazione, non promettendoci raccolta d' alcali marino giammai da terreni dolci ſprovveduti di ſpoglie marine. Siamo certi in ſecondo luogo, che giova ſendere que' terreni, e ſmuoverli in molta profondità, onde accelerare la decompoſizione, che non foſſe tuttavia completa, delle ſuſtanze animali marine per mancanza d' aria, d' umido, di calore, e di ſimili ſuſſidj neceſſarj alla putrefazione. Eſſendomi proccurato da varie parti delle noſtre marittime lagune, e da diverſi fondi ritratti dal mare, sì della terra tolta in ſuperficie, che di quella più ſotto, ho voluto farne liſciva, onde riconoſcere la natura del ſale, che poteva eſſervi contenuto. Ho oſſervato pertanto, che queſte terre ſalmaſtre contengono una 150.^{ma} parte di un ſale roſſiccio, in cui prevale il ſal marino, com' è naturale; ma avendone fatto cimento nelle noſtre vetraje ho conoſciuto a prova, che ne proviene un vetro indubitatamente, di que' dozzinali però, che ſi traggono dalle ſode di Normandia. Il che può diventare oggetto non diſpregevole a chi ben l' eſtima. In fatti qual meraviglia, che sì fatte terre ſalmaſtre contengano avanzi d' eſſeri marini diſorganizzati, e del natro in conſeguenza, ſe quello, che in tante parti dell' Europa e dell' Aſia troviamo in eſfloreſcenza, e di cui s' è parlato altrove, proviene mai ſempre da ſomiglianti fondi, letti un tempo di acque marine!

XLVIII.

Ma facendo attenzione al primo ſperimento del §. XLVI. riconobbi, che la combuſtione era, più che mai non ſi crede, dannoſa alla raccolta dell' alcali dalle ſode, volatilizzandoſi

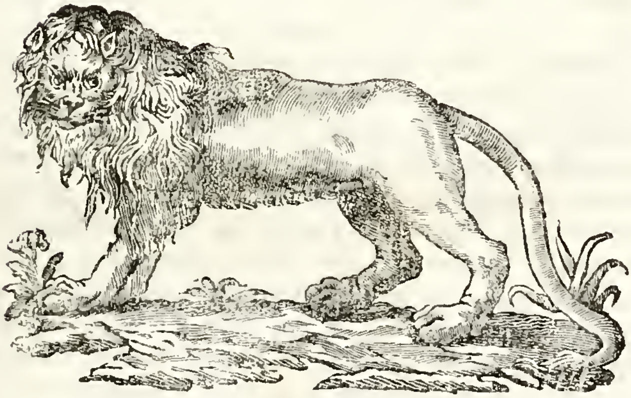
doſi in parte queſto ſale, in parte terrificandoſi, e in parte eziandio fondendoſi per la violenza del fuoco in un' imperfetta vetrificazione. In fatti un primo riſcontro l' abbiamo in queſto, che più di alcali ſi ottenne dalla materia eſtrattiva del roſcano non tormentata dal fuoco, che non s' ebbe dalle ceneri di pari quantità combuſta di quella pianta. Ma eccone un' altra. Siccome aveva fatto in cenere a moderato fuoco queſto Kali, che non era altramente di cultura, ma sì bene ſpontaneo de' noſtri liti, volli far confronto del ſuo prodotto con quello delle migliori ceneri ſodate di Spagna. Preſe pertanto dramme 21 di queſte ceneri, e fattane diligentemente liſciva, la filtrai, e ſvaporai a ſecchezza, indi ne traſſi l' alcali per mezzo dello ſpirito d' aceto col proceſſo conſueto. Ne ottenni appena 400 grani di ben deciſo. Per la qual coſa ſenza abbandonare queſto mezzo, che puo migliorarſi di molto, moderando la calcinazione, parvemi, avuto rifleſſo agli eſſeri organizzati, ove queſt' alcali riſiede, come in luogo nativo, e alle piante ſteſſe che ſe ne caricano sì abbondantemente, da non tacerſi il ſuggerimento pure di ricorrere direttamente alla naturale decompoſizione di loro, onde aprirſi nuova via di ottenerlo ſenza combuſtione. Chi non conoſce i grandi vantaggi, che ſi traggono dalle Nitraje artificiali, le quali ſi preparano meſcolando con ogni ſorta di materie putreſcibili terre leggiere, e friabili, onde accelerare la decompoſizione di quelle ſoſtanze organiche, e la generazione del nitro in conſeguenza? E' ben naturale coſa il penſare, che ſi può ora proccurarſi del pari la generazione del natro per queſto mezzo con opportune Natraje artificiali. Ogni ſorta di vivente nell' Oceano capace di putrefazione completa può eſſere l' ingrediente capitale, la materia eſſenziale di queſti ſtabilimenti. E non ſarebbe forſe improprio conſiglio quello di peſtare gli animali marini, e di dividerli nel meſcolarli con le terre, aggiugnendovi copia di vegetabili d' ogni ſpecie, purchè foſſero creſciuti ſu' fondi ſalmaſtri. Avendo, come nelle Nitraje, l' attenzione di meſcolare di tempo in tempo i meſcugli, eſponendo ſucceſſivamente al contatto dell' aria e dell' acqua, con cui ſarebbe d' uopo ſpruzzarli frequentemente, tutte le parti di loro, ſi otterrebbe la produzione del natro libero non difficilmente. Avendo io nell' Aprile del 1784, come l' accennai al §. XXXIII, meſſa a putrefarſi all' aria libera una certa quantità di animali croſtacei freſchi tratti dalle loro conchiglie, e peſtati prima ben bene, ebbi cura di muovere la materia di tratto in tratto, e dopo ch' era fatta ſecca di tenerla pure bagnata di quando in quando. Nel meſe di Agoſto di queſt' anno 1785 vedendola fatta terra ſenza odore ſenſibile, ne feci di una porzione eſperimento, ſuggettandola a liſciva d' acqua diſtillata. Non ſaprei per qual ragione mi pareſſe non doverſi da sì fatta putrefazione generare altrimenti un nitro. Ma oltre all' alcali manifeſto che ne traſſi, non laſciò di comparire nella criſtallizzazione qualche veſtigio di nitro quadrangolare perfettiſſimo, cioè a baſe d' alcali marino; il che per avventura merita attenzione. Ma non uſcendo dall' iſtituto preſente, di qua intanto poſſiamo argomentare, che la produzione dell' alcali libero col mezzo delle Natraje, che ho detto, è certiſſima, non potendo eſſere di alcuno ſvantaggio il poco nitro, che inſieme poteſſe generarſi. Per altro ſe de' croſtacei ſi faceſſe uſo, l' adoperare gli animali ſchiacciati e bricciolati in un con le conchiglie, potrebbe tener luogo di terra calcarea in parte ſe non in tutto nella Natraja la ſoſtanza terroſa di quelle, come facilmente ſi comprende. I ſondi circonvicini a' laghi ſalſi così nelle meridionali regioni, come nelle ſettentrionali, di che s' è parlato, ne' quali ſi trova l' alcali marino in abbondanza, tutti manifeſtano di aver ſervito un tempo al mare di letto, come dicemmo, e poſſono conſiderarſi per le ſpoglie, che contengono, viſibili e ſparſe in ogni parte di animali marini decompoſti, quaſi altrettante naturali Natraje. E queſto operare appunto della natura ſi è, che abbiamo qui in mira d' imitare, ove ſien da noi meſſe le organiche ſuſtanze a putrefarſi, e l' impazienza noſtra e i noſtri biſogni ſecondando, non il lentiſſimo ſpontaneo proceſſo di natura ſi attenda, ma i mezzi ſi adoperino, e i ſuſſidj convenevoli onde promuovere, e ſollecitare la fermentazione, e l' ultimo grado di putreſazione.

XLIX.

Ma non è per ultimo da tacerſi in traccia dell' alcali marino un' indagine, che può eſſere di qualche utilità per avventura. Poichè il veggiamo fiorire ſu queſto colle di Verona, che s' è detto da principio, e sbucare da' tritumi organici marini, cui vetuſtà dovrebbe avere totalmente ſnaturati, e conſunti, non è ſenza fondamento il credere che non ſia altramente queſto colle il ſolo privilegiato per la produzione del natro nativo, come non è egli il ſolo depoſito di ſimili ſpoglie organiche laſciate dal mare, di cui ne' monti, nelle pianure, e nelle più cupe viſcere della terra veggiamo fatta conſerva immenſa, abbondantiſſima da ogni canto. E' probabiliſſimo, che nello ſtato in cui elle ſi trovano di aridità, ſenz' aria, ſenza il neceſſario calore, ſia loro interdetto il moto inteſtino, e impedito in conſeguenza all' alcali lo ſvilupparſi, il produrſi da quelle ſpoglie, che pur ſarebbeſi, ſe foſſero elle in più favorevoli circoſtanze coſtituite. Se i Fiſici vorranno metter l' occhio ſu queſte ſuſtanze marine abbandonate con queſto in mira nuovo ed importante oggetto, non ha dubbio, che il faranno con frutto. Coſtruendo muraglie, volte, e cumuli, come nelle Nitraje ſuol farſi artificiali in qualche parte di Europa, e facendovi operare l' alternativa dell' umido, e dell' aria opportunamente, e in altri tali modi trattando sì fatte materie, non è impoſſibile che quelle ſteſſe fioriture, che sbucano qui ſpontanee d' alcali libero puriſſimo ſul noſtro colle da ſimili congerie, abbiano pur a comparire ſu le artificiali, con un eſempio innanzi agli occhi, che non ſoffre eccezione.

L.

Ancorchè abbia dato a conoſcere in varie parti di queſta Memoria quanto poco io ſia diſpoſto ad attribuire facilmente l' alcali marino libero e puro che troviamo in tante ſuſtanze annidato, e fin ſu la ſuperficie della terra fiorente in tante parti, a decompoſizione naturale di ſal marino, ſarebbe mal conoſcere la natura, le ſue forze, i ſuoi magiſteri, ſe il ſi voleſſe derivar tutto da' ſoli corpi organici marini decompoſti, ſenza attribuirne alcuna parte all' immediata decompoſizione del ſale. Certo eſſendo da un canto eſſere queſt' alcali parte ſuſtanziale de' viventi nel mare, e non verificandoſi effettivamente dall' altro quaſi mai la preſenza di lui in qualche copia libero e puro, ove non ſi verifichi a un tempo traccia di quegli eſſeri accoppiata e preſente, preſcindendo dagli accidentali traſporti che poſſono eſſere avvenuti nelle innumerabili rivoluzioni occorſe, è bensì più ragionevole e naturale il ripeterlo, come abbiamo fatto, dalla decompoſizione di loro, che non è il derivarlo da quella del ſal marino, che di recondito magiſtero abbiſogna per effettuarſi compiutamente: ma non è per queſto da conchiuderſi che tutto l' alcali marino che troviamo ſu la terra provenga immediatamente da' viventi marini. Come non repugna (§. XL.) l' eſiſtenza di lui in iſtato libero indipendente dal ſal marino, non repugna nè pure, che v' abbia natro ſu la terra non procedente immediatamente dagli animali del mare; ſiccome della terra calcarea può dirſi non repugnare, che ve n' abbia indipendentemente dagli eſſeri organizzati di cui la troviamo far parte eſſenziale e tanta, come tutti fanno. Non oſerei però dire, che poſſa avervene di originario indipendente dagli animali marini, come non ſenza fondamento può crederſi della terra calcarea. Intanto, ſe come aſſeriſce il *Bergman*, può dal ferro nudo decomporſi il ſal marino, comparendo in libertà l' alcali in forma di brina, ch' è però coſa aſſai ſingolare, e da non ammetterſi ſenza il conſenſo di molte e molte ſperienze (§. XLI.); ſe il litargirio può farlo in qualche modo, ſia quant' eſſer ſi vuole imperfetta la decompoſizione del ſale; ſe le terre vitriolate, i metalli vitriolati poſſono, come dalle mie ſperienze (§. XLIII.) è meſſo fuor di dubbio, ſenza opera di fuoco o d' altro intermezzo, per ſemplice contatto decomporre il ſal marino; ſe non è impoſſibile che il ſal di *Glauber* poſſa naturalmente decomporſi per l' azione ſoſtenuta e continua di un grado di calore men forte de' noſtri carboni acceſi (§. XLIV.), col qual mezzo tante coſe pur opera la natura in ſilenzio, non è il render libero l' alcali-baſe del ſal marino, indipendentemente dalla diſorganizzazione degli animali marini, un' operazione che ne' laboratorj di natura aſcoſi a' noſtri occhi non poſſa in varie guiſe effettuarſi. Ma il detto ſin qui baſti ſu queſto graviſſimo argomento, e baſti l' aver trovato eſſere egli proprio ed eſſenziale degli animali viventi nel mare, com' è riconoſciuto da gran tempo originario e proprio delle piante il vegetale.



OSSERVAZIONI

ANATOMICHE E PATOLOGICHE SUGLI ORGANI UROPOIETICI.

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acqueſi, e Chirurgo Maggiore del Real Preſidio di Torino.

All' Illuſtriſs. e Celebratiſs. Sig. Co. Don ALESSANDRO DE BRAMBILLA Ceruſico della Perſona di S. M. Imperiale, Proto-Ceruſico delle Truppe Imperiali Auſtriache ecc.

LE ricerche a voſtro ſuggerimento fatte dal Sig. *Guidone Scati*, Ceruſico profeſſore dell' arte oſtetricia nell' Univerſità di Gorizia, ſui calcoli dei reni, e ſulle operazioni, alle quali dalla preſenza di ſimili corpi morboſi poſſono eſſere animati i ceruſici, mi obbligarono mentre ch' egli ſoggiornò in Acqui ſua patria, dov' io era incaricato e della direzione del Militare a quelle Reali Terme, e della Scuola ceruſica, e della cura degl' infermi in quella città, a traſcegliere quante oſſervazioni io ne avea dalla maſſa di quelle d' altri generi, che la pratica mi aveva fornito, e conſegnarle a quel mio Collega. Io mi perſuadetti di leggieri con quell' atto di fare coſa grata a voi, Illuſtriſſimo Signore, ch' io ſtimava e venerava moltiſſimo come autore, e promotore indefeſſo d' opere inſigni, ai progreſſi della Cirugia in particolar foggia dirette. E fin d' allora in me nacque il deſiderio di ſepararne pure tutto ciò, che anche la Notomia ſvelato mi aveva intorno agli organi deſtinati alla ſeparazione della urina dal ſangue negli animali, ch' io nominerò con termine greco *Uropoietici* perchè abbrevia ed eſprime, con l' idea d' indirizzarvene la ſerie. Poſi la mano all' opera, e nuove diſſecazioni avendomi arricchito di cognizioni novelle, io m' applaudiva già di potere fra pochi meſi mandare ad effetto quel mio proponimento, quando chiamato dalla Clemenza del mio Sovrano ad impiego più luminoſo nella Dominante, ed in altre occupazioni diſtratto, mi fu impoſſibile dar compimento al mio lavoro infino a queſti giorni, nei quali ſendo ſtato onorato da voi con nuovi lumi, e con quegli amorevoli caratteri, che mi convinſero maggiormente e del generoſo affetto onde ſiete inclinato a portare la facoltà noſtra al più alto grado di perſezione, che ſia poſſibile, e della voſtra urbanità verſo di me, vi ho fatto cenno del mio diſegno, e voi di buon grado l' approvaſte. Eccovi pertanto l' operetta mia (*a*), e con eſſa eccovi un pubblico pegno del profondo riſpetto, che l' alto merito voſtro ſcolpì nel mio cuore, e della vera gratitudine, che mi terranno all' Illuſtriſs. Signoria Voſtra per ſempre indiſſolubilmente avvinto.

Nei primi volumi della grande opera, a cui v' applicate intorno alle ſcoperte fatte nella Medicina in generale dagl' Italiani, del continuo inculcate, che per dare più ſtabile fondamento alle opere mediche, tra le quali ben vede ognuno che ſi debbono pure comprendere le ceruſiche, ſi batta indefeſſamente la via dell' oſſervazione: ed io ubbidiente al voſtro cenno m' incamminerò alla ſpoſizione d' alcune verità fiſiologiche, e terapeutiche relative al meccaniſmo della ſeparazione dell' urina, alla generazione dei calcoli, e ad altre malattie degli organi uropoietici, indipendenti da cagion eſterna, ed alla cura delle medeſime, con far precedere una ſcelta di quelle oſſervazioni, che mi vi hanno fatto penſare. E queſte non mi contentai di farle ſu cadaveri umani ſupini come vulgarmente ſi uſa, ma tanto queſti, quanto quelli de' bruti, che vi ſacrificai, poſi bocconi, e ne rimoſſi con le dovute cautele la metà poſteriore delle oſſa innominate con l' oſſo ſacro, e tutte le vertebre lumbari, ſenz' aprire al davanti l' abdomine: avvertenza onde non ho motivo di pentirmi.

(*a*) In queſta l' autore non ſi propone di dare un eſatto trattato di notomia relativo agli organi che ſi prefiſſe di eſaminare: bensì di porre ſotto gli occhi altrui le coſe meno ordinarie tanto di notomia, quanto di patologia, e di terapeutica ch' egli vi oſſervò, preſcindendo dalle trite, ed univerſalmente conoſciute.

Le prime però furono ſatte ſecondo il metodo ordinario, e vennero piuttoſto dirette dal caſo, che dalla rifleſſione: e d' eſſe appunto debbo principiare a darvi notizia poſto che ho deliberato di procedere con l' ordine più naturale, ch' è altresì più inſtruttivo.

OSSERVAZIONE I.

La veſcica urinaria d' un uomo piena di calcoli innocenti.

In cento ſcritti è già ſtato indicato i calcoli talvolta dimorare nella veſcica, e non dar ſegno veruno dell' eſiſtenza loro. In altrettanti s' è inveſtigato donde proceda l' inſpeſſamento, il condenſamento, che i calcoli ſteſſi proccurano alla tunica multiplice della veſcica medeſima, del quale *Ruiſchio* dà un bell' eſempio nella oſſ. 89 (*a*), ch' egli avvalora con l' elegante figura 70, dopo d' avere accennato alla oſſ. 78, che ciò può derivare pur anco dalla ſcabbia interna di queſto ſacco, e diſegnato il medeſimo alla fig. 62 (*b*) con alcuni bernocoli glanduloſo-carnei, che ſe ne eccettuiamo il ſito, ſi accoſtano molto alla figura di quelli, che ho veduto nella veſcica d' un vecchio di Centallo morto per fluſſione catarrale al petto nello Spedal Maggiore di S. Giovanni di Torino.

Avea coſtui dimorato parecchi anni fra gl' incurabili nello ſteſſo Spedale, nè mai ſi era lagnato di verun dolore all' ipogaſtro, nè di peſo al perinéo, nè ai reni, nè di bruciore d' orina, nè d' altro incomodo capace di ſomminiſtrare verun ſoſpetto delle varie affezioni morboſe, che caſualmente ſe ne ſcoprirono nel cadavero, eppure aveva egli eſercitato per ben trent' anni la profeſſione laborioſa di maeſtro di ſcherma per le truppe e le città del Piemonte; nè ſe n' era aſtenuto mentre che vivea nello Spedale, io ſteſſo, ed alcuni allievi del R. Collegio delle Provincie miei compagni eſſendoci ſeco lui più volte eſercitati.

Per

(*a*) *Friderici Ruyſchii Anatomes, Chirurgiæ, & Botanices Profeſſoris Obſervationum Anatomico-Chirurgic. Centuria* ecc. Amſt. 1691. 4. pag. 114.

(*b*) pag. 100.

Per addeſtrarmi alla Ciſtotomía con il taglio laterale mi prevalſi di quel cadavero, e nell' introdurre lo ſciringone per l' uretra incontrai diverſi oſtacoli, ma finalmente penetrai nella veſcica. Tentai di volgerlo a mio talento per quel ſacco, ed iſtupirono meco gli aſtanti all' udire gli ſcroſci, che fece in ſulle prime, ed all' oſſervare, che impegnatoſi col becco fra i calcoli ſtatici manifeſtati dallo ſtrepito, non ci fu poſſibile di muoverlo più ai lati, nè di farlo più oltre penetrare. Il chiariſſimo Sig. *Carlo Spagnolini* Profeſſore ſtraſordinario di cirugia nella noſtra Univerſità, ſotto gli occhi del quale facevamo tali operazioni, mi ſuggerì di proſeguire ſenza fiſſarlo più a ſiniſtra, che a deſtra, ed io tagliati gl' integumenti, ed una porzione della proſtata di modo che ne ſprizzò fuori l' urina, inſinuai per la ferita il conduttore, che molto difficilmente s' inoltrò ſcroſciando, come ſtentarono aſſai più le tanaglie a penetrarvi, e a ſcoſtarſene i morſi a ſegno di ghermire qualche calcolo. Eſſendovene però caduto uno in mezzo, fu eſtratto; e così fu di due altri non più groſſi d' una mediocre avellana, cubici, liſci con le faccette qua concave, là qualche poco conveſſe; ma dopo non ſe n' ha più potuto prendere alcuno ſebbene le tanaglie ſcroſciaſſero incontrando la ſuperficie dura degli altri, ch' empievano il ſacco, e ne diſtaccaſſero alcuni frammenti.

Ciò moſſe la curioſità del mio Maeſtro, ugualmente che la mia, non potendoci rappreſentare all' immaginazione qual ſi foſſe l' interiore di quella veſcica, e la diſpoſizion e il numero di quei calcoli: mi accordò egli adunque la permiſſione di ſoſpendere le mie prove, e di ſeparare intiera dal corpo quella viſcera, il che venne più facilmente eſeguito da me non ſolo con la ſinſiſe-otomía, dopo d' avere sgombra la pelvi dalle inteſtina, ma con maggior franchezza, ed integrità della veſcica medeſima e delle ſue appendici, ſegando il corpo d' amendue i pube, e il braccio degl' iſchi l' uno dopo l' altro.

Quella veſcica era lunga otto pollici, ed aveva ſei pollici di diametro dall' inteſtino retto alla ſinſiſe del pube: era dura, incompreſſibile, e difforme all' eſterno per molte dure ineguaglianze.

Ne ſpaccai la faccia anteriore, ch' era la più liſcia, dal collo ai due terzi della ſua lunghezza; e lo ſcalpello ſcroſciava ſcindendo non ſolo perchè fregava col dorſo ſui calcoli, ma perchè il collo ſuddetto, ed una porzione vicina del corpo n' era quaſi ſimile in durezza e in ſoſtanza alle cartilagini intervertebrali. Col mezzo di tale ſpaccatura ponemmo a nudo buon numero di pietre cuboidée d' inegual volume, tutte coperte d' uno ſmalto bianco gialliccio (*a*); tutte nell' interno roſſigne, ſabbioniccie, friabili, le quali naturalmente articolate inſieme formano una ſpecie di muſaico. Ve n' erano alcune più elevate delle altre, che con la faccia prominente loro occupavano certi gozzi, o cellette formate dalla ſoſtanza ſteſſa della veſcica, o per meglio dire dalla membrana interna cacciataſi fra le ſmagliate fibre dei piani carnoſi, ond' è veſtito quel ſacco.

Nè le diſuguaglianze, che ſi vedevano all' eſteriore del medeſimo, erano tanto elevate quanto la prominenza di quei calcoli poteva eſigere, perchè una grande porzione veniane naſcoſta dalla ſtravagante ſpeſſezza della tunica muſculare, che ſervia loro con lo ſcoſtamento de' ſuoi piani interiori di nicchia, ed in queſto la noſtra veſcica non era da paragonarſi con quella onde l' immortal *Eiſtero* fregiò la ſua grande opera delle *Inſtituzioni ceruſiche* (*b*).

Trovammo inoltre un mucchio diſtinto di calcoli raccolto nella parte ſuperiore della veſcica dove ſi era formato un ſeno conoidéo, che ſembrava eſſerſi fatto a danno dell' uraco, il quale altrettanto perduto avea di lunghezza quanto in larghezza aveva acquiſtato.

Non ebbi cura di miſurare di tal ſeno la capacità prima d' eſtrarne i calcoli, per lo che fare dovetti ſpacciarne un tratto notabile prolugando il taglio ſu per la faccia anteriore

---

(*a*) Tali appunto dicea d' averle trovate al numero di 36. in un vecchio il celebre *Santorini* l. cit. cap. X. §. XX. pag. 205. Vedanſi pure le dilucidazioni dottiſſime delle famoſe XVII. Tavole dello ſteſſo Autore fatte dal chiariſſimo Sig. *Michele Girardi* prof. primario di Notomía e di Storia naturale nella R. Univ. di Parma ſtampate con maraviglioſa eleganza colà dall' inſigne Sig. *Bodoni* mio concittadino, ed amico l' anno 1775. in 4°. grandiſſimo Tav. XV. fig. III. pag. 274. S' io ne eccettuaſſi i quattro maggiori, ed i dieci minimi rappreſentati nella Tav. II. della Centuria delle oſſ. Anat. Ceruſiche del *Ruiſchio* pag. 3. ve ne potrei additare gli altri come raſſomiglianti ai calcoli nella veſcica del vecchierello (però più numeroſi) trovati.

(*b*) Ved. Tav. 32.

della veſcica incominciato: ciò non oſtante due o tre giorni dopo d' eſſerne ſtato votato, e d' eſſere ſtata queſta immerſa nell' aceto, era ancor alto più di tredici linee, largo dieci, diviſo in molte cellette dalle colonne carnoſe del piano muſculare interno ſmagliato irregolarmente qua e là dirette.

Eſaminando attentamente queſto ſeno (*a*), ed oſſervando che buon numero di tali fibre diſtaccateſi dalle eſteriori formavano, inſieme con la tunica interna dalle medeſime non abbandonata, un tramezzo, che lo ſeparava dal rimanente della cavità della veſcica, a un di preſſo come la tenda del cervelletto divide in due la cavità del cranio; giudicai che da principio la veſcica occupata dai calcoli non potendo più contenere molta orina, queſta a poco a poco aveſſe dilatato in alto l' uraco, e che queſto più debole della porzione del facco, mediante la quale queſti comunicato avevano forſe un giorno, il primo ſiaſi reſo varicoſo, e finalmente a forza d' ampliarſi, e di contenere con l' orina gli elementi dei calcoli vi ſe ne ſiano formati quelli, dei quali abbiamo favellato. Avvalorò le mie conghietture il vedere, che tale tramezzo orizzontale portava nel ſuo centro un foro di comunicazione fra 'l ſeno e la veſcica appena capace di dare adito al mignolo.

Il collo della medeſima veſcica era ſoſtenuto da una proſtata, che ſpaccata per la metà del ſuo allungamento verſo la parte anteriore preſentava allo ſcalpello come abbiamo detto una durezza cartilaginoſa, e ſeparata dalle parti aggiacenti dell' inteſtino retto vedevaſi poſteriormente diſtinta in due lobi natiformi con i quali abbracciava tutto il principio dell' uretra, pieni al di dentro di tubercoli duri coloriti come l' avorio. La faccia diretana della proſtata era larga venti linee, lunga quindici; ed aveva in baſſo ed al davanti una incavatura col margine anterior molto ſpeſſo, e ritondato.

Queſta rotondità del margine appariva anche all' interno

(*a*) Queſta veſcica in ſimile foggia interiormente diviſa era diverſa dalla oſſervata dal celebre Sig. *Meckel* in queſto ſoltanto, che l' anguſtia della diviſione punto non appariva all' eſterno, quantunque foſſe così viſibile nella bipartita cavità.

nel collo della veſcica, ed era come diviſa dal verumontano ſpaccato per la ſua lunghezza da una feſſura molto profonda, ſomigliantiſſima al meato urinario eſterno eccetto in riguardo ai margini, che ne erano per la durezza loro quaſi cartilaginoſi, ed aveano quella faccia, per la quale ſi corriſpondevano, anzi combaciavanſi, tinta d' un roſſo molto vivace, ugualmente che il fondo del picciolo ſeno che naſcondevano.

La Fig. I della Tav. XV anatomica del *Santorini* fra le divulgate, e con tanta dottrina ſpiegate dal maeſtro degli Anatomici moderni *Girardi* (*a*) può dare un' idea della figura di quella proſtata, che da me ſi deſcrive, ma non già del volume, ch' era nel vecchio di Centallo molto maggiore, e ſtendevaſi diminuendo inſenſibilmente di ſpeſſezza in alto per fare un corpo medeſimo con la veſcica, di modo che ſpariti v' erano gl' intervalli, che nella figura *Santoriniana* ſi veggono con maeſtría e verità così lodevole fra la proſtata e la veſcica a deſtra ed a ſiniſtra eſpreſſi.

Un' altra diverſità pure vi paſſava, cioè in vece del ligamento nella figura *Santoriniana* ſegnato *L*, e dai *Girardi* con tale chiarezza dimoſtrato e ſpiegato (*b*) (l' eſiſtenza del quale ſi manifeſta ſenza difficultà in tutt' i cadaveri, la proſtata e la veſcica dei quali ſi prendono ad eſaminare collocandoli bocconi, e dirigendo le oſſervazioni dal di dietro al davanti) la proſtata prolungataſi anche anteriormente formava un cerchio perfetto, ch' io non ſaprei meglio paragonare, che alla cartilagine Cricoide umana.

Finalmente nella cavità della veſcica dal concorſo di quei riſalti bianchicci, che ſi allungano in baſſo obbliquamente dal ſito dove sboccano gli uretri, rappreſentato così elegantemente prima di verun altro anatomico dal *Terraneo*, celebre profeſſore di Medicina in queſta noſtra Univerſità, ſebbene male ſecondato dall' intagliatore, che troppo lontane le imboccature degli ureteri ci collocò dal triangolo *BF*, e dal veru-

---

(*a*) L. cit pag. 166. lett. *IKK*, dove ſi dice, che il *Santorini* oſſervata l'aveva nel cadavero di Gio: Battiſta *Brigonzo*, la veſcica del quale più ampla delle ordinarie era occupata da un groſſo calcolo.

(*b*) L. cit. pag. 167.

montano *G* (*a*); ſi era elevato un tumore ſarcomatoſo, appunto dalla ſommità del verumontano, che piriforme, e quaſi biſido s' inoltrava per lo collo della veſcica fin nella cavità della medeſima. Era perciò diviſibile all' occhio in due lobi, il ſiniſtro dei quali era molto più groſſo, e conteneva ſotto una liſcia ed uniforme ſuperficie biancaſtra varj bernoccoli duri, ligati inſieme per mezzo d' un teſſuto cellulare affatto ſimile alla parte più denſa non cotennoſa del lardo.

Voi ſapete, o Signore, come il valoroſo anatomico Franceſe Sig. *Lieutaud* induſtriato ſiaſi d' appropriarſi la ſcoperta di quei riſalti dell' angolo, ch' eſſi fanno in baſſo unendoſi, con imporgli il nome d' *ugola della veſcica*, (*b*) citando ſoltanto il *Santorini*, che aſſai meglio del *Terraneo* ſu ſervito nell' intaglio della figura II (*c*), che va anneſſa alle prezioſe Oſſervazioni anatomiche ſtampate fin dall' anno 1724. quindici anni dopo la ſtampa dell' opera dell' Anatomico Piemonteſe; nè vi ſarà ignoto, che prima il celebre *Morgagni* (*d*), e ſucceſſivamente l' illuſtre *Girardi* (*e*) ſenza punto diminuire il vero pregio dei lavori del Sig. *Lieutaud* hanno eſpoſto chiaramente il ſenſo delle parole del *Santorini* a queſto propoſito; per conſeguenza io poſſo preſcindere dal favellare più a lungo intorno a queſto, potendo chi più diſtinta notizia ne bramaſſe, agl' indicati fonti liberamente attignerla, le Oſſervazioni anatomiche, le magnifiche Tavole *Santorino-Girardiane*, e l' opera del *Terraneo* eſſendo per lo valore ed importanza loro in luogo diſtinto delle Librerie degli anatomici collocate.

(*a*) *Laurentii Terranei Ph. & Med. Doct. Collegiati Taurin. De Glandulis univerſim, & ſpeciatim ad uretram virilem novis. Taur.* 1609 8°. fig 2. pag. 134, & 135.

(*b*) *Eſſais d' Anatomie* dove i riſalti ſon nominati *Trigone* e l' unione prominente in alcuni cadaveri dei medeſimi *Luette de la Veſſie* Ved. anche *Memoires de l' Académie des Sciences an.* 1753. pag. 11., e 13. not. a

(*c*) Tab. III. litt. *KKI*, e cap. X. §. XXII. pag. 204, 205.

(*d*) *De ſedibus, & cauſis morborum per anatomen indagatis: Venetiis* 1764. *Epiſt. Anat.* Med. 66. num. 12. & ſegg.

(*e*) Loc. cit. pag. 173, 174. Tab. 15. fig. III. *cdee*.

OSSERVAZIONE II.

La diſpoſizione delle fibre carnoſe nella deſcritta veſcica.

Ruiſchio nelle due veſciche di tonache tanto ſpeſſe, quanto erano quelle, che abbiamo citato poco addietro, ſi contentò di accennare, che la prima (*a*) venne a tale ſpeſſezza a cagione della ſcabbia ond' era interiormente offeſa; e che la ſeconda (*b*), occupata da groſſa pietra avea le tuniche ſpeſſe un dito, ſeparabili in piani innumerabili, tra i quali oſſervò materia purulenta in più luoghi ſimile alla pinguedine liquefatta; nè ſi curò di darci qualche idea di tali piani, e indicarcene la direzione, le proprietà, la natura. Poco di più ce ne diſſe il celebre *Duvernei* (*c*), che ne aveva così deſtramente ſpogliata delle ſtraniere ſoſtanze la ſuperficie eſteriore. Il darcene però la più diſtinta eſpoſizione fu riſervato al laborioſo ed avventurato *Santorini*, il quale non ſolo ſi valſe di diverſi mezzi per confermare intorno a queſto ſacco le ſue ſcoperte, che ſi leggono nelle Oſſervazioni anatomiche (*d*), ma dopo la pubblicazione di queſte continuò a lavorarvi dattorno, e ci laſciò oltre alle eſattiſſime figure che occupano le Tavole XV, e XV, anche le ulteriori notizie, che il pubblico dee al virtuoſiſſimo *Girardi* nella ſpiegazione delle medeſime. (*e*) E mi ſta ben fiſſo nell' animo il prudente avviſo datoci dallo ſteſſo *Girardi* ſul poco vantaggio cavatoſi finora dalle ſcrupoloſe ricerche intorno ai piani, alla direzione, ed agli attacchi delle fibre ond' è compoſta la tunica muſculare della veſcica (*f*) già molto eſattamente deſcritta e dal *Santorini*, e da lui: ma ſe il caſo mi ha offerto uno di quei ſacchi diſpoſto in maniera comodiſſima per iſvelarne la ſtruttura, ed eſporla ſotto gli occhi degli ſtudioſi a più facile inſtruzione tanto di eſſi, quanto mia, ed a più chiara intelligenza del meccaniſmo con cui queſto agiſce ſul liquido,

---

(*a*) pag. 100.

(*b*) Pag. 114.

(*c*) *Oevr. Anatomic. Vol. II. Tab. II.*

(*d*) Cap. X. §. XX, e ſegg. pag. 202. ecc.

(*e*) Loc. cit. pag. 165. ecc.

(*f*) Loc. cit. pag. 169.

che vi ſi raccoglie, mi s' imputerebbe a negligenza il non valermi d' occaſion sì propizia per rendermene in certa guiſa benemerito, ſul ſemplice timor di multiplicare le deſcrizioni d' una coſa già conoſciuta.

Spaccata dall' imo al ſommo già ſeparata com' era quella veſcica dal corpo, non mi fu più permeſſo di notare la quantità delle fibre all' origine loro tendinoſe, ed il ſito preciſo donde ſi allungano molte delle carnoſe dalla ſinfiſe del pube, ch' era ſtata da me tagliata, e dai ligamenti vicini per iſtenderſi ſulla faccia anteriore del ſacco: ignorai pur anco a quale altezza cominciaſſero a divenir carnoſe ecc. ecc.; perciò giuoco forza mi fu di contentarmi di ſpogliarlo dell' abbondante celluloſa, e della rete dei vaſi ond' era circondato per mettere a nudo quello, cui tendevano le mire mie, cioè tutto il carnoſo; e con qualche diligenza venni a capo di ripulire ciò, che ſotto gli occhi miei è ſtato copiato dall' induſtrioſo Sig. *Beraud* Piemonteſe anch' eſſo, e rappreſentato al naturale nella fig. II. qui anneſſa. La lettera *D* indica la ſommità della veſcica donde ſi allungava il rimanente dell' *uraco* molto groſſolano, e carnoſo: *aa* indica il *muſculo penniforme* ſtretto ma ſpeſſo e robuſto in baſſo elevandoſi tra la immerſione degli *ureteri* nella parte inferior diretana della veſcica, ed il concorſo dei *canali deferenti OO* diviſo dallo ſtrato delle fibre carnoſe, ſulle quali s' appoggia lo ſteſſo *muſculo penniforme* incollatovi per mezzo d' un teſſuto cellulare abbondante, a traverſo del quale paſſano ſerbando varie direzioni i vaſi arterioſi, e venoſi, ed i nervi deſtinati alle ſoſtanze più intimamente collocate.

In queſto muſculo nella maggior parte delle veſciche maſcoline umane ſi raccolgono varj faſci di fibre, che dai fianchi, e dalle parti laterali ſuperiori eſterne della *proſtata* vengono a coprire l' eſtremità inferiore degli *ureteri*, ai quali gettano coſtantemente alcune liſche carnoſe invece di prenderne queſta dagli *ureteri* come s' immaginò il lodato *Santorini* (*a*) vedendo la comunicazione che ve n' ha fra queſti e quella; ma avendo io ſempre oſſervato, che le ſuddette

---

(*a*) Obſ. Anat. cap. X. §. XXI.

liſche groſſe ed uniche di tronco ſulla proſtata giunte agli ureteri ſi aſſottigliano diramandoviſi dattorno, e dopo breve corſo ſpirale ſempre più diminuendo ſvaniſcono, ciò nell' accennata idea mi conſermò.

Si eleva poi dilatandoſi il m. *penniforme*, e le ſue fibre a miſura, che ſi accoſtano all' *uraco* diventano più ſottili, divergenti, ed in molti luoghi della ſommità della veſcica s' intrecciano e ſi confondono con le ſimili del *penniforme* anteriore naſcente dal ligamento della proſtata ſegnato *L* nella Tav. XV (*a*) dell' opera non mai abbaſtanza encomiata *Santorino-Girardiana*; e dai ligamenti della faccia interna della ſinfiſe del pube per alcuni forti, e bianchi tendinucci, i quali talvolta ſono così proſſimi gli uni agli altri, e così bene ſul medeſimo piano colligati, che ne riſulta veramente una ſpecie d' aponeuroſe ſottile, ma larga (*b*). Altre fibre carnoſe poi dalle parti laterali del principio dell' uretra naſcendo biancaſtre ſi allungano paſſando ſulla proſtata medeſima, e laſciando luogo ſufficiente per lo corſo d' alcuni vaſi ſanguigni vengono a congiungerſi con quelle che abbiamo deſcritte finora.

Nella veſcica citata il m. *penniforme* poſteriore alla parte ſuperiore, che ai lati era di fibre molto rare, ne aveva gl' interſtizi occupati dalla celluloſa aſſai conſiſtente, ond' erano unite. Alcuni faſci poſcia ne occupavano a foggia di cordone il centro verticale, e dalla proſtata ſalivano rettamente fin ſu per l' uraco, e gettavano ad ambi i lati vari faſcetti, o liſche, le quali ſerviano di ſoſtegno alla maggior parte delle fibre divergenti.

Roveſciato al baſſo il m. *penniforme* poſteriore, appare il *piano carnoſo longitudinale*, che nell' accennata veſcica era molto ſpeſſo, cioè compoſto di molte ſpeſſe fibre robuſte ſtrettamente colligate inſieme. Naſceva carnoſo dall' orlo ſuperiore, e dal corpo della *proſtata* come ne naſcevano i rimaſugli dell' anteriore (alcuni dei quali però doveano aver tratta origine dai ligamenti della ſinfiſe del pube poſto che ſe ne

---

(*a*) Fig. I.

(*b*) Tale oſſervazione fu aſſai prima di me fatta dal Sig. *Girardi*, e nel cit. luogo eſpoſta.

ne ſcorgeano liberi i tendinucci nella veſcica intieramente ſeparata dal corpo) e molte fibre veniano dal collo ſteſſo della veſcica affatto carnoſe. Faceano tra tutte là un piano continuo, facile a ſepararſi dal traverſale ſottopoſto con il cacciarvi tra mezzo deſtramente il piatto manico ſottile dello ſcalpello.

Nelle veſciche ordinarie però queſto piano è molto irregolare, di fibre capillari, molto diſtanti, rare, e talvolta confuſe con quelle dello ſtrato ſoggetto, appunto come dal *Santorini* e dal *Girardi* è ſtato delineato (*a*). E tale pur ſi ſcorgeva di tratto in tratto anche nell' accennata veſcica, dove lo ſtrato *longitudinale* ſuddetto gettava frequenti fibre, che ſi perdevano nel *traverſale*, e facevano che il primo più difficilmente ſi potea ſeparare dall' altro dalla metà dell' altezza della veſcica all' *uraco*.

In quel ſito, che dà adito agli *ureteri*, alcuni faſcetti dello *ſtrato longitudinale* ſi ſcoſtavano per ammettergli nella ſoſtanza del ſacco, ed alcune liſche gli avvolgevano ſpiralmente diramandoviſi per ogni verſo, e in tal guiſa concorrevano anch' eſſe a formare parte della tunica loro fibroſa, della quale non vidi mai più diſtintamente l' eſiſtenza e l' intreccio fino ai reni medeſimi come in queſto cadavero, ed in quello del figlio di Marchino (*b*) calzolaro in Aqui, ſtato da me pubblicamente ſparato in quella città nella ſala della Notomia, ſtatavi aperta mentre ch' io v' era Profeſſore. Degli *ureteri*, e delle malattie loro parleremo in breve. Dopo laſciato quello ſpazio per l' inſerzione degli accennati canali, ch' è per lo più ovale, i faſci carnoſi dello *ſtrato* medeſimo di nuovo ſi accoſtano, le fibre ſe ne avviticchiano inſieme, e le altre ſi allargano ſul corpo della veſcica; intanto che ſalgono prima paralleli, e poſcia convergenti, ſi aſſottigliano, e finalmente ſi radunano ſulla ſommità del ſacco in un faſcio dintorno all' *uraco*, e lo accompagnano fino

---

(*a*) Loc. cit. Fig. I.

(*b*) Avrete qui unita la ſerie de' guaſti, che ſi videro in quel giovinetto, prodotti da tre calcoli, il più groſſo de' quali non minore d' un uovo di gallina eraſi diſtaccato dal quarto ſuperiore dell' uretere deſtro.

all' umbilico. E qui nemmeno ſi accordano le mie oſſervazioni con quelle del *Santorini*, perciocchè non oſtante le diligenze ripetute, e l' uſo del metodo facile, e naturale indicato da lui (*a*), ho ſempre veduto le fibre longitudinali dello ſtrato, che deſcrivo, a continuare il corſo lungheſſo l' *uraco*; ed oſſervai, che gonfiata la veſcica, ed eſſiccateſi un poco le fibre alla ſommità, reſtano sì tenui, che molte volte sfuggono all' occhio, ma immollandole nuovamente nell' acqua o nell' aceto, ſi tornano a rendere apparenti. Eſponendo poi la veſcica umana gonfia e ſecca al vivo lume ſi vede bensì dov' eſſa è munita di fibre più denſe e craſſe; ma che (*b*) *immutatæ* (*fibræ*) *altero peragrato latere eædem per adverſum ad eundem remigrent locum rectarum ſingulæ* queſto non ho pututo vederlo giammai: o vanno all' *uraco*, o ſommamente attenuandoſi, appiattandoſi, dividendoſi in minutiſſime liſche ſi perdono nella ſoſtanza della celluloſa, o dei vicini ſtrati con le fibre de' quali s' intrecciano ſenza ordine.

In riſguardo al *piano traverſale* veramente l' indefeſſo *Santorini* ci ha data una deſcrizione molto eſatta per quello che ſpetta alle veſciche ordinarie e naturali. In fatti le fibre ne vanno obbliquamente in traverſo, poi ſi ripiegano o in alto o in baſſo; alcune ſeguono la direzione delle longitudinali nello ſtrato delle medeſime inneſtandoſi: altre prima di compire il giro del ſacco s' appiattiſcono, s' attenuano, s' affiggono alla tunica membranoſa, dove inſenſibilmente ſe ne ſmarriſce la traccia. Queſto piano da ſe ſolo avea maggiore ſpeſſezza che tutto il rimanente della tunica fibroſa preſo inſieme; ed era compoſto di faſci più minuti, per lo più paralleli, diretti in traverſo, diſpoſti a un di preſſo come la tunica fibroſa delle arterie (*c*), e molto più copioſi nel corpo della veſcica, che verſo la proſtata, dove queſta nella ſua parete interna ſembrava un denſiſſimo lardo, ed ove molte di queſte fibre confuſe, partendo dai lati della proſtata deſcriveano una curva in alto, dalla quale ſi elevavano rami e liſche più o meno lunghe, e per ogni canto dirette, indi

---

(*a*) Obſ. anatom. cap. X. §. XX. pag. 202.

(*b*) ibid.

(*c*) Ved. il mio Tratt. delle oſſ. in Cirurgia Briolo. Torino 1784. 8. vol. II. cap. 6. Sez. I. §. XVII, e ſegg.

nuovamente vi ſi immergevano. Alcune diſpoſte in ſenſo contrario aveano le corna in alto ; altre ſervian di briglia alle ſuperiori, nelle quali s' inneſtavano, ed altre vi s' intrecciavano fra di loro nella guiſa , che vengono intrecciati i vimini all' orlo d' un caneſtro.

Verſo l' *uraco* non erano più tanto copioſe le fibre del *piano traverſale* ; avevano anche un corſo molto irregolare, aderenti per molti freni carnoſi ai due piani tra i quali ſi trovavano , ed alla tunica proſſima della veſcica. Laſciavano qua e là ſpazj voti e lacune , forſe perchè ivi erano ſtati innicchiati i calcoli più prominenti, che creſcendo ne avevano diſtrutte le ſcambievoli aderenze , ed i legami . I faſci mezzani più craſſi, più copioſi ſi ſoſtenevano a vicenda col mezzo di molti freni muſculari , che gettavano , e ricevevano, e queſti obbliquamente ſcorrevano quali in alto , e quali al baſſo per confonderſi con i più vicini , o ineſtricabilmente perderſi tra le fibre, che gli componevano. Queſto piano veramente avrei potuto dividerlo in tre o quattro lamine ſul corpo della veſcica , però ſolamente per l' eſtenſione verticale di quattro dita in traverſo.

Il *piano interno*, ch' è ſtato così chiaramente deſcritto dal *Santorini* (*a*), e dal *Girardi* (*b*), è veramente irregolare nella direzione delle colonne carnoſe, che nelle veſciche ſtate da qualche malattia, e particolarmente dalla preſenza di qualche calcolo travagliate, ſono cagione di quelle tante diſuguaglianze nel cavo della veſcica, per le quali non ſenza ragione fu dal *Santorini* medeſimo paragonato ai ventricoli del cuore; ed io non ho notizia di tavola veruna che lo rappreſenti meglio, che quella del lodato Sig. *Lieutaud*. Nella veſcica, della quale favelliamo, formava quaſi una tunica diſtinta come quello, ch' era diſtinto dal *traverſale* per una bianca e denſa *tela celluloſa* (Fig. V. *ZX*, *ZX*) che ho ſeparato con mirabile facilità dal piano precedente quaſi per un terzo di tutto il diametro della veſcica ad amendue i lati del taglio. Queſta *tela celluloſa* era il ſoſtegno di quelle bizzarramente diſ-

---

(*a*) Obſ. Anatomicar. cap. X. §. XX. pag. 22.

(*b*) Septendec. Tab. Explic. Tab. XV.

poſte colonne carnoſe, che formano i due ovali rappreſentati nelle Fig. I, e V (*a*), i quali nel centro della veſcica poſteriore ſi combaciano, ed hanno in sè ſcolpite quelle moltiplici foſſette profonde, otturate tanto dalla *tunica interiore* del ſacco, quanto dalla *tela celluloſa* mentovata.

V' erano poi alcune colonne pendenti dalla ſommità del cavo della veſcica, ed alcuni ſcommuzzoli del tramezzo, ch' io non ho fatti diſegnare perchè non avrebbero inſtruito di più, e ſe non gli aveſſi portati via con le forbici, avrebbero generato confuſione.

In altre veſciche benchè ſi oſſervino ora più, ed ora meno diſtinte le traccie dei quattro piani carnoſi, che nella foggia accennata diſpoſti mi vennero offerti dal caſo, non è però del pari agevole ſepararne gli uni dagli altri come qui mi è rieſcito. Sono avvezzo a poterne diſtaccare dagli ſtrati ſottopoſti i *muſculi penniformi* in tutte le veſciche degli adulti dall' uraco alla *proſtata*, al *ligamento Santoriniano* della medeſima; ed in tutte le veſciche umane, che notomizzai, gli ho trovati poco differenti eccetto nella ſpeſſezza delle fibre, e nell' apparenza del *cordone central-verticale*: ma ſe gli ſeparo intieri, il *piano longitudinale* ſoggetto ne ſoffre, e non reſiſte ordinariamente più alla ſeparazione, che mi propongo fare del traverſale.

Anche nelle veſciche femminili ſempre ſi trovano; la maggior quantità delle fibre però, che ne formano la radice del poſteriore, in eſſe viene dalla denſiſſima ſpugnoſità, che uniſce il fondo della veſcica alla porzione anterior aggiacente della vagina; quella dell' anteriore dai ligamenti della ſinfiſe del pube interni, e dalla vicina porzione dell' uretra.

Il *piano traverſale* non è quaſi mai ſenſibilmente compito nelle veſciche ordinarie; le fibre ne ſono piuttoſto diſpoſte a rete, che tanto vicine, e regolari da fare una tela, perchè le briglie carnoſe, che da ogni lato ſi allungano per ſoſtenerſi a vicenda, laſciano cert' interſtizi, per li quali ſovente ſi può toccare, anzi sbuccia fuori, e vi fa molti gozzi l' interna tunica quando gonfiaſi la veſcica.

(*a*) Lett. XXXX ZZZZ.

L' *interno* è per l' ordinario affatto confuſo col *traverſale*, eccetto in baſſo dove (ſe incontraſi la veſcica d' un vecchio robuſto) poſſiamo trarne coſtrutto, i faſcetti del traverſale ſeparandoſene anche agevolmente.

OSSERVAZIONE III.

Sulle altre tuniche di quella, e delle altre veſciche.

Il celebre *Winslow* dice, che le tuniche proprie della veſcica ſono tre una carnoſa, una nervoſa, ed una interna o villoſa; e ſoggiunge (*a*), che la nervoſa è di ſtruttura quaſi ſimile alla nervoſa del ventricolo. Il Sig. *Lieutaud* (*b*) aſſicura, che queſt' organo è compoſto apparentemente di tre tuniche, muſculare la prima o eſterna compoſta di due piani di fibre, uno longitudinale, ed uno traverſale ovvero obbliquo, ch' è l'interno; la ſeconda nervoſa, che ſoſtiene le ultime diviſioni dei nervi e dei vaſi, che ſi diſtribuiſcono alla veſcica; la terza vellutata ſimile a quella del ventricolo, e delle inteſtina.... Quaſi tutti gli Anatomici in ſomma a voi, preſtantiſſimo Signore, ben noti, chi più, chi meno chiaro accennano che v' ha tunica nervoſa nella veſcica, e la diſtinguono dalla membranoſa interna, oſſia vellutata com' eſſi l' appellano per l' analogia, che ſuppongono tra queſto ſacco e 'l ventricolo, e le inteſtina; e vogliono che tutta la ſuperficie interna della muſculare ne ſia tappezzata. Io bramoſo di vederla, volendo trovarla ad ogni modo incollata ſu tutto il cavo, gettai ſempre la fatica ed il tempo; perciocchè nel primo terzo, o inferiore (che pure ne dovrebb' eſſere il più ſenſitivo) non vi ho ſaputo ſcoprire niente più di tunica nervoſa di quello ch' io men abbia trovato nelle arterie (*c*), ſe parliamo di tunica dalle altre ſeparabile: che con tal nome voleſſimo indicare una ſottiliſſima polpa bianca diafana, quaſi affatto indiviſibile dalla tunica membranoſa, ſulla qua-

---

(*a*) Tatt. del Baſſo ventre §. 452.

(*b*) Eſſais d' Anat. Artic. XVI. Sect. 4.

(*c*) Tratt. delle oſſ. in Cirugia già cit. loc. cit. §§. 42, e 43., pag. 116, e 117.

le, facendo con eſſa un ſolo e medeſimo corpo, è incollata; non avrei difficultà ad ammetterla poſtochè l' ho ſempre veduta, e fatta vedere a' miei allievi.

Sapete che gli antichi appellavan nervoſe le tuniche bianche, e perfino le aponeuroſi, i ligamenti, le eſpanſioni tendinoſe ecc., e vi ſovviene, che il *Falloppia* volle deſcrivere la tunica interna con eſprimerſi nella ſeguente maniera *ſcias igitur veſcicam tres habere tunicas... unam a peritonæo communem, & duas proprias. Alteram quidem, quæ tenuis admodum eſt, nerveam, lucidam, candidiſſimam... a natura inſtitutam ad continendum lotium ne extra excolet &c.* ed è anche vero, che dicendola egli *omni fibrarum genere nervoſo denſiſſime textam* pare che di tale ſua natura foſſe pienamente perſuaſo; ma ciò, che poche linee ſopra diſſi, ed il metterla, che il *Falloppia* fa aſſolutamente nel cavo della veſcica per contenervi immediatamente l' urina, ci aſſicura, che la ſua nervoſa è la vellutata dei moderni preſſo di me ſemplicemente membranoſa, e non equivoca continuazione dell' epitélio della ghianda, che ſi prolunga fin colà dentro per lo canale dell' uretra.

Tutti i lodati autori credono averla troppo bene oſſervata per non ammetterne l' eſiſtenza ſu tutta la periferia del cavo; e nelle deſquamazioni, che ſuccedono pur troppo ſovente della vellutata, le ſoſtanze furfuracee, e ſquamoſe con aſſai delle mucoſe pretendono dependere dalla nervoſa medeſima, che ſi macera ſi diſtacca a begli ſcommuzzoli, i quali ſi vengono poi ad evacuare inſieme con le orine. Inoltre avvalorano il parer loro appoggiandolo ai dolori interni, che là ſentono i malati allora, ed al troppo ſquiſito ſenſo, di cui ordinariamente queſt' organo è dotato.

Io ho già detto il mio ſentimento. Aggiungerò tuttavia, perchè mi piace eſſere ſincero, che nella veſcica del vecchio di Centallo da qualche linea ſuperiormente alla foce degli *ureteri* nella veſcica (fig. I. *EPa*, *FPb*) tutt' intorno vi ho trovato una ſoſtanza, che d' ottimo grado avrei nominato eſpanſione nervoſa, qua più, là meno ſpeſſa, diſpoſta a reticelle accumulate le une ſulle altre, nelle aje delle quali ſtagnava una tenace mucoſità. Tal eſpanſione aveva il colore del lardo freſco; ſi portava ſino al meato urinario interno, e di là fino oltre al bulbo dell' uretra ſempre più attenuandoſi, e qui ſvaniva affatto confondendoſi con la ſpugnoſità di queſto canale.

Altre veſciche ſtate occupate e tormentate da calcoli mi hanno preſentato la medeſima apparenza; ma non ſi dee obbliare, che n' era ſtata ſeparata ed abraſa la membranoſa tunica.

I vaſi ſanguigni (*a*) poi notati dal Sig. *Lieutaud* (mi piace di ripetere queſto nome degnamente celebrato, perchè dalle opere di quell' uomo grande mi glorio d' aver preſo quell' abito d' oſſervare, e quel guſto per la Notomia, che vo ſecondando) e da molti altri come ſe occupaſſero lo ſteſſo ſito che vi ſuppongono occupato dalla tunica nervoſa, non gli trovai neppure ſempre apparenti in tutta la veſcica fra le tuniche carnoſa e membranoſa: ſi vedono però eleganti diramazioni, ed intrecci dei medeſimi verſo il collo nei calcoloſi, nei ſoggetti ad eſpulſione di ſabbie, d' orine acrimonioſe, negli attaccati da infiammazioni ai contorni dell' ano e del principio dell' uretera, a gonorrée virulente abituali. Maggiore poi ſe ne vede il numero, ed il color intenſamente roſſo in coloro, che hanno prima di morire dovuto permettere l' introduzione del catetere nella veſcica più e più volte, anche per la ſemplice paraliſia, o per quell' oſtacolo che nei vecchi deboli ſuole opporre all' evacuazione dell' orina il gonfiamento graſſoſo del contorno interiore del collo della veſcica, dal quale (nè debbonſene eccettuare gli uomini apparentemente più ſani) viene a formarſi nell' interno della medeſima un *riſalto circolare* più o meno elevato e ſpeſſo (*b*), dintorno

---

(*a*) Niſſun' altra coſa a mio credere ſi può con maggior apparenza di ragione appellare *tunica vaſculare* della veſcica, quanto il bell' intreccio di vaſi ſanguigni, che fra la celluloſa, ed il piano eſterno della muſculare s' incontra, la più elegante, ed eſatta eſpreſſion della quale io credo, che ſi veda nella Tav. II del ſecondo Vol. dell' eccellenti opere anatomiche del celebre *Duvernei*. *Ruiſchio* nel *Teſoro Anatomico* X. n. 126. ce n' eſpreſſe pure la rete, ma con forſe troppa affettazione, dalla quale non andavano eſenti le Tavole di quel valoroſo Notomiſta.

(*b*) Non ſi vede nelle veſciche de' giovani; ma negli avanzati in età l' ho frequentiſſime volte oſſervato ſuperare la ſpeſſezza d' un dito, e l' altezza di mezzo pollice; e tra il medeſimo, e la parete vicina della veſcica ho trovati particolarmente ne' gottoſi calcoletti e ſabbie l' evacuazion delle quali riuſcia difficiliſſima tuttochè eccitato aveſſero teneſmi e divea cui ſi adunano ſabbie, mucoſità, e quella certa quantità d' orina, che vediamo a tanti uſcire poſcia involontariamente qualche momento dopo d'avere terminata la principale evacuazione, ma non affatto ſopito lo ſtimolo, che la proccura.

Non ho mai veduto queſto *riſalto* (che non è da confonderſi punto con il *Trigono* del *Terraneo*, poichè occupa ſoltanto la parte poſteriore del collo, e del fondo della veſcica) nelle veſciche femminili, eccetto in una Donna ſtata ſoggetta ad incontinenza d' orina per ben lungo tempo, la veſcica della quale avea qua e là nella tunica muſculare certi condenſamenti calcarei ſimili affatto a quelli, che difformano la tunica fibroſa delle arterie (*a*). Queſta infelice venne da me notomizzata ſul principio di Maggio ultimo ſcorſo, e dal contorno del meato urinario interno ſi elevava quel riſalto a guiſa di cinque more immature, cioè vi ſi numeravano cinque acini cremiſi granelloſi, ſeparati da profonde incavature non ulceroſe (*b*), furono giudicati da alcune perſone dell' arte, che ſi trovarono preſenti all' apertura di queſto cadavero, emorroidi della veſcica; ma il tagliente dello ſcalpello dimoſtrò, ch' era la ſoſtanza della veſcica ſteſſa così elevataſi, coperta d' una rete di finiſſimi vaſellini ſanguigni innumerabili pieni di cruore: rete che ſi continuava fino al livello della foce degli ureteri ugualmente colorita, e ſucceſſivamente progredendo ſu per lo corpo della veſcica ſvaniva, elevandoſi pochiſſimo al davanti.

Non

ſcica e d' ano importuniſſimi ſeguiti da ſpaſimi in quella, non palliabili eccetto dallo ſchizzettarvi la mucillagine de' ſemi di pſillo allungata con l' acqua d' orzo, ed accompagnati da ſchifoſa involontaria dejezione d' alvo.

(*a*) Ved. Trattato delle oſſ. in Cir: Torino 1784. 8: Briolo. Parte II. cap. VI. Artic. X dove ſi leggono le *oſſerv. ſui condenſamenti di ſoſtanze eterogenee*, *ſulla litiaſi delle arterie*, *e ſull' influenza di queſta a produrre aneuriſmi*, argomento nuovo, ma pur troppo fondato ſui fatti.

(*b*) Oltre alla litiaſi della tunica muſculare di queſto ſacco avea pure alcuni veri calcoli nei reni; ed altri ſimili, ma aſſai più groſſi, alcuni maturi ed altri formantiſi nella ſoſtanza della matrice, dei quali darò notizia a ſuo luogo, aggiungendovi le tavole a maggiore chiarezza ed evidenza, non eſſendo ſtata queſta l' unica matrice, nei contorni della quale io abbia trovato calcoli di groſſezza e di figura ſtraſordinaria.

Non poſſo preſcindere dall' accennare, che dintorno al collo della veſcica, e non mai altrove quando queſta è ſana, ſi vedono e ſi toccano molti corpicciuoli, che ſollevano, e rendono granelloſa la ſuperficie interna di queſto ſacco in proporzione della groſſezza, che contraggono per la preſſione, e la fregagione, che ſoffrono dai calcoli, e l' irritazione ch' ivi accendono le renelle paſſando, o movendoviſi ſopra con le orine acrimonioſe e mordaci. Queſti dal diligentiſſimo *Santorini* furono conſiderati come altrettante glandulette preeſiſtenti, numeroſe abbaſtanza per formare da sè tutta l' elevazione del *Trigono*, e come gli unici e veri fonti onde ſcaturiſce quella mirabile quantità di muco, che lorda le orine della maggior parte dei calcoloſi, e fa talvolta un genere di malattia particolare, ſtato in queſt' anno medeſimo oſſervato prima da me ſolo, e poi dal dottiſſimo Sig. *Verna* (*a*) (Medico oſſervatore attento quant' altri mai, e per la felicità della ſua pratica giuſtamente ricercato in queſta Metropoli) inſieme con me, in un negoziante per nome *Areſe* che tuttora vive, ſebbene non ancora intieramente guarito, ſiaſi ſottratto alla direzione del medeſimo, ed all' occhio mio. Il *Ruiſchio* fa derivare tali mucoſità immediatamente dalle boccucce dei vaſi medeſimi continui con il ſiſtema arterioſo; intorno alla qual opinione ben vi è noto ciò, che venne detto al celebratiſſimo Anatomico Torineſe *Giovanni Fantoni* (*b*).

(*a*) Il carattere particolare di quella malattia, i ſintomi, che la accompagnarono, ma ſoprattutto la prodigioſa quantità di muco tenaciſſimo, che ne uſciva ogni giorno per l' uretra, meritano d' eſſere eſpoſti agli occhi, ed alle rifleſſioni dei Medici, ed io mi luſingo, che il chiariſſimo Sig. Dottor *Verna* ſi riſolverà a farlo; intanto vi baſti, o Signore, ch' io vi accenni tale muco di color bigio ſudiccio ben ſovente avere occupato all' altezza di quattro dita in traverſo il fondo d' un ben ampio orinale; ed avere notato amendue, che inclinando il vaſo dall' altezza di tre piedi, come per votarnelo, quello a ſalde ſi allungava fino a terra, ma toſto da sè, per una tenacità, ed elaſticità maraviglioſa tornava tutto a raccoglierſi nel fondo dell' orinale, al quale il rimanente della maſſa rimaſta n' era attaccata.

(*b*) *Diſſertationes Anatomicæ ſeptem priores renovatæ Taurini* 1745. 8. *ex Typogr. Regia. Diſſ. VII. De renib. ureterib. & veſica pag.* 334. *nota q.*

OSSERVAZIONE IV.

Intorno all' Uraco.

Separando dalla *membranoſa*, o interna la *tunica muſculare* della veſcica, nella parte più alta s' incontra un cordocino biancaſtro, ch' è propriamente l' *uraco*. Non naſce già ſempre dalla ſommità centrale di queſto ſacco, ma ora a deſtra, or a ſiniſtra, e talvolta molto più dalla faccia anteriore, di modo che gonfiandolo, la ſommità ſi eleva un mezzo pollice più alto che non è l' origine dell' uraco ſteſſo, il quale in ogni caſo ha sì forte unione con la tunica membranoſa ſuddetta, che ſi comprende chiaramente eſſere una vera continuazione della medeſima.

E ciò tanto meglio ſi conoſce eſaminando il pariete interiore del ſacco dirimpetto a quel luogo, perciocchè vi ſi ſcorge ſempre un punto concavo più o meno profondo.

La maggior parte degli *urachi* rappreſentano un cordoncino uguale in groſſezza dalla ſommità della veſcica al bellico; altre volte è picciolo nel ſuo principio, indi ſi allarga, ſi fa nodoſo ed irregolare; nè tanto di rado accade che ſi trovi veramente conico, cioè più groſſo alla veſcica ed inſenſibilmente più ſottile divenire a miſura, che all' anello umbilicale ſi avvicina.

In quei nodi, o gozzi, che pur qualche volta ſono ſtati da me oſſervati negli *urachi* umani, anche in ſoggetti molto nell' età avanzati, s' incontrò quando una ſpecie di gelatina, quando una materia gialla pultacea, molto viſchioſa, ed alcuna volta una ſoſtanza quaſi cartilaginoſa.

Una ſola volta ho veduto l' uraco ad aprirſi e a gettar fuori l' urina per l' anello umbilicale, e fu in una povera Donna, cui la preſſione dell' utero negli ultimi giorni della gravidanza avea totalmente impedito l' evacuazione della medeſima per l' uretra, e non avea trovato Ceruſico capace di conoſcere la vera cagione di tale ſuppreſſione, nè abile a introdurre in quella veſcica dilatatiſſima il catetere per ſollevarla. Fu veduta da me con l' uraco aperto ſei meſi dopo il ſuo puerperio, e venne da tale ſchiſoſo incomodo liberata col mezzo della ſciringa, che tenne ſei giorni continui aperta nell' uretra, di varie cauterizzazioni con la pietra infernale ſul margine dell' umbilico inferiore ſiſtoloſo, e con coſcinetti graduati applicati ſu varj pezzi d' eſca immollati in un miſcuglio di farina volatica, e bianco d'uovo mantenuti con l' opportuna faſciatura nella dovuta ſituazione (*a*).

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

Fig. I.

AAA.	Contorno della veſcica umana ſpaccata anteriormente; ſpeſſezza delle tuniche ond' era formata.
BB.	Metà dell' altezza di tale veſcica.
ACD.	Seno conoidéo - *bb.* ſito dove tal ſeno incominciava.
D.	L' uraco.
EPa.	L' apertura preternaturale dell' uretere ſiniſtro.
FPb.	L' apertura nella veſcica dell' uretere deſtro.
*GH***	Sarcoma bifido dependente dal Trigono della veſcica ſteſſa alterato.
G.	Lobo deſtro del Sarcoma.
H.	Lobo ſiniſtro del medeſimo.
bb.	Il collo della veſcica appoggiato ſulla
I.	Proſtata morboſamente voluminoſa ſpaccata al davanti.
**	I picciuoli d' amendue i lobi ſuddetti, che ſi riducono ad un ſolo diſcendendo verſo
K.	Il ſeno del Verumontano, nel quale sboccano al davanti i condotti ejaculatori, attorniato dalle boccucce dei canaletti proſtatici, e delle glandule del *Terraneo*.
L.	Porzione dell' uretra ſpaccata ſuperiormente.
MM.	Le veſcichette ſeminali, o ſpermatiche.
NN.	L' origine dell' uretra fra la proſtata, e 'l collo della veſcica.

(*a*) Se ne darà il rimanente nei ſeguenti Volumi.

OO.	Porzione de' canali deferenti.
Pa.	L' uretere ſiniſtro. - *Pb.* Il deſtro.
XXXX-ZZZZ.	Alcune colonne dello ſtrato interiore della tunica muſculare, e le lacune fra le medeſime formate dalla diſpoſizione, e preternaturale accreſcimento de' faſci del mentovato ſtrato.
yy.	Il ſito ſino a cui ſi elevava la proſtata morboſa.
&&.	Il ſito ſino a cui ſi ſtendea in baſſo la medeſima.

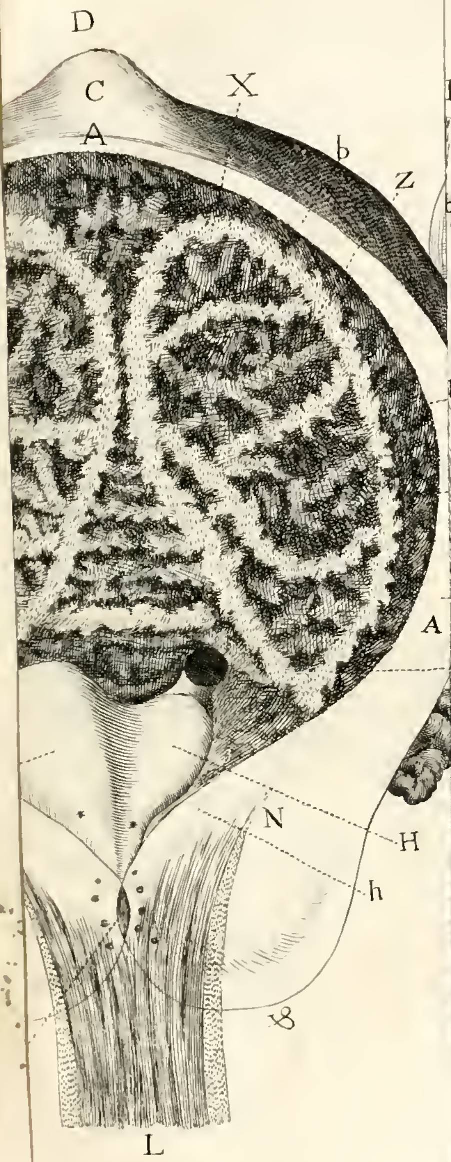
Fig. II.

D.	La ſommità della veſcica.
aa.	Il muſculo penniforme.
bbb.	Il tendine, oſſia cordone centrale del muſculo ſuddetto.
II.	La proſtata morboſa, naturalmente diſtinta in due lobi.
L.	La porzione membranoſa dell' uretra ſpaccata.
MM.	Le veſcichette ſeminali, o ſpermatiche.
NN.	Lo ſtrato verticale, o longitudinale della tunica muſculare.
OO.	I canali deferenti.
PP.	Gli ureteri.

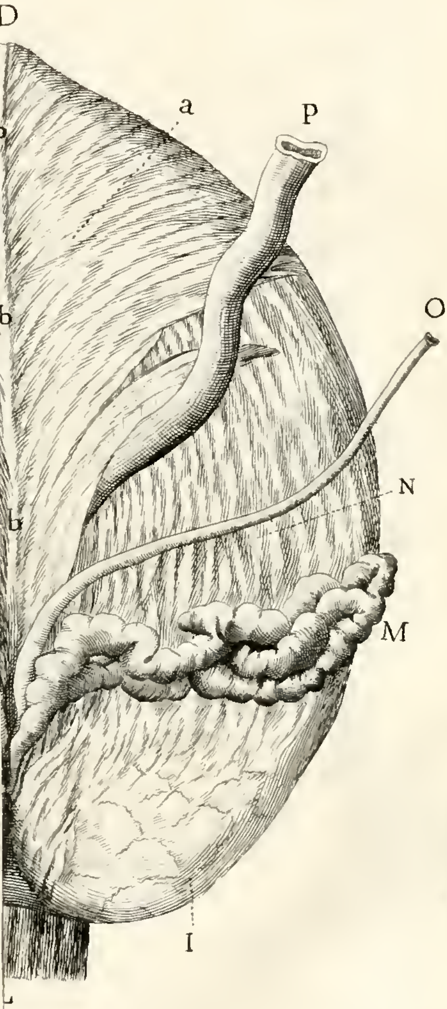
Fig. III.

D.	La ſommità della veſcica.
E.	L' apertura morboſamente dilatata dell' uretere ſiniſtro.
F.	Quella del deſtro.
GH.	Il ſarcoma rivoltato in baſſo per far vedere la parte ſana del *Trigono* ſino alla ſoce degli ureteri medeſimi, che nello ſtato naturale ſogliono aprirſi nella veſcica con due feſſurette convergenti in baſſo, appunto come le rappreſentò il *Terraneo* nella Fig. II.; alcune volte poi ancora come ſi veggono nella Tav. XV. Fig. III. delle *Santorino-Girardiane*, Lett. *ee*.
I.	La proſtata ſpaccata.
K.	Il ſeno del Verumontano. - *L.* L' uretra ſpaccata.

Fig: I.


D
C
X
A
b
Z
A
N
H
h
ȣ
L

II.


D
b
a
P
b
O
N
b
M
I

Beraudi diſsegnò

Fig. I.

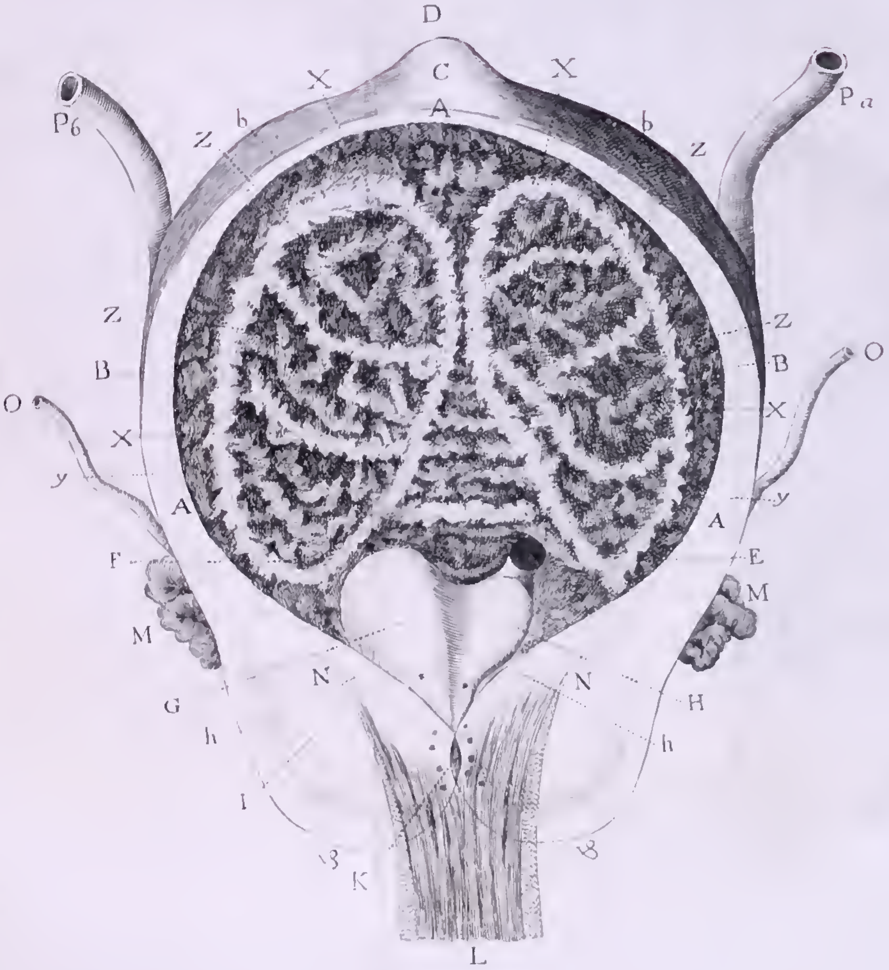
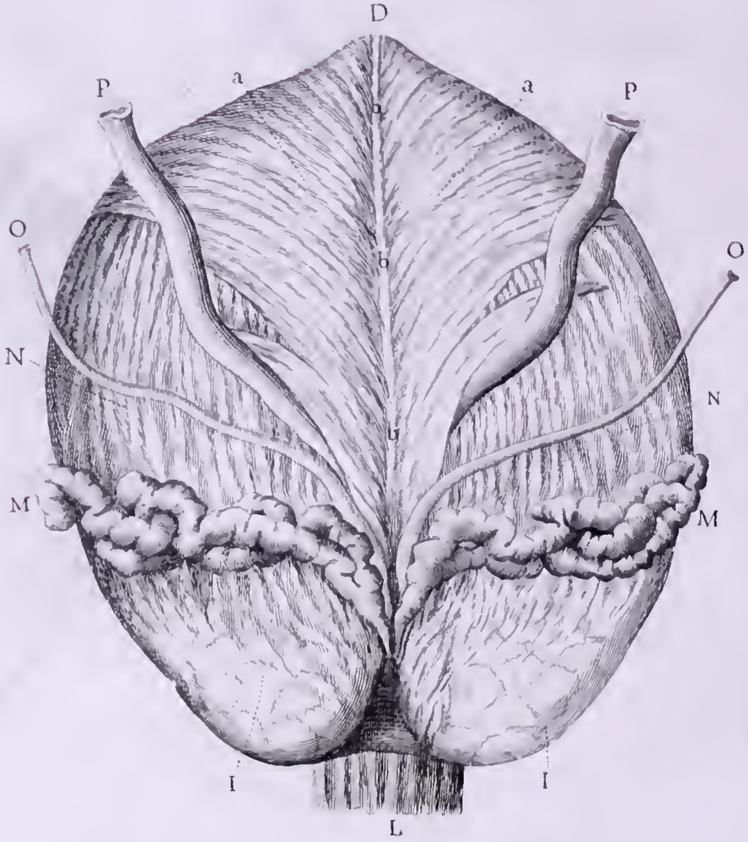
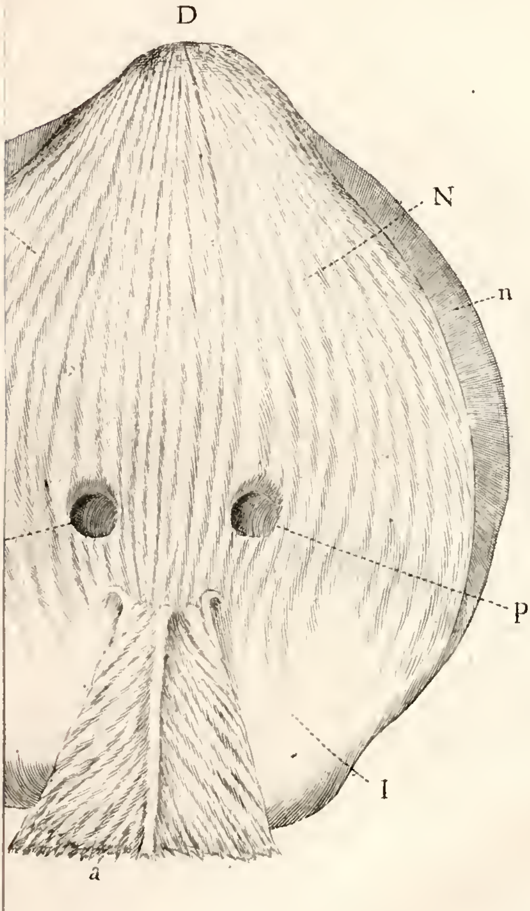

D
C
X
X
A
Pb
Pa
Z
b
b
Z
Z
Z
B
B
O
O
X
X
y
y
A
A
F
E
M
M
G
N
N
H
h
h
I
β
β
K
L

Fig. II.


D
a
a
P
P
b
b
O
O
N
N
u
M
M
I
I
L

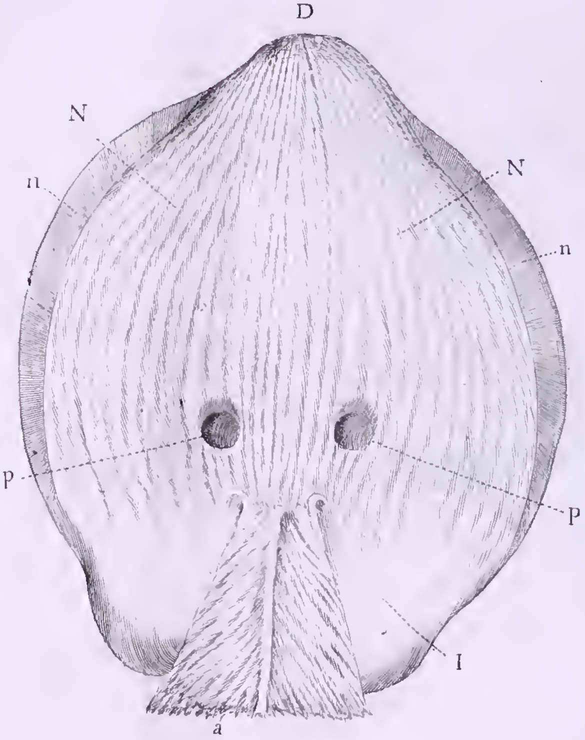
Malacarne Notomizzò *Berardi diſsegnò* *è Italiana Tav: III* *Tom: III Pag: 125*

Fig: IV.



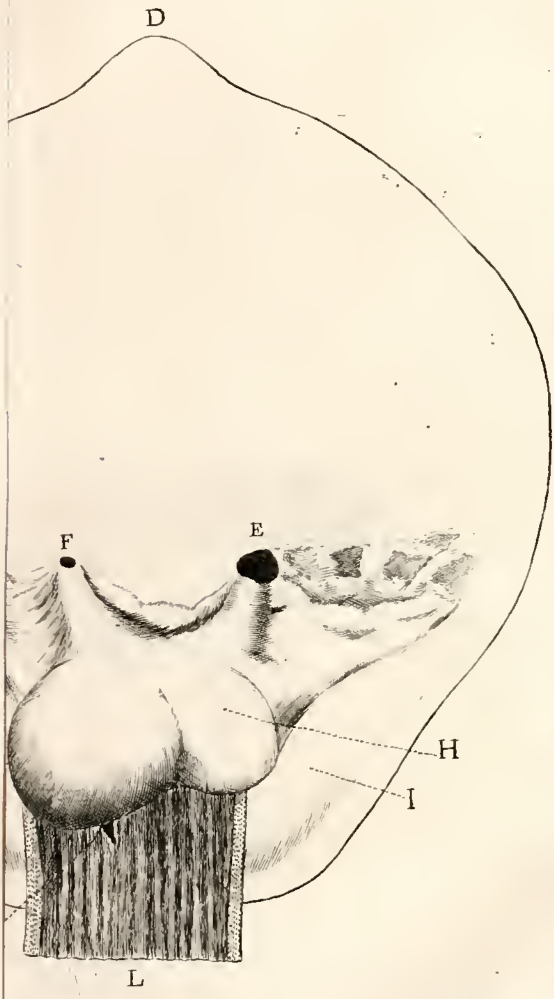
izzò *Beraudi diſsegnò*

Fig. IV.



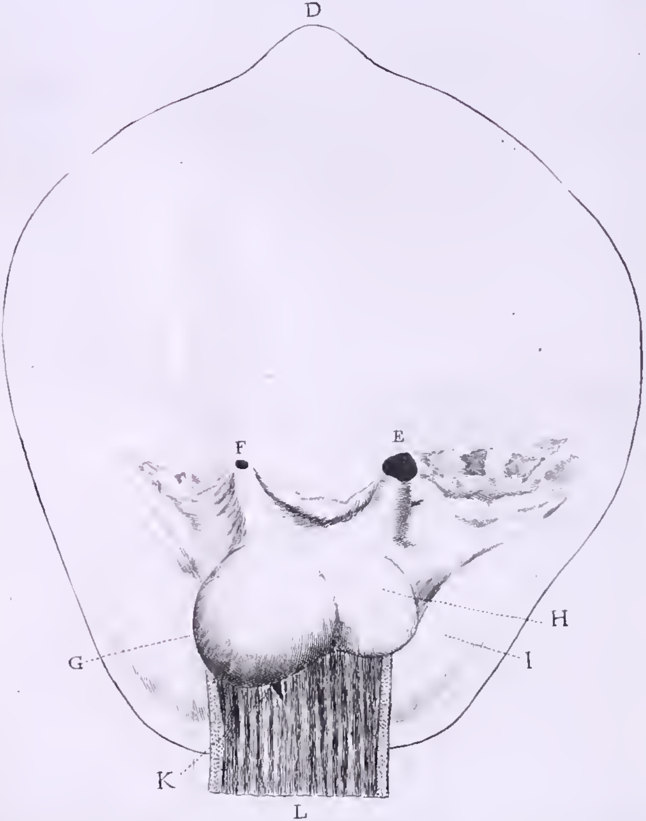
Malacarne Notomizzò Beraudi diſsegnò

Fig: III.



Berardi diſsegnò

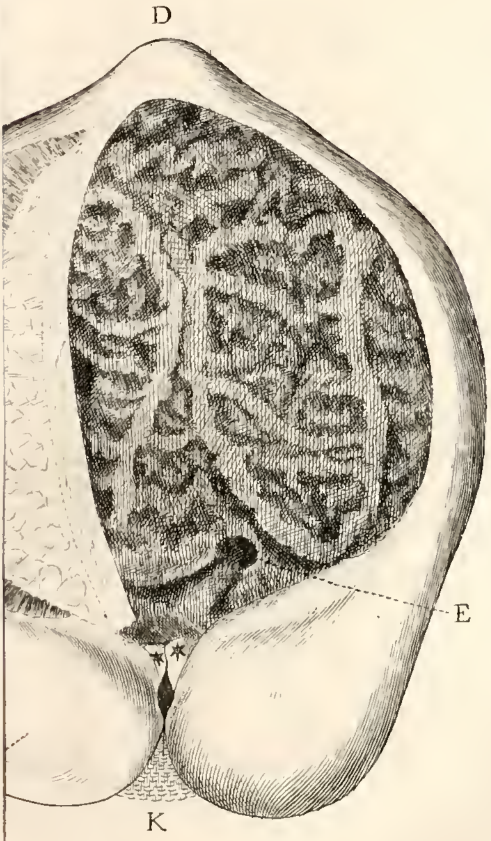
Fig: III.



Malacarne Notomizzò

Berardi disegnò

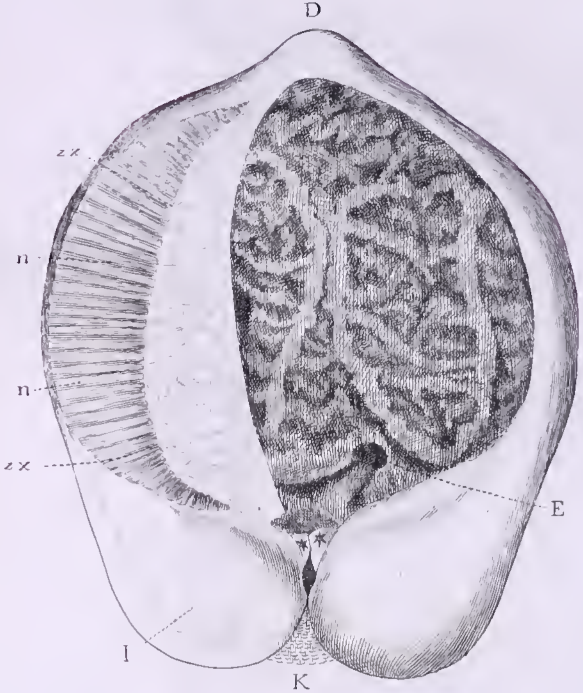
Fig: V



ò

Beraudi dißegnò

Fig: V


D
zx
n
n
zx
E
**
I
K

Malacarne Notomizzò *Beraudi dißegnò*

Fig. IV.

a.	Il muſculo penniforme già ſeparato, reciſo in traverſo a picciola diſtanza dalla ſua origine, e piegato in giù.
D.	La ſommità della veſcica, dove convergono moltiſſime fibre dello
NN.	Strato longitudinale, o verticale, che concorrono ad avviluppare l' uraco, e a formare il ligamento ſoſpenſorio della veſcica.
NN.	Porzione del piano traverſale coperto dalle fibre del verticale.
PP.	Le aperture eſteriori della veſcica; nelle quali penetrano obbliquamente convergendo gli ureteri, che raſente la veſcica erano di calibro quaſi uguali.
I.	La proſtata.

Fig. V.

Rappreſenta la faccia interiore della veſcica ſgombra del ſarcoma ſtato reciſo in ** acciocchè ſe ne poteſſero meglio vedere gli ſtrati della tunica muſculare.

n.	Strato traverſale.
ZX ZX.	Lo ſtrato interiore, o reticolato; fra queſto ed il precedente appare una lamina, o ſia tela di teſſuto cellulare molto denſa, forte e bianca, ſulla quale ſtava tenacemente incollato queſt' ultimo.
D.	La ſommità della veſcica. - *E.* La bocca dell' uretere ſiniſtro.
I.	La proſtata ſpaccata. - *K.* Il ſeno del Verumontano.

ESPOSIZIONE ANATOMICA

DELLE PARTI RELATIVE ALL' ENCEFALO DEGLI UCCELLI.

TRATTATO II.

Delle membrane, che ne avvolgono il cerebro.

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acqueſi, e Chirurgo Maggiore del Real Preſidio di Torino.

Al Chiariſſimo Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. il Duca di Parma, Preſidente al Gabinetto di Storia Naturale, Profeſſore primario della medeſima, e di Notomia in quella Regia Univerſità.

CI è libero finalmente il campo d' eſaminare l' encefalo degli uccelli, e poſſiamo farlo con tanto maggior eſattezza, quanto più diſtinte ſono le parti oſſoſe, dalla cognizione delle quali in tutte le regioni loro dipende quella degli organi dentro di eſſe contenuti.

La diſpoſizione, e l' eſtrinſeca forma di queſti è veramente aſſai diverſa da quella, che hanno nei crani umani, e qualcheduno dei medeſimi occupa ſito in apparenza troppo differente perchè ci dobbiamo ſtupire dell' avere alcuni Anatomici creduto mancare in queſta claſſe d' animali. Ciò nulla oſtante poſſiamo luſingarci, che d' or in avanti rieſcirà meno oſcura la notomia di queſti encefali, avendoci noi impiegata quanta diligenza ci fu poſſibile, e proccurato di ſpiegare chiaramente il riſultato delle noſtre ricerche, perciocchè ſe con gli ſtecchi miei, appoggiato a quelle poche notizie, che i chiariſſimi *Willis*, ed *Allero* ce ne hanno laſciate, parmi d' eſſere arrivato non molto lontano dal ridurre l' Encefalotomia degli uccelli a quel grado di evidenza, cui è già voſtra mercè, o meritamente Celebratiſſimo Signore, la umana, e mercè dei lavori felici del voſtro degniſſimo allievo il Sig. *Gennari*, cui debbono accoppiarſi il noſtro Sig. *Palletta*, ed i chiariſſimi *Wrisbergio*, e *Semmeringio*, ſe con la debole mia viſta, pure ho ſviluppate, e diſcoperte alcune coſe di qualche importanza; egli è giuſto ſperare, che altri di mano più deſtra, e d' occhio più perſpicace fornito, debbaſi in breve tempo inoltrare aſſai più addentro, ed eſporci quel tanto, che v' ha di più recondito, e forſe di più eſſenziale, che pure ſi è ſottratto alla mia curioſità.

Nel ſecondo Trattato, che vi preſento, troverete deſcritte le meningi degli uccelli, intorno alle quali *Willis* è ſtato alquanto più diffuſo che *Allero*, e non meno veridico di queſto. Mi piace recarvene intiera la deſcrizione cavata dal capo quinto del famoſo Trattato *De Cerebri Anatome* nel quale *Willis* eſponeva tutte le notizie, che ſi era proccurate intorno al cerebro degli uccelli, e dei peſci, acciocchè veggiate quanto ſe ne ſapeva da quel grande Anatomico, e comprendiate quanto io gli debba.

,, Cranii tegmine ſublato (diſſe Willis) *dura meninx* mo-
,, lem contentam arcte complectitur.

,, In medio illius, ubi cerebrum in duo *hemiſphæria* divi-
,, ditur, *ſinus in longum protenſus* habetur, qui tamen *nul-*
,, *la falce* interſtitio dimiſſa, cerebro minus profunde inſe-
,, ritur.

,, Dein ubi hæc membrana *cerebrum*, *&* *cerebellum* inter-
,, ſtinguit, duo *ſinus laterales* efformantur.

,, Inſuper volucribus *ſinus quartus* adeſt, verum qui ali-
,, quanto poſterius, quam in homine, aut quadrupedibus ſi-
,, tum habet, nam paullo infra *glandulam pinealem*, *duræ*
,, *meningis proceſſus* cavus, & teres ſuper medullæ oblonga-
,, tæ crura dimittitur, ubi ſtatim dividitur in *duos ramos*;
,, quorum utrimque unum ſurſum emittit, in *cavitatem inter*
,, *membranam ſtriatam*, & cerebri hemiſphærium in poſterio-
,, re cerebri parte conſitam.

,, Superiore hac membrana, ſive *dura meninge* circumqua-
,, que diſciſſa, & ſepoſita, *Pia mater* valde tenuis apparet,
,, quæ non ut in homine, aliiſque perfectis animalibus, *tam*
,, *crebris vaſorum plexibus* inſignitur, verum hæc meninx ſu-

„ btiliſſima fibrarum textura conſtans, *cerebri* intus contenti
„ *ſuperficiem planam*, & æquabilem, *gyriſque*, *&* *anfractibus*
„ *prorſus deſtitutam*, ſolummodo inveſtit undique, ac intime
„ ſuccingit. „

Altri ſquarci potrei qui traſcrivere dalle opere anatomiche del lodato Autore, i quali però non eſprimendo nulla di più, tralaſcio di farlo per paſſare quanto prima alla conferma d' alcune delle notizie eſpoſtevi, e di quelle che addurrò traſcritte dai libri d' *Allero*, e alla dilucidazione delle meno chiare, intanto che vi verrò unendo quelle poche, onde non ho trovato altrove indizio.

Fatica biſognoſa di tutta la voſtra indulgenza, e del compatimento del Pubblico, del quale non ho ragione di dubitare, ſe ho la ſorte d' ottenere la prima, il voſtro autorevole giudizio avendo tanta forza, e regolandoſi con il voſtro eſempio tutti coloro, che ambiſcono di profeſſare con lode la Notomía, la Storia naturale, de' maraviglioſi voſtri progreſſi nella quale fanno chiara teſtimonianza le ſingolari oſſervazioni ſugli organi della reſpirazione degli uccelli che del Tomo antecedente di queſte noſtre *Memorie* fanno degniſſima parte.

CAPITOLO I.

Della Dura-Madre

TESTO ALLERIANO.

„ Là dove gli emisferi del cervello ſono l' uno all' altro
„ vicini, ivi la Dura-madre forma una breviſſima falce (*a*).

ARTICOLO I.

Notizie generali ſulla D. M. degli Uccelli.

§. 1. Queſta membrana, la teſſitura della quale negli uccelli è ſimile a quella, che vi ſi oſſerva negli uomini, e negli

---

(*a*) *Dura membrana cerebri qua hemiſphæra ſibi proxima ſunt, edit breviſſimam falcem.*

gli altri animali, ha nei primi diverſe particolarità, che meritano d' eſſere conoſciute: e primamente, pellucida nelle diverſe ſpecie, in alcune però è colorita, per eſempio nel gallo d' india è di colore foſco ſudiccio, quaſi come la *D. M.* delle vipere. Duolmi di non avere conſervato almeno il nome nazionale, ſe non i caratteri di certi uccelli d' acque, alcuni dei quali in diverſi tempi eſſendo ſtati preſi ſulle ſponde del fiume Bormia, che ſcorre vicino alla città d' Aqui in Monſerrato, io ne ho notomizzato due pendente il mio lungo ſoggiorno alla direzione dei Militari a quelle R. Terme, e nel cranio vi trovai la *D. M.* d' un vivo colore aranciato.

2. Comprime, ed abbraccia così eſattamente tutto il cerebro, e ne mantiene così ſtretto avvicinate tutte le porzioni, che in qualunque menoma parte venga reciſa, o lacerata, toſto la ſoſtanza cerebrale ne sbuca fuori, nè vi ſi può più raſſettare, e quando ſe n' ha ſpogliato tutto un emisfero, non è più poſſibile riveſtirnelo intieramente.

3. La ſoſtanza di queſta meninge nelle oche, e negli altri volatili, è molto robuſta ſe ſi ha riſguardo alla tenerezza delle altre parti molli dei corpi loro: ed anche in quei ſiti, dov' è più traſparente, e più ſottile vi ſe ne poſſono ſenza difficultà diſtinguere le due lamine, e la ſoſtanza fibroſa, che ſeguendo qua e là diverſe direzioni ſi trova fra le medeſime. A tal fine però è neceſſario laſciarla ſeccare alquanto affiſſa alle oſſa, ed allora tentare di ſvellerla dalle medeſime, perciocchè lacerandoſi irregolarmente, rieſce agevole ſenz' altra preparazione d' aſſicurarſi tale eſſerne la ſtruttura; ed ancora meglio poi ne verremo convinti ſe, facendola ſeccar bene, la eſamineremo con le cautele indicate nella *Encefalotomia univerſale* (*a*), dove ſi tratta delle *D. M.* umane.

4. Ciò non è troppo conforme a quanto reca il chiariſſimo Sig. *De-Buffon* nell' aurea ſua *Storia naturale* parlando

---

(*a*) Parte I. Tratt. II. Cap. I.

del gufo (*a*), potendo ſupporſi appoggiato ſulla nuda aſſerzione di qualche Autore (*b*), cui ſia paſſato ſotto gli occhi l' encefalo morboſo d' uno di quei volatili, dove le meningi aveſſero contratta preternaturale aderenza, piuttoſto che ſulla Notomia di parecchi dei medeſimi; perciocchè nel cranio di tre, dacchè ſono in Torino (oltre a due ſtati già da me diſſecati in Aqui) ho ſempre trovato la *D. M.* non ſolo diſtinta dalla Pia, e alla baſe del cerebro queſte due tramezzate dall' aracnoidéa, ma la prima compoſta di due lamine racchiudenti un teſſuto fibroſo.

5. Le aderenze, che la fioccoſa lamina, o eſteriore della *D. M.* ha con le pareti laterali, e con la volta del cranio, ſono deboli, ma altrettanto forti poi s' incontrano ai margini dei fori alle creſte, agli angoli, agli orli oſſoſi, che dividono, e limitano le foſſe di queſta cavità.

ARTICOLO II.

Pieghe, *onde la* D. M. *con le ſue lamine interiori ſi allunga verſo il centro dell' Encefalo*

6. Intanto, che la fioccoſa lamina ſta aderente a tutto il pariete della cavità del cranio, le altre due lamine formano otto allungamenti, o pieghe nella cavità medeſima, che dalla figura, direzione, uſo, e ſito loro io nomino *Falciforme* la prima; *Arcata* la ſeconda; la 3, e la 4 *Orizzontali*; la 5, e 6 *Otturatrici*; *Pituitarie* le due ultime.

Piega Falciforme.

7. La *piega falciforme*, o la *falce* (nome ch' io adopero più per l' analogia del ſito, e per uniformarmi ad *Allero*, che per veruna raſſomiglianza ravviſatavi mai con la falce (*c*) delle *D. M.* umane) è uno ſcoſtamento delle lami-

---

(*a*) *Le cerveau du Grand Duc eſt recouvert d' une ſimple tunique plus epaiſſe que celle des autres oiſeaux, qui, comme les animaux quadrupedes, ont deux membranes qui recouvrent la cervelle*. Vol. II. pag. 128.

(*b*) Infatti alle note *f. g.* della pag. citata egli cita *SchWenckfeld*, e *Giovanni di Muralto*.

(*c*) Nella Parte I. della *Encefalotomia umana*, alla nota del §. 20 io aveva già ſcritto "La falce della *D. M.* „ nei quadrupedi s' immerge pochiſſimo tra emiſferi, ma nei volatili è „ appena viſibile e vi pare fatta all' „ unico fine di contenere il *S. L.*, onde non vi merita punto il nome di „ *Falce*". Nel paſſo già recato di *Willis* non vi ſi ammette la *Falce*.

ne fibroſa, e membranoſa dalla fioccoſa, appena capace di contenere il *ſeno longitudinale*, di modo che fra i due emisferi del cervello vi ha corriſpondentemente un ſolco ſuperficiale.

8. E' lunga quaſi quanto gli emisferi, principiando ſoltanto al margine delle foſſe olfattorie (*a*), dove ſul cervello ha principio il ſolco longitudinale; all' indietro finiſce al margine dell' arco, che limita ſuperiormente al dinanzi la loggia del cervelletto, proprio ſulla parte più elevata del medeſimo (*b*); ſicchè gli emisferi nelle anitre, e nelle oche hanno maggior eſtenſione, che la ſuppoſta ſalce.

9. Sollevando la *D. M.* come per iſpogliarne gli emisferi, e roveſciandola a tergo, ſi vede lacerarſi ai lati della piega ſalciforme una ſelva di filamenti come di celluloſa: queſti ſono i vaſellini provenienti dalla *Pia-madre*, e dal cerebro per votarſi nel *S. L.*, uniti a quei tenuiſſimi filuzzi (*c*) onde la membrana *aracnoidéa* ſta pure unita alla *P. M.*

Piega Arcata.

10. La *piega arcata* pende perpendicolarmente dal margine dell'arco poc' anzi mentovato; principia dalla biforcazione del *ſeno longitudinale*, onde n' è più eſattamente ſeparata la ſommità della faccia anteriore del cervelletto dall' incontro del margine poſteriore d' amendue gli emisferi del cervello.

Pieghe Orizzontali.

11. La *pieghe orizzontali* ſi vedono tra la faccia inferiore, oſſia baſe degli emisferi, e la ſuperiore de' *talami dei N. ottici*. Sono poco larghe, ed hanno circa ſette linee di lunghezza; cuoprono l' eſterno margine conveſſo dei *talami*.

Pieghe Otturatrici.

12. Le *pieghe otturatrici* hanno queſto nome perchè otturano in gran parte, e naſcondono le foſſe sfondate (*d*), e la doccia, che guida il *N. oftalmico* fino al proprio foro (*e*). Sono più brevi delle precedenti non avendo ſalvo tre linee di lunghezza, ma ſono più larghe, e ſi trovano fra l' orlo ſuperiore del foro oftalmico, e il poſteriore delle foſſe sfondate. Naſcondono conſeguentemente anche i *N. oftalmici*, e

---

(*a*) Ved. Tratt. I. Part. II. cap. II. Art. I. §. 1, 6, 9.

(*b*) Ivi §. 7, 10.

(*c*) *Encefalot. Umana* Part. I. Tratt. II. §. 275.

(*d*) V. Tr. I. Part. II. cap. II. Art. I. §. 9, e 12.

(*e*) Ivi cap. III. Art. VIII. §. 2.

ſi ripiegano perpendicolarmente in baſſo, chiudendo nelle loro foſſe i groſſi principj gangli-formi de' *N. maſcellari ſuperiori*, *ed inferiori*.

P. Pituitarie. 13. Le *pieghe pituitarie* ſono ancora più brevi, diſtinte, ſituate ai lati della foſſa (*a*), e naſcondenti una parte della *glandula pituitaria*, e le aperture interne di quei due canaletti, che guidano nelle orbite il paro de' *N. motori comuni* degli occhi (*b*).

ARTICOLO III.

Degli Imbuti, e dei ſacchi, onde la D. M. *ſi ſcoſta dal centro dell' Encefalo*.

14. Gl' *Imbuti* principali, che la *D. M.* forma con tutte le ſue lamine, immergendoſi in certe cavità ſcolpite in quella del cranio, ſono tre, l' *olfattorio*, il *pituitario*, e l' *occipitale*. I ſacchi ſono due nominati *auditorj*.

Imbuto olfattorio. 15. L' *imbuto olfattorio* è formato dalla porzione anteriore del gran ſacco della *D. M.*, il padiglione elittico del quale ha verſo i lati anteriori due cannuccie divergenti membranoſe.

Il padiglione è aſſai più largo in traverſo, che alto, e riceve la porzione anteriore degli emisferi del cervello: le cannuccie guidano verſo i fori olfattorj i due groſſi, e polpoſi nervi dello ſteſſo nome, oltre ai due *emiſſarj naſali* della *D. M.*; finiſcono diſtintamente una per lato nelle caverne proprie del naſo (*c*)

Imb. Pituitario. 16. Tra le pieghe pituitarie poc' anzi accennate (13), la *D. M.* ſi allunga pur anco prima verticalmente, poſcia obbliquamente all' indietro nella foſſa pituitaria per dare ricetto a quella *glandula*, ed uſcita dal cranio ai due *emiſſarj* dello ſteſſo nome, e ai nervi *Grandi ſimpatici*. Queſt' imbuto però è traforato eziandio al davanti per darvi entrata a due notabili arterie (*d*), ed uſcita a due vene conſiderabili,

---

(*a*) Ivi cap. II. Art. II. §. 3, e ſegg.

(*b*) Ivi cap. II. Art. II. §. 6, e cap. III. Art. IV.

(*c*) Ivi cap. II. Art. I. §. 1, 1, 3, 4.

(*d*) Ivi cap. II. Art. II. §. 4.

che ſono gli *emiſſarj pituitarj* delle *D. M.* (*a*): è pure traforato indietro dalle due arterie *carotidi* , inſieme alle quali eſcono del cranio i *N. Grandi ſimpatici* (*b*) già mentovati.

Imb. occipitale.

17. L' *Imbuto occipitale* è formato dalla *D. M.* , che giunta all' entrata della loggia del cervelletto e all' orlo anteriore del catino , a miſura che ſi avvicina al gran foro occipitale, ſi reſtringe divenendo più forte, e più ſpeſſa: contrae fortiſſima aderenza con l' orlo del medeſimo, e guida al canale delle vertebre la midolla allungata.

Sacchetti auditorj.

18. I *ſacchetti auditorj* ſi veggono ſotto l' aſpetto di due appendici cave, cieche, larghe e profonde proporzionatamente alle foſſette ovali(*c*). Sono dirimpetto all' unione laterale del cervelletto con la midolla allungata , e contengono due tenere appendici delle nominate ſoſtanze, ch' io inclino a conſiderare come i veri *N. auditorj*. Queſti ſacchetti ſono di colore cenerognolo ſoſco, vergati di piombino per molti ſeni , che ivi tra le ſue lamine contengonſi dalla *D. M.* , ordinariamente pieni di ſangue , i quali ſi votano poi nelle foſſe sfondate mediante gli *emiſſarj laterali eſterni*.

ARTICOLO IV.

I Seni della D. M.

19. Undici ſono i ſeni più ragguardevoli ch' io abbia potuto diſcernere in queſta meninge , cioè

Uno *Longitudinale;* Due *Laterali;*
Due *Subalterni;* Due *della piega arcata;*
Due *delle p. orizzontali;* Due *delle p. otturatrici*,
e due finalmente *della Loggia del cervelletto*.

20 Mentre che deſcriveremo queſti ſecondo la diſpoſizione loro nell' encefalo dalla fronte all' occipite , s' indicheranno pure gli *emiſſarj*, che ſono già ſtati numerati nel Trattato (*d*) precedente con i nomi ſeguenti

---

(*a*) Ivi cap. III. Art. VI.
(*b*) Ivi Artic. VII.
(*c*) Ivi cap. II. Art. II. §. 13, e 15.
(*d*) Part. II. cap. II. Art. I. §. 3, nota (**).

Due *Naſali ;*
Due *laterali eſterni ;*
Due *Pituitari ;*
Due *laterali poſteriori ,*
e due *Occipitali .*

TESTO ALLERIANO (*a*)

,, Nella Falce v' è un ſeno , che ne ſiegue l' eſtenſione
,, fino al cervelletto, dove giunto manda un altro ramo ret-
,, to , che dalla faccia poſteriore del cervelletto medeſimo
,, ſcorre lungheſſo la faccia pure diretana della ſpinale mi-
,, dolla.

21. Non poche notizie intorno al ſeno longitudinale e agli altri delle *D. M.* anſerine ſono ſtate già ſparſe da me nel precedente Trattato, capaci tutte di renderne più intelligibile la deſcrizione , che ſono in procinto di farne , qualora alle medeſime ſi dia una novella occhiata: nè occorrendo di ripeterle vi aggiungerò ſoltanto le coſe notabili non ancora ſtate eſpoſte : e primamente queſto ſeno non è triangolare , ma rotondo; ha qualche briglia, o *corda Williſiana* nella ſua cavità, e queſte lo rendono in alcuni ſiti incoſtanti varicoſo.

22. Riceve il ſangue onde tutta la porzione ſuperiore della *D. M.* è irrigata non meno, che quella della *Pia* , di maniera che le vene anteriori vengono a mettervi foce quaſi direttamente in avanti per lo ſpazio di ſette linee nei *S. L.* lunghi lin. 14. Per lo ſpazio delle 4 lin. di mezzo poi le vene vi sboccano con tre direzioni coſtantemente diſtinte; le anteriori obbliquamente in avanti , le mezzane rettamente all' inſu, le poſteriori obbliquamente in dietro . Il rimanente del ſeno riceve i vaſi più diretani della *D*, e della *P. M.* , che ſi ſcaricano nella porzione vicina a biforcarſi per formare i *ſeni laterali* .

Emiſſarj Naſali.

23. Intorno al padiglione elittico dell' imbuto olfattorio (15) ſono molto confuſi, perchè ai lati del medeſimo il *S.*

(*a*) *In qua* (falce) *ſinus eſt longitudinem ſequens ad uſque cerebellum*, *ibi ramum alium rectum trans cerebellum mittit in ſuperficiem medullæ ſpinalis*.

L. ſi biforca, e ne ſiegue la direzione delle cannuccie ſino nelle orbite, dove ſi ſcarica del ſangue nelle proſſime vene. Queſti due prolungamenti anteriori del ſeno vengono appellati *emiſſarj naſali* della Dura-madre.

24. Per quello poi, che ſpetta al ramo, che *Allero* dice partire dal *S. L.*, e al di là dal cervelletto diſcendere per iſcorrere ſulla ſpinale midolla, egli mi ſembra che il noſtro chiariſſimo Autore accenni quella groſſa vena, che nelle galline, nei faggiani, nei nibbi, nelle beccaccie, e nelle pernici ſi curva dalla ſaccia anteriore del cervelletto ſulla ſommità del medeſimo per portarſi veramente ſulla faccia poſteriore del principio della midolla ſuddetta; ma nelle oche, nelle anitre, e nè tampoco nei galli d' india non l' ho mai ritrovata.

TESTO ALLERIANO (a).

„ Altri due rami rivolti a deſtra, ed a ſiniſtra ſi prolun-
„ gano convergendo per continuarſi nelle vene jugulari.

Non ſapendo io diſtinguere dal Teſto ſe i due rami, dei quali fa qui menzione *Allero*, ſieno quelli, che procedono immediatamente dal ſeno longitudinale, o ſe favelli d' altri, che pure vi ſi ſcorgono aſſai numeroſi anche tra i ricettacoli ſanguigni di queſta meninge, per non errare deſcriverò i principali tra quelli, che con le ripetute Notomie di queſti encefali ho diſcoperto.

25. E in riſguardo ai primi ho trovato due rami, che dall' eſtremità poſteriore del *S. L.* delle oche procedono, e ſi curvano ſulla conveſſità, oſſia lembo fiſſo della piega arcata (10) per gettarſi nella loggia del cervelletto, e di là nei ricettacoli venoſi ai fianchi del gran foro occipitale. (*b*). Sono obbliqui, e circonfleſſi innanzi, in ſuori, e in baſſo di maniera, che il deſtro ſuol eſſere continuo con il ſeno longitudinale, poichè queſto ſi piega notabilmente più a deſtra;

Seni laterali.

(*a*) *Alii duo rami dextrorſum, & ſiniſtrorſum converſi in venas jugulares continuantur.*

(*b*) Tr. I. Par. II. Cap. III. Art. XVII.

è tre o quattro volte più amplo del ſiniſtro, del quale alcune fiate ſi diſcernono a pena le traccie.

Vena verticale.

26. Avvi un tronco notabile di vena, che ſi eleva dall' intervallo degli emisferi, raſente la ſaccia anteriore del cervelletto; ma queſta non ne oltrepaſſa la ſommità, perchè ſi getta nella biſorcazione del *S. L.* come la groſſa vena di *Galeno*, che nei cerebri umani sbocca nel torchio d' *Erofilo*.

27. Un tale tronco nelle oche prende origine da quattro venuccie procedenti ognuna da una diſtinta eſtremità del *quadruplice pleſſo corioideo* (*a*), alle quattro porzioni del quale ſervono come di picciuolo.

28. Vi concorrono pure non pochi ramuſcelli diſperſi ſulle faccie vicine dei *talami*, e dei *lobi mezzani*, che tutti, nel punto della unione dei tre ſolchi ſuperiori del cervello, ſi riuniſcono in un ſolo, che aſcende diritto verſo la foce mentovata, accompagnato da un *pleſſo vaſculare* notabile, che cuopre, e ſoſtiene la *glandula pineale* ſtata fin ora ſconoſciuta in queſti enceſali, la quale ad ogni modo vedremo ritrovarviſi (*b*), come in tutti gli uccelli, e preciſamente in queſto ſito.

29. Procede inoltre nei crani anſerini da due altri ramuſcelli, i quali coſteggiando la menzionata glandula, vengono a gettarſi nel tronco ſteſſo, viciniſſimo allo sboccare nella biſorcazione del *S.* longitudinale.

30. Nei tordi, e negli ſtorni come nei paſſeri ſolitari ſi veggono due vene coſteggianti i lati della ſommità del cervelletto, che ſi vanno a congiungere verſo il margine ſuperiore del gran foro occipitale, ma non ſi curvano (come negli uccelli mentovati al §. 24.) ſulla ſommità per diſcendere perpendicolarmente ſulla faccia poſteriore del cervelletto.

Emiſſarj occipitali.

31. Dietro alla biſorcazione del *S. L.*, immediatamente a tergo del principio dei *S.* laterali, partono due altri ſeni ſubalterni, che ſcorrono per que' due ſolchi, che ſerpeggiano irregolarmente per la volta della loggia del cervelletto

---

(*a*) Ved. Tratt. Terzo Cap. IV. Arti IV.
(*b*) Tratt. III. Cap. IX.

to (*a*) ; portano il ſangue nei due ricettacoli venoſi già notati nei ligamenti, onde la prima vertebra s' articola con il capezzolo dell' oſſo occipitale, e ſono gli *emiſſarj occipitali*.

Seno arcato.

32. Il lembo libero, e una parte del corpo della piega arcata (10) contiene un ſeno facile a diſcernerſi per lo colore piombino, o roſſo, di cui lo tinge il ſangue, che vi ſta dentro, e che vi arriva per li vaſi della *D.*, e della *P.* madre che vi ſi appoggia. Queſto ſeno lo getta da tut' e due i lati negli ampj ſeni delle pieghe orizzontali (11). Io lo nomino ſeno arcato.

Seni orizzontali.

33. Molte ſono le radici dei ſeni, che ſi oſſervano in queſte ultime pieghe, ricevendo eſſe per tutto il corſo loro quel ſangue, che ſcorre per li vaſellini delle parti della *D. M.* aderenti, e vicini alla foſſa ottica (*b*) ; ſicchè gonfiano preſto, e giunti dirimpetto al margine ſuperiore delle foſſe ovali (*c*), ricevono molte venuccie, oltre al ſangue, che vi sbocca dalle eſtremità del lembo libero della piega arcata.

Emiſſarj laterali eſterni.

33. All' altezza delle foſſe ovali trovaſi quel ſolco irregolare e profondo, che abbiamo già deſcritto (*d*) e detto ſtenderſi tra la punta diretana della creſta, cui ſi attaccano le pieghe orizzontali, e l' orlo rilevato delle ſuddette foſſe; ſi allarga, e ſcorrendo quaſi perpendicolarmente fino alla parte delle foſſe sfondate (*e*) più lontana dal centro del cranio, prende una direzione obbliqua in baſſo per terminare nel foro maſcellare inferiore (*f*). In ſimile ſolco ha ricetto il terzo paro degli *emiſſarj* della *D. M.* detti *laterali eſterni*, e per mezzo loro viene traſmeſſo fuori del cranio delle oche, e dell' anitre il ſangue, che ſcorre per i ſeni ſtati finora deſcritti,

Emiſſarj pituitarj.

34. Immergendoſi la *D. M.* nella foſſa pituitaria, vi ſi raccoglie tra le lamine molto ſangue derivante dalle parti vicine della baſe del cerebro, il quale ſi ſcarica fuori del cranio per le due aperture ovali della parte anteriore del fondo del-

---

(*a*) Ivi Cap. II. Art. I. §. 11.

(*b*) Ivi Art. II. §. 1.

(*c*) Ivi §. 13., e ſeg.

(*d*) Ivi §. 16.

(*e*) Ivi.

(*f*) Ivi Cap. III. Art. X.

la foſſa pituitaria medeſima (16) , ed a queſti canali abbiamo dato il nome d' *emiſſarj pituitarj*.

Seni delle pieghe otturatrici.

35. Vi s' aggiunge il ſangue del ſeno occupante le pieghe otturatrici (12) , del quale ben ſovente ſi vede tinta tutta la loro ſuperficie.

Emiſſarj laterali poſteriori.

36. Gli *emiſſarj laterali poſteriori* ſi trovano ſul fondo del catino ſull' orlo poſteriore dei fori del par vago, e sboccano in parte nel golfo venoſo analogo a quello delle jugulari interne de' crani umani; in parte raccogliendo il ſangue, che viene dai lati di tutto l' imbuto occipitale (17) ne dirige il corſo per le caverne dell' orecchio verſo le aperture eſteriori de' fori maſtoidei.

37. Reſtaci ancora da indicare le ſtriſcie irregolari, ond'è vergata la *D. M.* della loggia del cervelletto, preſcindendo da quelle che corriſpondono ai ſeni ſubalterni (31), in eſſe ſgorga il ſangue di due venette naſcenti dalle minute diramazioni delle parti poſteriori degli emisferi, e ſulla *P. M.* vicina ne ricevono pure da due altre, che ſalgono dal lato più baſſo dei ſolchi, onde gli emisferi del cervello ſono ſeparati dal cervelletto. Si votano al davanti o nella biforcazione del *S. L.*, o nei laterali, o nei ſubalterni, e allo 'ndietro negli *emiſſarj occipitali*.

38. E' difficile, che l' occhio nudo arrivi a ſcoprire ai lati del *S. L.* ſu qualſivoglia parte della *D. M.* arterie veramente roſſe; ſe ne ſcorgono bensì parecchie verſo la radice delle apofiſi orbitarie poſteriori (*a*), e nella loggia (*b*), dove ne ſono pure manifeſte alcune anaſtomoſi.

39. Non biſogna però confondere nè queſte, nè i vaſi venoſi finora accennati, con i vaſi della *P. M.*, dei quali numeroſi, e bizzarramente diſpoſti per le frequenti anaſtomoſi, darò notizia a luogo opportuno (*c*).

40. Nella teſſitura di queſta dura meninge non ho mai trovato in veruno uccello glandula d' alcuna ſpecie.

41. Tanto meno vi ho mai potuto diſcernere fibrilla ner-

(*a*) Tr. I. Par. I. Cap. II. Art. II. §. 6.

(*b*) Ivi Par. II. Cap. I. Art. I. §. 10.

(*c*) Do queſto avviſo perchè la traſparenza della *D. M.* degli uccelli è tale, che tutti i vaſellini della Pia ſembrano al primo ſguardo appartenenti alla Dura.

voſa; e ſono più ſicuro in queſta claſſe d' animali non eſſervi nervo deſtinato a fornirla di rami, perchè ne ho ſempre, in tutti gl' individui d' ogni ſpecie ſtati notomizzati da me, trovato il tragitto dei tronchi e nei canali appreſtati loro dalla ſteſſa meninge, e per li ſori e le ſcanalature delle oſſa, libero, e ſenza quelle tante aderenze, e legami, che pur ſi oſſervano negli encefali umani in riſguardo ai *N.* olfattori, agli oftalmici, ai maſcellari ſuperiori ed inferiori, ai vaghi, ai gloſſofaringéi, agl' ipogloſſi, ed agli acceſſorj del *Willis*; dai quali nervi però dopo i chiariſſimi *Fantoni*, *Allero* e *Caldani* poſſo francamente aſſerire io pure di non avere oſſervato giammai ad allungarſi fibra negli encefali degli uomini, de' quadrupedi, e dei rettili deſtinata a diramarſi per la *D. M.*

42. La *D. M.* degli uccelli nella celluloſa, che ne colliga le lamine, contiene pur anco una conſiderabile quantità di linfa viſcidetta, che la mantiene morbida e fleſſibile, e facilmente viene ſpremuta ſulla ſuperficie interna, mentre è freſca, mediante la compreſſione.

43. L' uſo di queſta membrana, e di tutte le parti, che ne abbiamo deſcritte, non è differente da quello, che loro ſi dà nell' *Encefalotomia* già pubblicata.

CAPITOLO II.

Della Pia-Madre.

TESTO ALLERIANO

„ Indi la Pia-madre, ed un teſſuto cellulare uniſcono gli
„ emisferi (*a*).

44. La Pia-madre dei cerebri anſerini è finiſſima, ed a malo ſtento vi ſi diſcernerebbe, ſe non ci veniſſe indicata da' numeroſi vaſi, che tutta leggiadramente la irrigano, aſſai meno però, che nelle umane.

(*a*) *Inde pia membrana hemiſphæria unit, & celluloſa tela.*

45. Queſti vaſellini tinti d' un roſſo florido vannoſi anaſtomoſando, e ſembra che il canale di comunicazione principale tra gli anteriori e i poſteriori ſia un vaſo curvo, che divide in due l' eſtenſione di ciaſcuno emiſfero.

46. Non appare, che queſta fina meninge s' inſinui profondamente nel ſolco longitudinale, che diſtingue gli emisferi, e ſe vi penetra pure alquanto, vi ſcarſeggia molto di vaſi all' occhio nudo viſibili.

47. Inſinuaſi bensì in que' *ſolchi obbliqui*, che ſeparano la faccia poſteriore d' amendue gli emisferi dall' anteriore del cervelletto, nei *laterali*, che gli ſeparano dai *talami de' N. ottici*, ed in tutte le diviſioni apparenti del cerebro: ſi caccia nei *ventricoli laterali*, e nel *IV. ventricolo* più ſenſibilmente, che altrove, e di là getta due tenui appendici fin nelle *cavità de' talami*. Veſte vaſculoſiſſima il *ponte*, e le *gambe del cervello*; nel rimanente è ſimile alla umana (*a*).

CAPITOLO III.

Della Membrana Aracnoidea.

48. Il teſſuto cellulare, del quale *Allero* nel teſto già qui recato fa menzione (*b*), è probabilmente la membrana aracnoidéa, che ſtrettamente uniſce i margini del *ſolco longitudinale del cervello*, e la baſe del cono formato dal *cervelletto* con le parti vicine dei *talami*, e con *la midolla allungata*, come anche i margini del *terzo ventricolo*.

49. L' eſiſtenza di queſta membrana negli uccelli minuti è piuttoſto dimoſtrata dalla reſiſtenzuccia, che oppone allo ſcoſtamento degli emisferi, e delle altre parti contigue ora mentovate, di quello che ſia palpabile, nè ſoggetta alla viſta. Reſiſtenza più ſenſibile nei cerebri freſchi, che nei maneggiati qualche tempo dopo la morte dell' oca, o nei cot-

---

(*a*) *Encefalot.* Parte I. Tratt. IV. pag. 150. e ſeg.

(*b*) Quando però intendeſſeſi l' unione delle pareti del ſolco, e quella delle parti più profonde del medeſimo, io non avrei coraggio di negarla fatta da un teſſuto cellulare: anzi lo credo. Ved. il Trat. ſeguente §. ſeſto.

ti, dove ne rimane appena qualche leggiere veſtigio ſcoſtando un emisfero dall' altro, o ſcoſtandone il cervelletto. Mi è rieſcito però d' oſſervarla più volte anche nelle anitre, nei galli d' India, nelle galline e noſtrali e di Numidia, nel groſſo barbagianni di Svizzera, e generalmente negli uccelli più groſſi, e di notarne le briglie (9) (*a*).

50. Il ſito più proprio a vederla diſtinta fralle altre due meningi è alla baſe del cerebro, fra 'l ponte e i nervi olfattori, tra la faccia diretana del cervelletto, i lati, e la vicina eſtremità della midolla allungata: e qui eziandio nei crani bolliti ho potuto ſepararne lembi larghi tre o quattro linee: ma non vi ho mai ſaputo ravviſare ombra di vaſo ſanguigno.

TRATTATO III.

Del Cervello.

Al medeſimo Sig. MICHELE GIRARDI.

ANche a' commenti ſulla deſcrizione Alleriana delle parti del cervello negli uccelli, mi permetterete di far precedere quelle notizie originali, che *Willis* nel già citato ſuo lavoro ci ha laſciate, e ſono le ſeguenti.

1. „ Cerebri fabrica in volucribus aliter habet ac in ho-
„ mine, aut quadrupedibus, nam præterquamquod in ambitu
„ ejus *anfractus*, & inæqualitates omnino deſunt, etiam in-
„ terius *corpus calloſum*, *&* *fornix*, etiam *corpora ſtriata*
„ prorſus deſiderantur; atque inſuper ipſa cerebri compages
„ alio modo configuratur.

2. „ Quo hæc melius perſpiciantur, cerebri anſeris, aut
„ galli indici diſſectionem inſtitues: atque *membranis* diſciſ-
„ ſis, cerebri figuram, & medietatem ejus unam ab altera,
„ leviter comprimendo, diducas; & ſeparare pergas, donec
„ ventum erit ad ipſum fundum, in quo *duo corpora medul-*

(*a*) *Encefalot*. Par. I. Tratt. III. §. 215.

„ *loſa* exiſtunt , quæ *nervorum* inſtar , tranſverſim protenſa ,
„ *hemiſphæria* invicem connectunt .

3. „ Utrumque interſtitii latus *membrana ſubalbida* inve-
„ ſtit , quæ quidem *ſtriis* velut *radiis* a toto ambita verſus
„ angulum inferiorem productis inſignitur ; *ſtriæque* iſtæ cir-
„ ca *corporum medullarium* inſertiones concentrantur .

4. „ Dein ſi *membrana* hæc ſecatur in utroque cerebri
„ *hemiſphærio cavitas* ſubjecta apparebit , quæ totum ab in-
„ terſtitii latere ſpatium , ac inſuper poſticam cerebri regio-
„ nem magna ex parte ſubducit , eaque *membrana ſtriata* con-
„ cameratur .

5. „ *Utraque cavitas* circa fundum in *ductum intermedium* ;
„ *& communem* , qui ad *infundibulum* pateſcit , aperitur ; &
„ ex utroque *ductus* iſtius latere , *medullæ oblongatæ crura*
„ exporriguntur , quibus utrinque cerebri *hemiſphærium per*
„ *duo medullaria corpora* appenditur .

6. „ Nimirum e cerebri *mole ventriculo ſubſtrata meditul-*
„ *lium unum* , & *e membrana ſtriata ventriculum obtegente*
„ *meditullium alterum* prodit .

7. „ E *binis* hiſce *meditulliis* in utroque latere poſitis ,
„ *corpora medullaria nervorum inſtar* tranſverſim protenſa ,
„ duo cerebri *hemiſphæria* invicem conjungunt : inſuper bina
„ hæc utrinque coaleſcentia utrumque cerebri *hemiſphærium*
„ *medullæ oblongatæ cruribus* affigunt .

8. „ Adeo cerebri figura in volucribus , ſi hominum &
„ quadrupedum perfectiorum cerebro comparaveris , velut
„ inverſa eſſe videtur . Nam ſicuti in his *pars corticalis* ante-
„ rior eſt , eique *medullaris* ſubſternitur ; ita in volucribus
„ inferior cerebri compages , que mole craſſa , & ſpiſſiori con-
„ ſtat , *corticis* loco eſt .

9. „ *Membrana* autem *extima* , *& ſuperior ventriculum*
„ concamerans , ſupra quamvis aliam partem *medullaris* ap-
„ paret .

10. „ Porro *ventriculi* in hominis , & quadrupedum ce-
„ rebris infra , & prope fundum , in volucribus ſuperius , &
„ juxta oram exteriorem collocantur .

11. „ Volucrum cerebris , quia *fornix* omnino deeſt , *bini*
„ tantum *ventriculi anteriores* adſunt , inter quos *plexus cho-*
„ *roeides* expanditur , cujus *portio venoſa a ſinu quarto* paulo
„ inferius oritur .

12. ,, *Arteriæ* autem ex utroque latere *medullæ oblongatæ*
,, aſcendentes accedunt.

13 ,, Nec magis in ipſo volucrum cerebro, quam in *me-*
,, *dulla oblongata* heterogeneitas, ſive conformatio ab eadem
,, in hominibus, & quadrupedibus longe diſpar apparet: nam
,, in prima illius ſectione, unde *nervi optici* oriuntur, *duæ*
,, inſignes *protuberantiæ* lateri utrique accreſcunt.

14. ,, Hæ multo majoris proportionis quam in perfectio-
,, ribus *prominentiæ orbiculares*, adeo ut cerebrum alterum,
,, & ſuccenturiatum videantur: utraque *albidi coloris*, & pu-
,, re *medullaris*, interius excavata eſt; ita ut in hujuſce ge-
,, neris animalibus *bini ventriculi in cerebro*, *totidemque in*
,, *medulla oblongata* reperiantur.

15. ,, Cumque in his, ſicuti in cæteris quibuſcumque ani-
,, malibus, etiam *cavitas cerebello* ſubjiciatur, *ventriculi* in
,, toto encephalo exiſtentes numero pariter, ac figura, & po-
,, ſitione differunt.

16. ,, In medio *caudicis medullaris*, ubi ſcilicet iſtæ *pro-*
,, *minentiæ* lateribus ejus adnaſcuntur, *rima ad infundibulum*
,, ducens inducitur.

17. ,, In iſtam autem *utriuſque ventriculi apertura* dehi-
,, ſcit, ut minime dubium fuerit quin ſeroſitates ibidem con-
,, geſtæ iſta via amandentur.

18. ,, Porro veriſimile eſt has *prominentias excavatas*, *&*
,, *medullares* in volucribus *corporis calloſi* vices ſupplere.

19. ,, Pariter etiam obſervamus, quantum ad *cerebellum*,
,, & reliquam *medullæ oblongatæ* portionem inter aves, & alia
,, animalia haud magnum diſcrimen intercedere, niſi quod
,, *prominentiæ orbiculares* ante *cerebellum*, aliæque *annulares*
,, ſub ipſo in illis occurrentes, utræque in volucribus deſide-
,, rantur: nempe hæ poſteriores non videntur omnino requi-
,, ri: priorum autem vices a *prominentiis medullaribus exca-*
,, *vatis*, quales volucribus ſubeſſe oſtendimus, facile ſup-
,, plentur.

Non radunerò qui tutte quelle altre, che ſi leggono ſparſe per gli altri Trattati di quell' inſigne Anatomico, perchè tornerà più in acconcio averle ſotto gli occhi a miſura, che ſi anderanno eſponendo le parti, che ne vengono indicate.

CAPITOLO I.

Degli Emisferi del Cervello.

TESTO ALLERIANO (*a*).

„ Quelle due porzioni del cervello dell' oca, che ſi nomi-
„ nano emisferi, ſono ovali, conveſſe, e ſi allungano al da-
„ vanti a foggia di cono, il termine del quale è un *proceſ-*
„ *ſo mammillare*, cioè il vero *nervo olfattorio*.

Emisferi del cervello

1. L' uſo prevalga, e ſi continui a dare il nome d'emisferi alle due parti del cervello, che qui ſi accennano, benchè niente ſi accoſti meno delle medeſime alla figura emisferica. Fanno queſti da ſe ſoli la più conſiderabile porzione di tutto il cerebro, e ſi raſſomigliano molto ai lobi de' bulbi dell' aglio, avendo ognuno tre faccie diviſe da tre margini angolari, e due eſtremità; una poſteriore ottuſa, gibboſa, e natiforme, l' altra acuta, che n' è l' anteriore.

2. La faccia più larga degli emisferi è la ſuperiore, eſterna, o laterale, conveſſa, grande poſteriormente, angolare al davanti: è diviſa in due porzioni diſuguali dalla linea obbliqua, che divide i due sfondi della volta del cranio in foſſe maggiori, e in foſſe ſuperiori di mezzo (*b*).

3. La ſeconda faccia è l' interna, per la quale gli emisferi ſi toccano, eſſendone ſoltanto diviſi in alto mediante la piega della *D. M.* dov'è contenuto il ſeno longitudinale (*c*). Queſta faccia nello ſtato naturale è piana, e ſe diventano conveſſe tutte due nei due emisferi ſcoſtandogli, ciò dipende dalla mollezza della loro ſoſtanza, la quale non eſſendo più ſoſtenuta, s' incurva.

4. La

(*a*) *Duo, quæ vocantur, hemiſphæria ovata, convexa, anterius in conum procurrunt, cujus finis eſt proceſſus mamillaris, nervus olfactorius verus.*

(*b*) Tr. I. Par. II. Cap. II. Art. I. §. 5., e 6.

(*c*) Tr. II. Cap. I. Art. II. §. 7.

4. La terza è rivolta al baſſo, larga all' indietro, angolare anteriormente, alquanto concava: verrà da noi qualche volta nominata *baſe degli emisferi* perchè tutto il corpo dei medeſimi vi ſi appoggia.

5. Paſſando agli angoli, oſſia ai margini, uno è ſuperiore, che unito al corriſpondente dell' altro emisfero ſoſtiene il *S. L.* della *D. M.*, uno è eſteriore più lungo di tutti, curvo, e riſguarda la baſe delle parti laterali eſterne del cranio, dividendo la faccia eſterna dalla inferiore: il terzo, che limita in baſſo le faccie inferiore ed interna, corriſponde all' aſſe longitudinale di quella midolla, che negli uomini, e nei quadrupedi forma il corpo calloſo.

6. Le faccie interne d' amendue gli emisferi ſono incollate inſieme in alto mediante la membrana aracnoidéa, e nel rimanente del ſolco verticale, che le divide, mediante un teſſuto cellulare aſſai robuſto notato da *Allero* (*a*), e i margini inferiori delle medeſime faccie ne ſono congiunti a ſegno, che pare dimoſtrata ad evidenza la reciproca comunicazione, o continuità della ſoſtanza de' due emisferi, a chi meno attentamente eſamina queſte parti.

7. Tutta la ſuperficie d' ambedue gli emisferi è intieramente ſgombra di ſolchi, e d' anfrattuoſità com' è ſtato notato da *Willis* (*b*), e da molti altri Notomiſti.

8. Abbiamo già ſufficiente notizia delle foſſe olfattorie, e dei loro fori, e dell' imbuto, che vi fa la *D. M.*, come altresì delle cannuccie membranoſe, nelle quali ſono ricevute le punte degli emisferi, ed i nervi olfattorj medeſimi, onde non ci rimane eccetto da indicare quale ſia l' apparenza dell' eſtremità anteriore degli emisferi, conica sì, ma non formante i veri nervi olfattorj, come *Allero* preteſe, perciocchè queſta terminando alquanto ottuſa, viene per così dire inguainata da un riſalto proprio della porzione de' nervi ſteſſi, che gonſia, e ſi fa rotonda appena ſuperata la punta coni-

---

(*a*) Ivi Cap. II. nel Teſto, e al §. 48.

(*b*) Come ſopra, e nelle opere Vol. I. pag. 68, vedi pure *Coiter* pag. 130, *Muralto* vade mecum pag. 475. *Collins* Tab. 56, fig. 49, pag. 1099. *Aldrovandi* Ornitologia T. I. pag. 799.

ca. Sono inſieme conglutinati l' accennato riſalto, e la punta, eſteriormente dalla Pia-madre, e dalla membrana aracnoidéa, interiormente dalla Pia-madre ſola, che però ne laſcia ravviſare la ſeparazione, poco diverſamente da quello, che ſi oſſerva nella ſteſſa parte del cervello de' ſerpi, e delle vipere.

9. Si trovano dunque i veri nervi olfattorj inferiormente alla punta degli emisferi ſenza eſſere corpi comuni con i medeſimi, e ſi vedono aſſai più rotondi, e cilindrici quando viene con deſtrezza diſtrutto il bifido canale oſſoſo nel quale paſſano (*a*) per iſcorrere poſcia nel ſolco alla parte ſuperiore delle orbite loro deſtinato.

CAPITOLO II.

Della ſoſtanza corticale.

TESTO ALLERIANO (*b*)

„ La corticale non ha particolarità, nè ſcorgeſi più roſ-
„ ſa, che nei cervelli umani, avendone il colore pallido-in-
„ carnato. E' però affatto priva d' anfratti.

10. Io trovo la corticale più bianca della umana tanto nelle oche, quanto nelle anitre.

11. In riſguardo agli anfratti abbiamo già accordato, che mancano (7), la faccia ſuperiore di ciaſcun emisfero appena portando un ſolco ſuperficiale diretto obbliquamente in avanti e in dentro, come quel riſalto, che nel primo Trattato abbiamo deſcritto (*c*).

12. Diſtruggendone in qualunque guiſa la ſoſtanza è vano tentare di coſtruirne centro ovale midollare ſenza diſtruggere altresì i *ventricoli ſuperiori*.

13. Tagliando verticalmente i groſſi tubercoli cinerici, che nei ventricoli ſuddetti occupano il centro degli emisfe-

---

(*a*) Tratt. I. Par. II. Cap. II. Art. I. §. 3.

(*b*) *Cortex nihil habet peculiare, neque, quam homini, rubicundior eſt, pallide carneus, ut gyris tamen careat.*

(*c*) Parte II. Cap. II. Art. I. §. 5.

ri, vi ſi ſcuopre bensì alquanto di midolla nella ſoſtanza cinericia, ma ſenza penetrare nei ventricoli non s' incontra vera midollare, ſalvo in fondo al ſolco dividente gli emisferi, cioè nel ſito, ch' è nei cervelli umani occupato dal corpo calloſo.

14. La ſoſtanza eſteriore n' è cinericia come la corticale del cervello, maſſime negli emisferi, ed il noſtro Autore dice (*a*), che in queſti animali la ſoſtanza medeſima è compoſta di numeroſi globetti come fu accennato da *Collins* (*b*), e da me ſteſſo negli uomini trattando del cervelletto umano; finiſce però con dire, che non ha mai veduto in molti uccelli corpicciuoli rotondi nella corticale dei loro cerebri (*c*).

15. *Leeuwenoechio* fin dall' anno 1684 laſciò ſcritto, la corticale del cerebro degli uccelli eſſere formata di vaſi, e d' un umore vitreo, ſimile alla pinguedine, ſoſtanza pellucida però, che appariva compoſta di minutiſſimi vaſellini, ed *Emmanuele Swedenborgio* vide nella corticale dell' oca una rete di minutiſſimi vaſellini come atteſtaci *Allero* (*d*); ma io con l' occhio ſemplice non ho mai ſaputo ravviſare in queſta ſoſtanza verun corpo globuloſo ad onta delle macerazioni in liquori ſpiritoſi, e d' altra natura, e del bollimento, tutto ivi mi parve ſempre tomentoſo e vaſculare.

(*a*) *De Part. corpor. humani Fabrica &c.* Tom. VIII. pag. 39.

(*b*) Diſtaccando dalla corticale del cervelletto le falci più intime della interna lamina della pia-madre ho veduto diſtinti innumerabili corpicciuoli incaſſati gli uni fra gli altri appunto come le veſcichette ſugoſe della polpa de' limoni ſi oſſervano. Vedi *Encefalot.* Parte III. pag. 124.

(*c*) *In cortice avium rotundas glebulas nunquam numeroſis in exemplis vidi*. Ivi pag. 41.

(*d*) Ivi pag. 44, 45.

CAPITOLO III.

Del corpo calloſo, e della volta a tre pilaſtri.

Il tutto da me compreſo ſotto il nome d' Arco midollare.

TESTO ALLERIANO (*a*).

,, Quando ſi tolgono allo 'ndietro gli emisferi ecco l' argentino
,, della midollare della volta, che naſce dalla commeſſura
,, anteriore, e principalmente dalla baſe di ciaſcun
,, emisfero, più addentro, ed in ſu della ſteſſa commeſſura:
,, ſale da amendue le parti allo 'ndietro nel ventricolo anteriore,
,, ſi allarga, cuopre quel ventricolo, ed elevandoſi
,, inſenſibilmente ſi riduce in fibre.

16. La ſtriſcia argentina, cui l' Autore noſtro diligentiſſimo dà il nome di *volta* (*ſplendor medullaris fornicis*), è il vero corpo calloſo degli uccelli, ed io ne ho già reſo perſuaſo il celebratiſſimo *Contemplatore della Natura Carlo Bonnet*, con il quale ho l' onore d' eſſere in commercio; e l' anno 1779 a' 25 di Maggio (*b*) io gli ſcriſſi che ſembravami i chiariſſimi *Allero*, e *Lorry* (*c*) avere oſſervato ſuperficialmente il cerebro degli uccelli, la ſtriſcia midollare, che il primo addita ſotto il nome di *volta* negli Opuſcoli ſuoi minori (*d*),

---

(*a*) *Quando vero poſterius hemiſphæria removiſti adparet ſplendor medullaris fornicis, qui ex commiſſura anteriori, & ab imo petiſſimum hemiſphærio ad interiora, & ſuperiora ejus commiſſuræ cerebri natus, retrorſum in ventriculum anteriorem utrinque adſcendit, expanditur, tegit eum ventriculum, & in fibras dum adſcendit, diſſolvitur.*

Nel cit. Vol. VIII. poi alla pag. 57 ripete le medeſime parole dopo d' aver detto *Nullus in avibus eſt. Vidi tamen in Anſere &c.*

(*b*) Vedi il Vol. XV. della preziosiſſima raccolta delle opere di codeſto Naturaliſta inimitabile, e profondiſſimo Filoſofo alla pag. 130, e ſegg; indi alla 205. dello ſteſſo volume, come altresì le ſue lettere, che vanno unite all' *Encefalotomia*.

(*c*) *Savans Etrangers* Tom. III. pag. 344. e ſegg.

(*d*) Tom. III. ſect. XXXVII. Art. 10. Nel cit, vol. VIII dice pure *Avibus nullum eſt* (corpus callosum) *piſcibuſque*; e cita *Willis* pag. 68; *Monroo compar. anat.* pag. 113. *Oper. min.* 214.

eſſendone il vero *corpo calloſo* “ chez les Animaux de cette „ claſſe (ſoggiungeva io) tout le corps calleux ſe reduit á „ une eſpece d' *Arc*, ou pour parler le langage de l' Anatomíe, á une *Faulx* medullaire, dont les parties poſterieures imitent fort bien la *Tente du cervelet* de la Dure-mere du cerveau de l' Homme. “

17. Non ha però veruna raſſomiglianza con la *volta* a tre pilaſtri così elegante e diſtinta nei quadrupedi, nei quali (come viene da noi dimoſtrato altrove) dee la ſua elevazione, ed eleganza alla diſpoſizione dei talami de' *N.* ottici, e a due mataſſe di ſoſtanza cinericia, ſimmetriche, poſte ſotto l' arco diretano della volta medeſima, mataſſe che mancano intieramente sì negli uomini, che negli uccelli, ma forma un riſalto angolare longitudinalmente curvo a foggia d' arco in faccia all' apertura ſuperiore del terzo ventricolo. Intanto la faccia ſuperiore della midolla, onde riſulta queſto riſalto acutiſſimo in baſſo cioè il fondo del ſolco dividente gli emisferi, ne è incavato.

18. La ſoſtanza midollare unita alle pareti del ſolco, ed intrecciata nel fondo del ſolco, che divide gli emisferi, è ripiegata al dinanzi ſotto di ſe medeſima, nell' uomo, dal margine poſteriore, che fa ſulla groſſa vena di *Galeno* lo *ſpiraglio* (*a*), e vi rende apparenti in eſſo, ma aſſai più nei quadrupedi il corpo calloſo, e la volta, la quale è realmente una continuazione della ſoſtanza ripiegata di quel corpo: ma nei volatili tutto il corpo calloſo, e la volta in baſſo riduconſi alla ſuddetta ſpecie d' arco longitudinale, del quale abbiamo già detto (16), che le parti poſteriori midollari imitano la tenda del cervelletto delle *D. M.* umane, e non hanno aderenza alle parti ſoggette ſe non per lo teſſuto cellulare.

19. L' unico vero commercio tra la ſoſtanza degli emiſferi, ed il corpo calloſo ha luogo nella parte anteriore di

---

(*a*) Nella *Encefalot.* parte I. §. 50, e 238. Parte II. §. 25. ſi dichiara lo *Spiraglio* indicare, che la porzione ſuperiore principale del cervello non ha veruna aderenza con la colonna midollare centrale eccetto alla parte anteriore, quaſi alla baſe del cervello ſteſſo.

quei due *corpi*, ai quali daremmo pur anco noi l' epiteto di *ſtriati* per non generare confuſione con nomi novelli, ſe gli trovaſſimo compoſti di due ſoſtanze, e ſituati nei ventricoli laterali, e non affatto fuori dei medeſimi come gli vediamo negli uccelli diviſi per dar luogo ad una feſſura finiſſima, ch' è il *terzo ventricolo* (43). Tutto il rimanente degli emisferi, che contiene i *ventricoli laterali*, i *tubercoli Alleriani*, e i *pleſſi corioidei*, facendo la maſſa principale del cerebro, non vi è aderente nè a tergo, nè ai lati ma ſoltanto al davanti.

Punte del corpo calloſo.

20. L' eſtremità anteriore del corpo calloſo ha due punte, le quali ſi ripiegano obbliquamente in fuori ed in baſſo per immergerſi nella ſoſtanza degli emisferi, la punta deſtra nel deſtro, la ſiniſtra nel ſiniſtro tubercolo.

Appendici del corpo calloſo.

21. La poſteriore ſi allarga, e s' inalza ſu tutt' e due gli emisferi ſempre bianca, e forma un' eſpanſione midollare a foggia di tela depreſſa nel mezzo, la quale tela ha quattro larghe appendici a foggia d' *ale* diſteſe due per lato,

22. Le *ale ſuperiori* ſi allargano obbliquamente elevandoſi, e mentre che ſi avvicinano al centro della faccia poſteriore gibboſa dei *tubercoli Alleriani*, formano due ſeni, la concavità dei quali è rivolta al davanti.

23. Le *ale inferiori* ſono alquanto più larghe, ed argentine, prendono aderenza con la *commeſſura poſteriore*, e con i margini vicini dei *lobi* (dalla diviſione naturale delle faccie interne dei quali riſulta il *terzo ventricolo*) mediante un teſſuto cellulare deboliſſimo.

24. Per meglio diſcernere tutta l' eleganza della fabbrica del corpo calloſo, e delle appendici del medeſimo negli uccelli (la qual coſa è più facile negli alocchi, nelle oche, nelle anitre, nelle grù, nei nibbi e ſimili altri groſſi animali) biſogna ſcoſtare gli emisferi dal *cervelletto*, uno dopo l' altro ſollevandone, e traendone innanzi la porzione gibboſa de' *tubercoli Alleriani*, e così toſto ſi vedrà la midollare, onde queſti ſono aſcoſi aprirſi, lacerarſi in qualche luogo dopo ſofferta una mediocre diſtenſione.

25. Al favore di tale apertura s' introduca la punta d' una penna (preparata per queſt' uſo a foggia di ſteccadenti) nella capacità del ventricolo più vicino all' apertura medeſima, e ſtriſciandone il tagliente in alto, ſe ne ſcinde il parete po-

ſteriore, che circonfleттendoſi ſui lati ſi ſtende molto in baſſo, ed all' innanzi.

26. Diſcoperto in ſimil foggia il *tubercolo*, onde ſono riempiti i ventricoli laterali, ſe queſto ſi ſcoſta dal parete centrale, ſe ſi ſolleva verſo i lati del cranio, ed in avanti, laſciando in ſito l' arco midollare del pari, che le ale del medeſimo, vedeſi da queſte, e da quello (in guiſa che non ſi potrebbe meglio altrimenti) rappreſentata la falce, e la tenda delle *D. M.* umane in ſito.

27. Col metodo ſuddetto ſi diſcuoprono agevolmente in amendue i ventricoli 1. l' *appendice*, che ſi ſpicca lateralmente dai *tubercoli Alleriani*, la quale ſi ripiega in avanti, e in dentro verſo l' arco: 2. l' inſerzione delle punte anteriori di queſto negli emisferi: 3. le ale già deſcritte.

CAPITOLO IV.

Dei ventricoli laterali, e dei corpi in eſſi contenuti.

TESTO ALLERIANO (*a*)

,, Diſtrutta, o ſollevata la volta ſi ſcorge da tutti e due i
,, lati il ventricolo anteriore, che occupa la parte poſteriore di
,, ciaſcun emisfero, ed affatto ſemplice ſi ſtende indietro, ed
,, in giù: i parieti di queſta cavità ſono cinerici in ogni par-
,, te, ſalvo alla volta.

(*a*) *Fornice remoto adparet utrinque ventriculus anterior, qui poſteriorem partem cujuſque hemiſphærii occupat, & retrorſum deſcendit: totus ſimplex; corticea natura, præter fornicem, comprehenditur.*

Allero gli accenna pure al §. XIX, pag. 64. del cit. vol. VIII, e nella nota dice *Negabat Harvejus* (De circulat. ſang. pag. 159) *ſed habet Perrault* (eſſais de Phyſiq. Tom. 2. pag. 162. Tab. 9. fig. I.) *in & ſtruthione Pariſini; inque ipſo anſere de quo negat Harvejus, certo vidi. In Aquila deſcribit Borrichius* (Hermet. ſapien. pag. 266) *Adgnovit Williſius* (loc. cit. pag. 69) *& Willhougby* (ornitol. pag. 5) *& Malpighius* (op. poſthum. pag. 82). Alla pag. 65 poi ſoggiunge *Ea cavea aliter paulum in avibus ſe habet, potius poſterior.* E nella nota *Cerebri ventriculi in avibus* (*neque enim hic caveam thalamorum deſcribimus*) *quando hemiſphæria ſenſim diducuntur, ſtriata, radiata, ex fornice retrorſum adſcendente, medulla remota adparent, unico cum tubere corticali, ſtriati corporis ſimili.*

ARTICOLO I.

I ventricoli laterali.

28. Tutto che *Allero* gli nomini *anteriori*, io non poſſo aſtenermi dal dirgli *laterali* perchè non principiano gran fatto anteriormente al *terzo ventricolo*, e ſi ſtendono molto più addietro, come nei paragrafi antecedenti è già in gran parte dimoſtrato, dai quali agevolmente ſi ricava, che queſti ſono le più grandi, e le più eſteſe cavità del cerebro degli uccelli (*a*), occupanti la parte interna più vicina alla diviſione degli emisferi, e la poſteriore inferiore della eſtremità natiforme d' amendue gli emisferi medeſimi, tappezzate di poca e teneriſſima ſoſtanza corticale o cinericia.

29. La loro eſtremità anteriore è quaſi appuntata nel terzo anteriore della lunghezza degli emisferi, appena alquanto più in avanti del ſito, dove ſi pianta più abbaſſo la punta bifida anteriore del corpo calloſo conſiderata dall' eſattiſſimo noſtro Autore come il pilaſtro anteriore della volta. La poſteriore verrà meglio conceputa quando ſi rifletterà alle coſe, che nei ſeguenti articoli ſi troveranno eſpoſte.

ARTICOLO II.

I Tubercoli Alleriani.

TESTO ALLERIANO (*b*)

„ ..... Si vedono (i ventricoli laterali) contenere un ſo-
„ lo tubercolo corticale ſimile al corpo ſtriato.

„ Tolta

(*a*) Nelle teſte cotte dette dei galli d' india, delle galline, dei fagiani, delle oche, delle anitre, dei nibbi e ſimili rendendoſi più ſoda e meno tenace la ſoſtanza del cerebro, è aſſai più facile oſſervare l' eſtenſione di queſte cavità, e tutte le parti dell' arco, ſcoſtando ſolamente con le dita con deſtrezza i due emisferi finchè ſono aperti i ventricoli, e poi ſeparandone (col premergli verſo le tempie) i tubercoli *Alleriani*.

(*b*) Vedi la nota al teſto dell' articolo precedente ed il cit. vol. VIII.

,, Tolta via quella membrana, ſiegue un tubercolo midol-
,, lare non totalmente prolungranteſi in avanti, ma aſſai più
,, allo indietro, e l' ultima parte inferiore del ventricolo è
,, appoggiata ſu queſti corpi, i quali tengono qui le veci de-
,, gli ſtriati, formando realmente la vera gamba anteriore
,, del cervello.

30. Le ſuddette cavità, o ventricoli ſi allargano ſenſibilmente all' indietro di modo che occupano quaſi tutta la parte più gibboſa degli emisferi ſenza avere notabile profondità, poichè il nocciolo degli emisferi è fatto da quel groſſo tubercolo già ſtato notato da noi, come abbiamo veduto nel teſto. Queſti tubercoli empiono le cavità dei ventricoli laterali, che ſi prolungano con il voto loro molto al di ſotto del margine interno dei tubercoli ſteſſi.

31. Queſto margine ha poſteriormente un' appendice quaſi cuneiforme, alquanto uncinata, oſſia incurvata dal di dietro in avanti verſo il centro dell' encefalo, dov' è libera.

32. Ma perchè più agevolmente ſi conoſca la figura ed il volume de' *tubercoli Alleriani*, e l' eſtenſione fin ora ignorata dei ventricoli laterali, ſi ſollevi con il manico dello ſcalpello o con lo ſtecco per ogni verſo la tenue ſoſtanza del parete eſteriore d' un ventricolo, mentre che con l' indice dell' altra mano applicato ſul tubercolo, che vi ſtava rinchiuſo, ſi va queſto ſcoſtando ora dall' arco midollare, ora dalle ale, traendolo in avanti.

---

alla nota della pag. 65. dove leggeſi *Adparent* (*cerebri ventriculi*) *unico cum tubere corticali, ſtriati corporis ſimili. Ea membrana remota ſequitur medullaris colliculus non penitus in anteriorem partem productus, in inferiorem magis, & ultima pars inferior ventriculi iis corporibus incumbit, quæ ſunt pro ſtriatis, verum nempe crus anterius cerebri* (oper. min.. III pag. 192.)

Nelle ſteſſe opere minori *Allero* aveva già ſcritto: *Magis diductis parietibus adparent duo tubercula interiora, anteriora, cinerea, cortice multis vaſis rubris percurſo, intus medullam habentia, nulla certe forma conſpicua, ut ſtriatorum corporum locum teneant, cæterum ſtriata non ſint; poſterius magis corticea, anterius magis medullaria ſint, & ponantur ante nervos opticos, & ab iis decuſſentur.*

Finalmente nel cit. vol. VIII. leggiamo alla pag. 81. *Non ita aves* (*corpora ſtriata nacta ſunt*) *etſi enim in ventriculo laterali utroque ſimilis eorum columna eminet, tota tamen cinerea eſt, ut accurate rimando obſervavi. Medius ventriculus duos colles accumbentes habet, ſtriatorum ſimiles, ſed minime duplici colore varios, in quos tota cerebri medulla terminatur.*

33. Così oltre all' aumento di capacità, che dalla appendice dei tubercoli ne viene alla circonfleſſione de' ventricoli ſteſſi, vedrannoſi pur anco li tubercoli medeſimi diſtaccati naturalmente da tutta la capacità poſteriore di quelli, e ſi comprenderà, che il vero punto d' unione tra gli emisferi, e ciaſcun tubercolo incomincia proprio là, dove le punte anteriori dell' arco, o corpo calloſo ſi cacciano nella ſoſtanza della faccia interna, oſſia nei lati del fondo anteriore del ſolco dividente gli emisferi per traſcorrere a formare alla baſe del cervello le due papille midollari. Da quel ſito in avanti non fanno più che un ſolo corpo, una continuazione di ſoſtanza con il reſto degli emisferi.

34. Benchè la baſe dei tubercoli ne ſia più pallida, che tutto il reſto della maſſa loro, non vi ſi ravviſa però abbondantemente raccolta la midollare, eccetto quella poca, che loro viene dalla punta bifida del corpo calloſo, perciocchè le ale, maſſime le inferiori, che ſono intieramente argentine, s' immergono con i lembi loro piegati in avanti ſotto l' appendice dei tubercoli, e dalla ſoſtanza propria degli emisferi nella quale penetrano, ſi allungano in baſſo ſenza contrarre neſſuna aderenza con i tubercoli ſteſſi.

35. Arrivate vicino al centro compongono due cordoni midollari, i quali paſſano al di ſotto dei *corpi cinerici* detti lobi da noi (§. 19), aggiacenti al *terzo ventricolo*, pure ſottopoſti alla baſe degli emisferi, e dirigendo il corſo loro verſo il ponte del *Varolio*, formano la porzione principale delle gambe del cervello.

36. Nella parte anteriore inferior interna degli emisferi ſi trovano pure molti fili midollari, i quali, uniti con le ſtrie provegnenti dalla punta bifida anteriore dell' arco, formano un corpo bianco di notabile volume.

ARTICOLO III.

Il Tramezzo dei ventricoli laterali.

37. Per dimoſtrare chiaramente queſto tramezzo ſi ſpacchi ſul davanti la parete ſuperiore d' un ventricolo nella ſommità del ſolco longitudinale con lo ſtecco di penna, o con

il nevrotomo ; indi ſi allontani dal ſolco un tubercolo trattenendo in ſito la parete del ſolco medeſimo, e recidendo quello alla ſua baſe in traverſo dal centro al lato del cranio : conſecutivamente ſi apra l' altro come ſopra , ſi ſcoſti , e ſi porti via l' altro tubercolo , e vedraſſi il tramezzo riſultare dalla unione di tali parieti in fondo al ſolco longitudinale inſieme concorrenti, qui divenuti più bianchi , maſſime all' indietro, e coſtruenti il corpo calloſo, oſſia l' arco midollare, del quale abbiamo già tante volte fatto menzione (cap. III).

ARTICOLO IV.

De' Pleſſi corioidei.

TESTO ALLERIANO (a)

„ In quello (ventricolo) penetra il pleſſo corioideo che
„ vi ſi diſtende a foggia d' una membrana irrigata per ogni
„ dove da numeroſiſſimi vaſellini.
„ Quel pleſſo è accompagnato da una groſſa vena.

38. Ho ſempre trovata diviſa in quattro parti la tenera membranuccia, che fa il pleſſo corioidéo dei ventricoli laterali dell'oca, della grù, dell' alocco e degli altri uccelli maggiori , cioè due parti ſuperiori una per lato , e due inferiori.

39. Le ſuperiori formano una ſpecie di *fiocco* aſſai largo appeſo ad un tenue cordoncino vaſculare : occupa una picciola porzione della cavità ſuperiore dei ventricoli , appoggiandoſi ſulla parte più elevata dei tubercoli *Alleriani* , che gli riempiono: queſto fiocco, cioè la porzione del pleſſo più eſteſa, vaſculare e libera, ſi trova al davanti, ed il cordoncino, dal quale pende, poſteriormente.

(a) *In eum* (ventriculum) *plexus chorioideus ſubit , & in eundem membranæ vaſculis pleniſſimæ ſpecie ſe diffundit*
Eum plexum magna vena comitatur.
Alla pag. 79. poi del vol. VIII. ha ciò , che ſiegue : *In avibus elegantes omnino per ventriculos laterales , maxime poſterius, plexus expanduntur, & inter colles ſtriatis corporibus ſimiles, cavoſque thalamos eminent.*

40. Le inferiori ſono a guiſa di larghe *frangie* appeſe pure ad un cordoncino vaſculari, e ſi eſtendono ſotto i tubercoli ſuddetti, avendo pure l' eſtremità libera al davanti, ed i picciuoli verſo la parte diretana dell' arco midollare.

41. I quattro cordoncini ſono tutti convergenti verſo il cervelletto, dove unitiſi in un tronco ſolo, queſto paſſa dietro della *commeſſura poſteriore del terzo ventricolo* ora dirimpetto alla *glandula pineale*, ora tra queſta e la faccia anteriore del *cervelletto*, e ſale a metter foce nella biforcazione poſteriore del *S.* longitudinale della *D. M.* (*a*).

ARTICOLO V.

Altro Pleſſo vaſculare.

TESTO ALLERIANO (*b*)

„ Poſteriormente alla volta il pleſſo medeſimo ſi fa ſtrada
„ fra quella, e la vicina parte del cervello.

42. Il tronco dependente dall' anaſtomoſi dei quattro cordoncini vaſculari del pleſſo deſcritto, paſſando poſteriormente all' arco (18) per lo ſpiraglio, rade la faccia anteriore del cervelletto, e giunto al ſito dove comunicano col ſeno longitudinale i ſeni obbliqui dependenti dalle vene, che derivano dalle eſtremità gibboſe degli emisferi, e dalla faccia anteriore del cervelletto, riceve le vene principali d' un altro pleſſo corioideo conſiderabile, dal quale ſuol eſſere avvolta naſcoſta la glandula pineale, probabilmente quello, che *Allero* nel teſto pur ora citato ha voluto indicare.

(*a*) Ved. Tratt. preced. §. 26.

(*b*) *Poſterius quam fornix idem plexus inter eum, & accumbens cerebrum prodit.*

CAPITOLO V.

Del terzo ventricolo.

TESTO ALLERIANO (a)

„ Il ventricolo di mezzo ha ſu i lati due tubercoli ſimili
„ ai corpi ſtriati , ma privi del doppio colore , che gli fa
„ nominare così , e nei medeſimi viene a terminare tutta la
„ ſoſtanza midollare del cervello.

„ Fra quei tubercoli v' ha il *terzo ventricolo* come nell'
„ uomo , e ſi continua pure anche nell' acquidotto.

ARTICOLO I.

De' Lobi.

Lobi.

43. Conoſciuta la ſtruttura del corpo calloſo, e delle ſue appendici, l' eſtenſione dei ventricoli laterali, e i tubercoli che occupano quaſi tutta la loro capacità, ſi diſtruggano queſte due eminenze con un taglio orizzontale per lato, che ne porti via tutta la ſoſtanza dal termine anteriore del corpo calloſo al cervelletto e dai lati del corpo medeſimo alle tempie : ſi ſepari deſtramente (al che non incontraſi oſtacolo) dalla faccia anteriore del cervelletto medeſimo, dalla *commeſſura poſteriore del terzo ventricolo*, e dalla faccia ſuperiore dei *talami de' nervi ottici* tutto l' appartenente alle ale del corpo calloſo, oſſia alle pareti eſterne dei ventricoli laterali, e ſi roveſci al davanti finchè ne reſti puranco ſcoperta la *commeſſura anteriore* dello ſteſſo *ventricolo*, e ſi vedranno due *lobi* di ſoſtanza cinericia (19) ſituati al di ſotto degli emisferi, affatto fuori dei ventricoli laterali, perchè ſottopoſti alle ale inferiori del corpo calloſo, che ſi ſtendono innanzi, anche oltre all' angolo anteriore di queſti *lobi* ſteſſi.

(b) *Medius ventriculus duos colles accumbentes habet, ſtriatorum ſimiles &c.* come nella nota.

Apertura ſuperiore del III. ventricolo.

44. Sono eſſi due corpi cinerici, foſchi, tondeggianti al lato più diſtante dal centro dell' encefalo, gibboſi, ineguali e midollari in baſſo, piani in alto, ſituati ſotto gli emisferi in guiſa, che il deſtro è diviſo dal ſiniſtro ſoltanto per una ſtretta feſſura aſſai meno lunga dell' eſtenſione dell' arco midollare, oſſia corpo calloſo, che la ricuopre, la quale feſſura limitata viſibilmente dalle due *commeſſure* già più volte citate, è l' indizio ſuperiore del vero *III. ventricolo*.

45. La porzione anteriore dei lobi è bianca, e ſi confonde con la baſe pur midollare degli emisferi, ſicchè queſte ſoſtanze diſcendono unite a perderſi nelle *gambe del cervello*, ch' io non oſo nominare *colonna midollare centrale*, come ho fatto nell' *Encefalotomia umana*, perchè nell' uomo è verticale mentre che negli uccelli ha una direzione quaſi orizzontale verſo l' occipite.

46. *Allero* volendo accordare anche alle anitre i corpi ſtriati diſſe, che *ſono cinerici, alquanto diſtinti dalle gambe del cervello, le quali ſtanno loro dietro*. Nel paragone poi, che fa del cerebro degli uccelli con quello degli uomini diſſe, che *ſono ſimili eziandio per li corpi ſtriati*; ed accennandone le differenze, al N. 4. diſſe: *Il terzo ventricolo ne è diverſo perchè negli uccelli ſi trova fra i corpi ſtriati, i talami dei N. ottici eſſendo fuori del cervello*. Dunque diede il nome improprio di *corpi ſtriati* a queſti, che noi appelliamo *lobi*, giacchè nei medeſimi non avvi ſtria di ſorte veruna, come dallo ſteſſo *Allero* fu ingenuamente confeſſato.

47. Non dobbiamo dunque interpretare, che il *III. ventricolo* ſia fra i tubercoli *Alleriani* (§. 30., e ſegg.) come ſembra il noſtro Autore avere talvolta indicato, ma dobbiamo cercarlo fra i lobi (44. e ſegg.) diſtintiſſimi da tutte le altre parti del cervello per li caratteri, che abbiamo eſpreſſi.

ARTICOLO II.

Le coſe notabili nel ventricolo III.

48. I margini paralleli dei lobi, che ſono i labbri del III. ventricolo, tengonſi avvicinati mediante due cordoni mi-

dollari poſti in traverſo, nominati *commeſſure*, una anteriore, ed una poſteriore.

Apertura anteriore del III. ventricolo.

49. Soffiando con impeto dentro quella feſſura ſi rende manifeſta la capacità del III. ventricolo, in fondo al quale anteriormente ſotto la commeſſura anteriore ſi vede una mediocre lacuna indicante il ſito, che corriſponde all' *imbuto* diſcendente verſo la *glandula pituitaria*; queſta lacuna diceſi *apertura anteriore* del III. ventricolo.

Apertura poſteriore del III. ventricolo.

50. Dirigaſi pure con forza il fiato per la ſuddetta feſſura poſteriormente, e ſi ſcuoprirà la comunicazione di queſto ventricolo con l' *acquidotto*, che guida al *quarto ventricolo* mediante l' *apertura poſteriore* coperta dalla commeſſura pur anco poſteriore.

51. Queſt' apertura è ſituata aſſai meno profondamente dell' anteriore, perchè l' *acquidotto* è ſcolpito ſuperficialmente ſulla faccia ſuperiore diretana della midolla allungata.

52. I parieti laterali del terzo ventricolo ſono fatti dai lobi (44. e ſegg.). Il colore di queſti è cinericio, e ſono tappezzati di lanuginoſa molle ſoſtanza.

ARTICOLO III.

Le commeſſure.

Commeſſura anteriore.

53. Il cordoncino midollare, che fa la commeſſura anteriore, penetra in traverſo per la parte anteriore dei lobi; giunta alla metà dell' eſtenſione traverſo dei quali ſi curva, ſi piega in baſſo ed innanzi per inneſtarſi nel più eſterno dei faſcetti argentini, dei quali daremo notizia quando tratteremo dei *Nervi olfattorj* nel IV. Trattato.

54. Tale corſo della commeſſura anteriore ſi ſcorge diſtintamente in mezzo alla ſoſtanza dei lobi per la grande bianchezza di quella che ſpicca nel cinericio di queſti; ma conviene raſchiarne dolcemente la ſuperficie, e tener dietro alla curvità di quel candido cordone.

55. Parmi, che *Allero* abbia voluto mentovare queſta

commeſſura quando diſſe (*a*): *Nel mezzo del ſito occupato dalle gambe del cervello, ſui talami, queſte gambe vengono congiunte mediante un cordoncino ſimile ad un nervo, molto lungo, diretto in traverſo, e midollare*. Ma queſta benchè traſori i lobi, non tocca però le gambe del cervello, nè ha veruna relazione con i talami, che vi ſtanno aſſai più addietro, e lontani.

56. E che favelli di queſta, non già della poſteriore viene dimoſtrato dalle parole ſeguenti „ v' è finalmente un' al„ tra commeſſura più allo 'ndietro, e al di ſotto della me„ deſima la comunicazione del terzo con il quarto ventri„ colo (*b*).

Commeſſura poſteriore.

57. La commeſſura poſteriore ſi trova nelle oche due linee circa più indietro della anteriore, ed è una laſtra midollare piatta e ſpeſſa, larga più d' una linea dall' angolo poſteriore del terzo ventricolo alla vicina faccia del cervelletto; la ſua eſtenſione traverſale arriva a lin. 2 + 1 : 2. Serve di volta al principio dell' *acquidotto*.

58. E' compoſta d' alcuni ſtrati (*c*) di molte fila aſſai diſtinte, traverſali, parallele, alcune delle quali s' immergono nella foſca ſoſtanza dei lobi (*d*), altre nella midolla delle gambe del cervello: il maggior numero però delle poſteriori s' immerge nella parte vicina dei *talami de' N. ottici*.

CAPITOLO

(*a*) *In media vero crurum cerebri ſede, ſupra thalamos, uniuntur hæc crura funiculo nervo ſimili, tranſverſo, medullari*.

(*b*) *Alia denique poſterior commiſſura eſt, ſub qua ventriculus tertius in quartum continuatur*.

E nel volume VIII. pag. III. trattando della commeſſura poſteriore dice *Habent aves*.

(*c*) Negli uomini è fatta a laſtre midollari ſucceſſivamente più corte e più baſſe indietro ved. encefalot. univ. parte II. cap.

(*d*) Nei galli, e nei fagiani la commeſſura poſterior è viſibilmente laminoſa in vece, che nei froſoni forma un travicello quadrato verſo il cervelletto, e nei primi ſotto la commeſſura ſteſſa al davanti non avvi ſubito l' acquidotto, ma una liſca di mediocre ſpeſſezza, midollare, ed immerſa nella parte diretana dei lobi.

CAPITOLO VI.

ARTICOLO I.

Dell' acquidotto.

60. Soffiando leggiermente per lo terzo ventricolo nella poſteriore apertura, ſi vede l' acquidotto, che negli uccelli è un canale di conſiderabile lunghezza, molto largo al ſuo principio, e poco alto mercè che il margine diretano del terzo ventricolo tocca quaſi la laſtra midollare, che ne fa quivi la commeſſura. Si va però allargando per ogni verſo a miſura che ſi accoſta ai *peduncoli* del cervelletto per dare principio all' *aja* del quarto ventricolo.

61. Non oltrepaſſata ancora l' eſtenſione longitudinale della commeſſura (57. 58.) sboccano nell' acquidotto due canaletti di notabile calibro, i quali vengono dai ſacchi fatti negli uccelli (come nelle vipere, nei ſerpi, e nei ramarri) dai *talami de' N. ottici*, i quali *Allero* dice (*a*) “ eſſere congiunti inſieme per mezzo d' una lamina midollare traver-
„ ſale ſottile diſteſa ſulla faccia diretana delle gambe del cer-
„ vello contro. la faccia anteriore del cervelletto, dimodo
„ che cuopre il quarto ventricolo.

Imboccature dei ventricoli de' talami.

ARTICOLO II.

Il velo midollare.

62. Per conoſcere la ſtruttura di queſta lamina, che forma la volta dell' acquidotto diſtrutta la loggia oſſoſa del cervelletto (*b*), rimoſſi i tubercoli *Alleriani* de' ventricoli laterali, e le ale del corpo calloſo di maniera, che ſia ſcoper-

---

(*a*) *Uniuntur inter ſe lamina medullari tranſverſa, tenui, poſterius, & ſuperius cruribus cerebri impoſita, adplicata etiam poſteriori cerebello ut ventriculum quartum tegat.*

(*b*) A queſto propoſito vedi il mio *Tratt. delle oſſervazioni in Chirurgia* Parte II. pag. 67, e ſeg.

to il terzo ventricolo (43), e la commeſſura poſteriore, ſi deprima indietro il *cervelletto*, e ſi ſcoſtino i fili inferiori della ſuddetta commeſſura; intanto ſpingaſi dolcemente il fiato nella parte poſteriore del terzo ventricolo verſo l' acquidotto, e toſto vedraſſi ſollevato un velo bianco (*a*) tenuiſſimo, traſparente, e molto arrendevole, ſicchè ceſſando di ſpingervi il fiato, più non ſarà viſibile.

63. A miſura che l' accennato velo ſi eſamina più in baſſo diſcoſtandone ſempre più il cervelletto, ſi trova dotato di maggiore denſità, e robuſtezza per lo corſo ſuperiore d' una linea; e i lati di tale addenſamento, le fibre del quale ſcorrono viſibilmente in traverſo, ſono una continuazione di ſoſtanza con quella delle vicine parti dei talami.

64. Sembra, che queſta laſtra midollare traverſa (dai lati inferiori, o per meglio dire poſteriori della quale naſcono per varj filuzzi diſtinti i nervi *patetici*) finiſca mediante un lembo inferiormente libero contro la faccia anteriore del *cervelletto*: infatti più baſſo del ſegmento, contro cui queſto lembo s' appoggia, prima che ſi arrivi alla parete poſteriore vicina del *quarto ventricolo*, ſi contano ancora in alcuni uccelli tre, quattro, e fino a cinque ſegmenti cinerici, l' ultimo, oſſia il più baſſo dei quali al davanti può vederſi di baſſo in alto ſu per la cavità del ventricolo ſuddetto tra i *peduncoli* del cervelletto, dov' egli ſi caccia a guiſa di capezzolo. Baſta a tal fine, che ſi deprima il cervelletto in avanti, e ſe ne ſcoſti la midolla allungata.

65. Eppure non è così. Dall' orlo poſteriore (*b*) della deſcritta lamina ſi allunga lo ſteſſo velo midollare, però molto aſſottigliato, cioè maggiormente d' ogni più pellucida lamina di talco, e d' ogni più traſparente pellicola dei lobetti dell' aglio; ed appunto per queſta ſua ſomma pellucidità non ſi vede punto cangiato il colore xarampelino del capezzolo ſuddetto, che pure n' è veſtito.

(*a*) Nella Parte III. della *Encefalotomia univerſ.* come nella *nuova eſpoſ. della ſtruttura del cervelletto umano* è ſtato dimoſtrato, che *Wieuſſens* avea preſo male a propoſito queſto velo per una valvula deſtinata a frenare il corſo de' fluidi dal IV. ventricolo per l' acquidotto nel III. ved. pag. 103 §. 119.

(*b*) Tratt. delle Oſſ. in chirurgia pag. 68.

66. Si rende viſibile queſto velo teneriſſimo allor quando ſi ha reciſa in traverſo tutta la ſoſtanza del cervelletto, che ſupera in altezza il livello della faccia ſuperiore dei talami, potendoſi con tale metodo meglio ſollevare gli ultimi ſegmenti anteriori del cervelletto per favorire il ſollevamento del velo, e per farlo gonfiare a ſoggia di bollicina ſpignendovi nuovamente con diſcretezza il fiato per l' acquidotto all' ingiù, o per lo quarto ventricolo all' in ſu.

67. Nelle oche, e negli alocchi vecchi ſuole trovarſi denſo, bianco, ed aſſai meno traſparente che in molti altri volatili; per la qual coſa naſconde affatto l' ultimo ſegmento del cervelletto, e ſi vede a continuarſi diſtintamente con la ſoſtanza midollare, che occupa l' interno del cervelletto, ſoſtanza diſpoſta a guiſa di ſemicono voto con la baſe rivolta verſo lo sfondo romboidéo.

68. Per vederne poſcia ancora più diſtinta la continuazione con la mentovata ſoſtanza midollare interiore del cervelletto, ſi tagli queſto verticalmente quanto è alto di maniera, che ſi riduca in due porzioni, una deſtra, e l' altra ſiniſtra; queſte ſi ſcoſtino l' una dall' altra, e toſto ſi vedrà la midollare della faccia anteriore del ſemicono (*a*) a ſollevare il velo, con il quale è continua, e queſto a lacerarſi quando ſi continui a diſcoſtare le due parti nell' accennata guiſa tagliate.

Articolo III.

Le Eminenze quadrigemelle.

69. *Allero* ſempre trattando di queſto velo ſoggiunge: *Tale eminenza, che però non ha elevazione di figura determinata, è per altro ſimile alla quadrigemella di* Winslow (*b*),

---

(*a*) Vedraſſi pur anco la cavità conica da niſſun notomiſta oſſervata, o deſcritta, che trovaſi nel corpo ſteſſo del cervelletto e che verrà da noi ampiamente deſcritta nel ſeguente Trattato.

(*b*) Op. Minor. Vol. III. pag. 93. *Ea eminentia in nullas eminentias figurata quadrigeminæ Winslowi cætera ſimilis eſt.*

ed altrove: *Negli uccelli ſta ſull' acquidotto una eminenza ſomigliante* (alla quadrigemella) *ma priva delle elevazioncelle rotonde* (*a*). A queſto propoſito io debbo ripetere, che ſiccome altre parti eſſenziali occupano nell' encefalo delle oche, delle anitre, e degli altri volatili un ſito differentiſſimo da quello, nel quale ſi ſogliono trovare nell' umano, e in quello dei quadrupedi, dei peſci, e de' rettili; così non dee recare maraviglia ſe anche l' eminenza quadrigemella di *Winslow* (le quattro elevazioni della quale furono dagli Anatomici conoſciute ſotto il nome di natiche e di teſticoli) non ſerva di volta o di parete ſuperiore all' acquidotto, ma ſi debba cercare nella parte inferiore interna di queſto canale veſtita della morbidiſſima lanugine, che tutto lo tappezza, e coperta della menzionata laſtra midollare, o velo deſcritto. In fatti diſtrutta la commeſſura poſteriore, ed il velo, non v' è uccello, nel cerebro del quale non ſi veggano due picciole eminenze per lato affiſſe al parete inferiore interno dell' acquidotto. Le due ſuperiori o anteriori (equivalenti alle natiche dei cerebri umani) ſono più tonde, e più elevate delle inferiori (equivalenti ai teſticoli) o poſteriori alquanto bislunghe.

70. Le deſtre ſono diviſe dalle ſiniſtre mediante il ſolco ſtendenteſi dal terzo ventricolo giù per l' acquidotto ſino alla punta inferiore del IV ventricolo, o della penna da ſcrivere.

71. Non ſolo nei volatili groſſi, ma eziandio nei piccioli è coſa agevole diſcernerle nell' accennato luogo, dove più e più volte le ho fatte oſſervare nei tordi, nei froſoni, nei paſſeri di ſalcio, e di muro, nei cardellini, nei canarini, nelle ballerine, e fin nei reattini.

72. Siccome *Allero* dice, che (*b*) *dalla eminenza quadrigemella naſce una ſtriſcia traverſa, e da quella il quarto paro de' nervi*; così vedremo nel Trattato dei Nervi cerebrali

---

(*a*) Vol. VIII. §. XXXII. pag. 106. *In Avibus eminentia ſimilis aquæductui imponitur, ſed abſque rotindis colliculis.*

Nella nota. Confer Gallopavonem Collins Tab. 57. fig. 3.

(*b*) *Ab eminentia quadrigemina tranſverſa ſtria naſcitur, & ab ea nervus quartus.* Op. Minor. l. cit.

degli uccelli ſe il IV paro dei nervi naſca ſolamente dalla liſca midollare, della quale *Allero* favella, o ſe qualche radice ſe ne ſpicchi pure dal parete anteriore interno dell' acquidotto.

CAPITOLO VII.

Delle papille midollari, oſſia eminenze mammillari.

TESTO ALLERIANO (*a*).

„ Anteriormente alla commeſſura anteriore ſi trovano le
„ vere eminenze mammillari come negli uomini.

73. Nei cervelli umani (*b*) queſt' eminenze ſono ſituate dietro della commeſſura anteriore, davanti all' antro dei nervi motori comuni degli occhi, una per lato, immediatamente alla baſe del cerebro tra l' unione quadrata dei nervi ottici, e l' antro. In quella parte dell' *Encefalotomia univerſale*, che tratta dei quadrupedi, ſi dimoſtra, che occupano lo ſteſſo luogo nella maggior parte di quegli animali, con queſta differenza però, che nel cavallo, nell' aſino, nel mulo, nella lepre, e nel coniglio queſte due eminenze ſogliono eſſere così ſtrettamente unite inſieme per un teſſuto cellulare aſſai robuſto, per la pia madre, e per la membrana aracnoidéa, che vi formano un ſolo capezzolo. Due diſtinte, e aſſai più apparenti per lo candore loro ſi veggono alla baſe del cerebro dei rettili come ſono i ſerpi, le vipere, i ramarri, e collocate poſteriormente alla commeſſura.

74. Negli uccelli le ho ſempre trovate al davanti della medeſima come inſegna il noſtro Autore; debbo però avviſare, che in queſto ſito vi ha un altro paro d' eminenze, ch' io nominerò francamente *apofiſi midollari dei nervi ottici* perchè ſi ergono proprio dal centro della diviſione dei

Apofiſi midollari dei *N.* ottici.

(*a*) *Ante eam commiſſuram ut in homine, veræ ſunt eminentiæ mamillares.*
(*b*) Encefalot. Univer. Parte II.

nervi ottici davanti all' aja della loro unione: ſono ſode, e affatto continue con la ſoſtanza del nervo.

75. Anzi la ſteſſa foſſa, dalla quale eſcono queſti nervi, unica nella cavità del cranio, doppia verſo le occhiaje, (*a*) perchè diviſa mediante il tramezzo delle medeſime, riceve anche le appendici, che ſono pure in quel luogo inſieme unite per le faccie, onde ſi corriſpondono.

76. Le due papille poi, che corriſpondono a quelle degli uomini e dei quadrupedi, ſi rendono apparenti ſollevando la faccia inferiore dei *tubercoli Alleriani* (cap. IV. art. II), e ſcoſtandola dall' unione dei *N.* ottici, che negli uccelli, come vedremo a ſuo luogo, non è quadrata. Sono pallide nelle oche, e negli altri uccelli groſſi; nei minori, com' è il cardellino, il fanello, il verzellino, il lucarino, la allodola, la paſſèra de' ſalci, il reattino ecc, ſono del colore della perla, lucide, e minute.

77. Rieſce difficile aſſicurarſi ſe la punta bifida dell' arco midollare (cap. III.) concorra a formarle. Il ſito delle papille anteriore alla commeſſura negli uccelli appunto come la punta bifida anteriore dell' arco, che ſi avanza oltre alla commeſſura ſuddetta, e qualche debole traccia argentina, che ho oſſervato da quella a queſte nella ſoſtanza dei citati tubercoli *Alleriani* tanto nelle oche, quanto nelle anitre, nel barbagianni, nel nibbio, e nei galli d' india, dee rendermi ſcuſabile ſe inclino a credere, che anche negli uccelli le papille midollari ſieno formate come negli uomini (*b*) dal raddoppiamento della ſoſtanza midollare della punta anteriore dell' arco per riſalire (a qualche fine noto alla natura) nella ſoſtanza del cervello, non avendo io negli uccelli ancora potuto vedere la continuazione di tale raddoppiamento fino al nervo olfattorio.

(*a*) Trat. I. Par. II. cap. II. Art. II. §. I. cap. III. Art. III.
(*b*) Enceſal. Univ. Parte II.

CAPITOLO VIII.

I Talami.

Testo Alleriano (*a*)

,, Alle gambe del cerebro ſtanno appoggiati i talami de'
,, nervi ottici, la ſtruttura dei quali è differente da quella
,, che hanno negli uomini. Sono due ſacchi voti, ovali; oc-
,, cupano lo ſpazio di mezzo tra il cervello e il cervellet-
,, to, poſteriormente al primo, davanti all' ultimo, ſopra le
,, gambe del cervelletto.

78. Sono veramente talami dei *N.* ottici que' due corpi bianchi, liſci, poco differenti in figura da due lupini, cioè tondi, pianamente conveſſi in alto ed in baſſo, coperti dalla gibboſa eſtremità degli emiſferi, aggiacenti in avanti ai lobi, in alto ai *peduncoli del cervelletto*, che ſi vedono tra la colonna midollare centrale, e le pareti laterali del cranio alla baſe di queſto, innicchiati nelle due foſſe (*b*) ſcolpitevi appunto per contenerli, e perciò dette da noi foſſe dei talami; nelle quali ſono trattenuti dalle già deſcritte due pieghe orizzontali della Dura-madre (*c*).

79. Nel centro del corpo loro lenticolare ſi vede una conſiderabile cavità (comune agli uccelli, ai ſerpi, alle vipere, ai peſci) la quale sbocca nelle pareti laterali dell' acquidotto là dove n'è ancora fatta la volta dalla commeſſura poſteriore (61).

Ventricolo dei talami.

(*a*) *Verum cruribus cerebri adplicantur thalami nervorum opticorum, quorum alia, quam in homine, natura eſt. Sacci ſunt cavi, ovales, medio loco inter cerebrum & cerebellum poſiti, pone cerebrum, ante cerebellum, ſuper crura cerebelli.*

In avibus (pag. 68.) *thalami nervorum opticorum cavi ſunt, propriumque ventriculum continent.*

In avibus (vol. VIII. §. XXV. pag. 87) *hi thalami manifeſto cavi ſacci ſunt.* E nella nota: *Habet Willis* p. 71. *Willoughby* p. 5. *Collins* p. 1101. *Tab.* 53. F. 6. Tab. 58. fig. I. ecc. Altrove di nuovo dice

Cavea in avibus ad aquæductus finem in ventriculum quartum hiat; fibræ ſuperficiei nervum opticum adeunt.

(*b*) Trat. I. Parte II. cap. II. Art. I. §. 14, e 15.

(*c*) Tratt. ſecondo §. 11.

80. Aveva già notato *Allero*, che la corteccia dei talami è midollare, ma ſottile, e che il rimanente dell' intima loro ſoſtanza è quaſi cinericio (*a*), ſicchè mi reſta ſoltanto da accennare, che la ſoſtanza midollare n'è ſoſtenuta da tale ſoſtanza cinericia, la qual è molto foſca, e ſi appoggia pure ſopra un nocciolo midollare cavo, a tal che la cinericia è tra due laſtre midollari ſimili a due guſci di lupino contenuti uno nell' altro.

81. In ſecondo luogo, che il parete interno del ſecondo guſcio midollare è pur anco tappezzato di morbida polpoſa lanugine cinericia, per la quale ſerpeggiano molti vaſellini ſanguigni, diſpoſti ivi a foggia di rete in alcuni cerebri molto elegante.

Pleſſo corioidéo dei ventricoli de' talami.

82. In terzo luogo, che non ſi dee confondere con il pleſſo corioidéo viſibile nei talami degli uccelli più groſſi l'accennata rete vaſculare, perchè quello è un corpo diſtinto fatto a foggia d' una membrana fine sì, ma libera, tutta irrigata eſſa ancora di vaſellini, e venendo dal quarto ventricolo, ſi porta in amendue le cavità dei talami a guiſa di doppio allungamento.

83. Finalmente, che queſti due piccioli pleſſi corioidei hanno il picciuolo proprio membranoſo, il quale paſſa nel canaletto di comunicazione tra il voto dei talami e l' acquidotto, mentre che il fiocco, dal quale ne ſono occupate le cavità, agitato nell' acqua vi ſi ſpiega, e manifeſta la propria notabile eſpanſione.

84. Soggiungeſi poi dall' Autore eſſere corticale quella ſoſtanza, che attacca i talami alle gambe del cervello (*b*), e che gli uniſce tra di loro; e ch' eſſi abbracciano e circondano le gambe del cervello nella guiſa, che alquanto più indietro

---

(*d*) *Eorum cortex medullaris tenuis eſt; reliquum intus fere corticeum.* Op. Min. l. cit.

(*b*) *Thalamos, ubi cum cruribus coaleſcunt, corticea ſubſtantia unit. crura cerebri perinde amplexantur, & circum eunt, uti paullo poſt cerebelli crura ſolent, & appendices quædam ſunt ejus cruris cerebri. Hi thalami toti cavi educunt nervum cognominem fibris ſuis anterioribus, & poſterioribus, qui tamen etiam ad corticalia crura cerebri adhærent. Hi porro nervi optici craſſi, & duri, & breves conveniunt in unum* Op. Minor. l. cit.

dietro abbracciano e circondano quelle del cervelletto, e ſono in certo modo appendici delle gambe del cervello; e queſti corpi voti mediante le fibre loro anteriori, e poſteriori dare origine al *N.* ottico, eſſendo anche aderenti alla parte cinericia delle gambe del cervello; e gli ſteſſi nervi groſſi, e duri dopo un breve tragitto ſi congiungono pur anco inſieme.

85. Con le quali parole il chiariſſimo Autore ha probabilmente voluto indicare la ſoſtanza cinericia della quale abbiamo notato eſſere coſtrutti i lobi (*a*), e non già conſiderare come porzione dei talami ſiffatta ſoſtanza cinericia, perciocchè ſebbene queſti con il margine interno ſi trovino aderenti ai lobi, tuttavia non ſono continui, nè confuſi inſieme.

86. In riſguardo poi all' origne, alla ſtruttura, ed al corſo dal medeſimo eſpoſti dei nervi ottici, tratteremo diffuſamente nel Trattato ai *N.* cerebrali deſtinato.

CAPITOLO IX.

Della Glandula Pineale

TESTO ALLERIANO (*b*)

„ Non v' è Glandula Pineale.

87. Il vedere collocati negli uccelli così lontano dai ventricoli laterali i talami de' *N.* ottici, che negli uomini, e nei quadrupedi ſi trovano ſotto la volta a tre pilaſtri immediatamente uniti per formare il terzo ventricolo; e gli ſteſſi talami coſtrutti così diverſamente da quello, che ſono in queſti (differenza però, che non è guari conſiderabile tra i talami degli uccelli e quelli delle vipere, dei ſerpenti, delle lucertole terreſtri, ed acquatiche, e dei peſci) il vederli così

(*a*) 43, 46, 47.

(*b*) *Nulla glandula pinealis* e ripete: *Nulla in Anſere, Anate, Tringa.* Op. Minor. P. II. pag. 197.

lontani dai corpi, che equivagliono agli ſtriati, ſebbene queſti pure negli uccelli non abbiano nè la forma eſteriore, nè le ſtrie interiori, che hanno nei quadrupedi, e negli uomini, il vedere da queſti corpi ſcolpito così lontano il terzo ventricolo, e le eminenze quadrigemelle collocate ſul parete interno inferiore dell' acquidotto, in vece d' eſſere come negli uomini e nei quadrupedi ſulla ſommità della colonna midollare centrale poſteriormente, e fuori dell' acquidotto medeſimo ecc. ecc. mi ha fatto ſoſpettare, che la glandula pineale doveſſe pur anco ricercarſi nell' encefalo degli uccelli lontano dal ſito negli uomini, e nei quadrupedi dalla medeſima occupato.

88. E ben mi apposi, mercecchè dopo varie infruttuoſe ricerche ho trovato queſto corpicciuolo preciſamente nel mezzo della parte diretana contigua degli emisferi nella eſtremità poſteriore del ſolco onde gli emisferi ſteſſi ſono diviſi, propio dove principiano i due ſolchi laterali, che ne ſieguono la curvità della porzione diretana, e la faccia anteriore del cervelletto, dove ſcorre il groſſo vaſo, che in queſti animali tiene il luogo della groſſa vena di *Galeno*.

89. La prima fiata, che in tale ſito vidi la glandula pineale aſſai diſtintamente, fu nell' encefalo d' un barbagianni; continuai a cercarvela, ed ivi a trovarla nei galli d' india dov' è groſſa come il cuore d' un ranocchio, al quale per la figura non poco ſi raſſomiglia; nei nibbi sì grandi, che piccioli; negli ſparvieri, dov' è apparentiſſima, e dove l' ho dimoſtrata frequentemente larga, ed alta poco meno di due linee, criſtallina, e riſplendente.

90. D' allora in poi non ho più incontrato veruna difficultà a dimoſtrarla nelle galline, e nelle pernici, nei gufi, nei merlotti, nei corvi, nei froſoni, nei tordi, nelle rondinelle, nei fanelli, nei verzellini, negli uſcignuoli, nelle allodole, e nei reattini, in ſomma in tutti gli uccelli, che notomizzai, e ſempre nell' accennato punto d' unione dei tre ſolchi mentovati, purchè i cerebri ne foſſero ſani, ed in quel ſito non foſſero ſtate maltrattate nè la dura, nè la pia meninge.

(a) Trat. II. §. 28.

91. Nelle oche, e nelle anitre (*a*) ſi dimoſtra nella ſeguente maniera. Segate con delicatezza le oſſa del cranio circolarmente a livello della volta delle orbite, e toltone via il coperchio, laſciando in ſito la *D. M.*, ſi recida queſta membrana con le forbicine a ſeconda del taglio circolare, ſi sollevi, e ſi roveſci ſul cervelletto uniformemente ſpogliandone ad un tratto amendue gli emisferi ſenza lacerarla, e ſenza fare violenza: intanto ſi oſſervi alla parte poſteriore del ſeno longitudinale quel pleſſo di vaſi, che ſta dirimpetto alla faccia anteriore del cervelletto, perchè fra quei vaſi pieni di ſangue trovaſi innicchiata la glandula pineale, cioè un corpo di ſoſtanza cerebrale cinericia, lucido, e benchè polpoſo, non però intieramente privo d' elaſticità.

92. Si continuino a premere co' polpaſtrelli dell' indice, e del dito mezzano della deſtra i due emisferi per vietare, che non s' arrendano alla Dura-madre, che biſogna terminar di rivolgere delicatamente a tergo, e queſta membrana ſi trarrà dietro la glandula pineale intiera, o una porzione principale della medeſima, la quale reſterà appeſa, a foggia del cuore d' un lumacone ignudo, alla piega arcata (Tratt. II. §. 10.) della ſteſſa meninge, nel ſito dove ſi fa la biforcazione (*b*) del ſeno longitudinale.

93. Molte volte però (a tenore della deſtrezza dell' Anatomico, della minore tenacità delle aderenze del pleſſo con la glandula, e della maggiore robuſtezza dei picciuoli, che uniſcono queſta alla commeſſura poſteriore (57)) la glandula reſta nel ſuo ſito naturale; allora vi ſi vede la baſe meno cinericia, e più larga, immerſa fra gli emisferi e il cervelletto, piegata notabilmente al davanti, e la punta appoggiata a quella groſſa vena, che abbiamo già indicata (*c*), ſta rivolta in alto contro la faccia anteriore del cervelletto.

94. Nel barbagianni, nello ſparviere, nel falchetto, ma

(*a*) Nel Vol. VIII. però *Allero* medeſimo non contradice ad alcuni autori, che ammettono la Gl. Pin. in certi volatili. Vedi alla pag. 109. le parole ſeguenti nella Nota *In ſtruthio camelo Pariſini; in aquila Borric. Hermet. Ægypt. ſapient. p. 266. Harder Apiar. p. 67.*

(*b*) Trat. II. §. 22.

(*c*) Trat. II. §. 28.

aſſai meglio nei galli d' india ſi diſcernono due teneri filuzzi pellucidi, che a foggia di due picciuoli ne attaccano la parte poſteriore della baſe, bianchiccia perchè midollare, alla commeſſura poſteriore, uno per lato.

95. Si poſſono vedere affiſſi alla commeſſura medeſima eſaminando queſte parti con attenzione, ancorchè tutta, o in parte ne ſia ſtata ſvelta la glandula nel ſollevare la *D. M.*, ma biſogna a tal fine avere già votati i ventricoli laterali, cioè averne diſtrutto il nocciolo (artic. II.), oſſia tubercolo *Alleriano*, e rivolto al davanti tutto l' appartenente alle appendici poſteriori del corpo calloſo.

96. Quando i due teneri filuzzi mentovati ſono ancora affiſſi alla glandula, ed alla commeſſura poſteriore, ſi trovano (ſerbate le dovute proporzioni) più lunghi di quelli onde queſta glandula nei cerebri umani è attaccata alla commeſſura ſteſſa, ed ai talami (*a*).

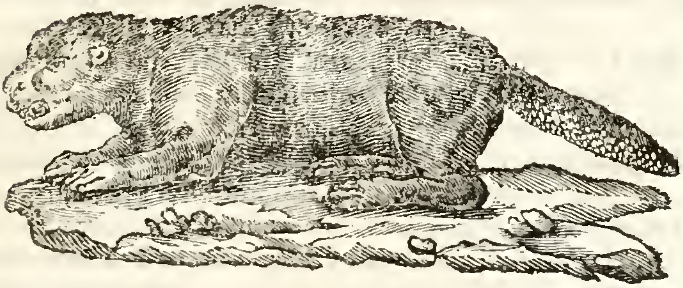
97. Nelle galline (*b*), nei galli d' india, e nel nibbio come nel barbagianni ſtriſciandovi leggiermente ſopra una delle faccie la punta dello ſtecco di penna, d' una ſpilla ecc., vi ſi veggono a ſollevare certe increſpature, o rughe, che ſi poſſono conſiderare come indizj d' un tenue epitelio, che veſte queſta glandula, il quale con la cottura delle teſte ſembra meglio ancora manifeſtarſi, rendendola aſſai meno friabile.

98. Nella crivella, nelle gazze, nei corvi occupa viſibilmente, e tenacemente il luogo additato ed è bislunga, in queſti roſſigna, nelle altre pellucida e cinericia. E per prova della tenacità di tale adeſione ſi notomizzi l' encefalo d' una crivella, o ſmeriglio (uccello non più groſſo d' una pernice) e ſi troverà affiſſa alla commeſſura poſteriore per due filuzzi tanto elaſtici benchè quaſi pellucidi, che potranno ricondurre varie fiate la glanduletta verſo la commeſſura, com' è accaduto coſtantemente a me quando ne la ebbi a bello ſtudio allontanata, e toſto che rallentai la forza, con la quale io ne la teneva diſtante.

(*a*) Encefalot. Parte 2. Cap. 7.

(*b*) Nelle teſte cotte di queſte due ſpecie ſeparando con diligenza gli emiſferi del cervello, e da queſti il cervelletto ognuno a menſa può aſſicurarſi dell' eſiſtenza della Gl. Pin. nel ſito da me indicato.

Tali ſono le oſſervazioni ſtateci laſciate da *Allero* ſul cervello degli uccelli, e tale la ſtruttura, che guidato da quelle io ſono arrivato a trovare più coſtantemente nelle oſſa, nelle meningi, e nel cervello medeſimo, le quali ſottopongo all' acutiſſimo occhio voſtro, come ſottometterò giacchè me lo accordate le mie Ricerche ſul cervelletto di queſta claſſe d' animali, e ſui nervi, ch' eſcono dai crani loro, il riſultato delle quali è forſe più curioſo di quello, che ſono le preſenti. Aggiungerò pure le varietà nelle moltiplici diſſecazioni mie incontrate, non avendo io voluto congiungerle con le coſe coſtanti per non generare confuſione, o rendere le note più voluminoſe del teſto, e premendomi d'altra parte, che ſi adori l' ampia magnificenza, onde l' *Adorabile Creatore* d' ogni coſa ha fregiato l' univerſo, e la varietà mirabile dei mezzi, onde ha ſaputo ottenere i medeſimi fini ad iſtruzione noſtra, e a gloria ſua. Ho l' onore d' eſſere ecc.



TEOREMI

SOPRA LE SERIE INFINITE CONVERGENTI

Formate dai Prodotti de' Numeri diſpari ſucceſſivi diviſi pe' Prodotti de' Numeri pari corriſpondenti

Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie, Pubblico Profeſſore delle Matematiche ſuperiori nella Regia Univerſità di Pavia.

NOn vi ha forſe nella moderna Analiſi parte alcuna, in cui da un ſecolo e mezzo in qua ſiaſi fatto da' Geometri un si gran viaggio, e tante nuove inaſpettate verità ſieno ſtate ſcoperte, quanto in quella, che vien deſtinata ad eſporre la Teoria delle Serie Infinite. Siccome ſino da' primi paſſi, che andò facendo la nuova Analiſi, fu facile ad ognuno di accorgerſi dell' utilità ſomma ed importanza, che dalla dottrina delle ſerie dovea per neceſſità derivare in tutte le Scienze Matematiche; quindi avvenne, che i più gran Geometri rivolſero le loro meditazioni a queſt' intereſſantiſſimo oggetto, e facendo a gara d' inoltrarſi più addentro nella materia portarono tanto avanti le loro ricerche, che a conſiderare l' intervallo percorſo dal principio del cammino ſino al termine, a cui ſono in oggi pervenuti, e avuto riguardo al lento progreſſo delle altre cognizioni in quel periodo di tempo, ſi crederebbe ſenza pena, che non uno o due ſecoli, ma ben venti e trenta foſſero traſcorſi. A ſoſtenere l' indefeſſo ſtudio de' Geometri in queſta ſpecial parte di analiſi a preferenza delle altre contribuì, non ha dubbio, più che ogn' altro motivo l' idea che toſto ſi concepì de' vantaggi grandiſſimi e delle prezioſe ricchezze, che queſto nuovo campo fin ne' primi tentativi parve largamente promettere a' ſuoi coltivatori. In fatti potendoſi opportunamente introdurre le ſerie in un' infinità di ricerche, le più delicate e profonde, e preſentandoſi elleno dappertutto anche quando meno ſi preveggono; ſe ſi giugneſſe a tanto di poter aſſegnare la ſomma di ciaſcheduna, tutto ſi ſarebbe ſatto nelle Matematiche, e qualunque arduo intrattabil Problema ſarebbe ſciolto compiutamente. Ma con tutti i progreſſi già fatti ſiamo ancora tanto lontani da queſt' ultima meta, che l' immenſa diſtanza, che ci ſepara, non ſembra ſperabile dover mai eſſere interamente ſormontata. Nelle ſerie ſteſſe numeriche, che con più ſucceſſo delle altre ſonoſi coltivate, in mezzo all' ampia e doviziosa raccolta di nuove fecondiſſime verità ſcoperte nelle ſerie de' numeri *figurati*, de' *poligoni*, delle potenze dirette ed inverſe de' numeri naturali, ecc. è tuttavia tale e tanta la farraggine delle coſe, che ancor reſtano nell' oſcurità, che baſterebbe queſto ſolo argomento, quando tutti gli altri mancaſſero, per convincerſi della povertà e delle anguſtie dell' ingegno umano.

Siccome pertanto infinite ſerie numeriche ſi poſſono comporre moltiplicando per ogni termine un certo aggregato di numeri diſpari ſucceſſivi, e dividendo il riſultato pel prodotto de' numeri pari corriſpondenti, o viceverſa dividendo queſto per quello, ed intorno a tali ſerie poco o nulla ſi è ſcoperto ſino al preſente, e poco altro ſi conoſce oltre il famoſo Teorema di *wallis* per eſprimere il rapporto della circonferenza circolare al diametro; non ſarà inutile l' eſporre qui alcuni curioſi e nuovi Teoremi riſguardanti la ſomma delle predette ſerie: dico nuovi Teoremi, perchè dai due primi in fuori, che per eſſere di facile dimoſtrazione debbono eſſer già conoſciuti, non mi è paleſe, che gli altri ſi trovino prima d' ora pubblicati. Queſti Teoremi a me ſi ſono preſentati mercè di alcuni particolari artifizj di Calcolo Integrale, artifizj talvolta aſſai fini e complicati per dover creder probabile l' eſiſtenza d' una via più corta e ſpedita, che la da me tenuta, per dimoſtrare alcuni di eſſi.

Le ſomme, che io aſſegno alle ſerie da me trattate, ſono di tre ſorti, altre cioè aſſolutamente infinite, altre traſcendenti, altre algebraiche e ſempliciſſime.

TEOREMA I.

La ſerie $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} +$ ecc. *in inf.* è uguale all' unità.

TEOREMA II.

La ſerie $\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} +$ ecc. *in inf.* ha un valore infinito.

TEOREMA III.

La ſerie $\frac{1^2}{2^2} + \frac{1.3^2}{2.4^2} + \frac{1.3.5^2}{2.4.6^2} + \frac{1.3.5.7^2}{2.4.6.8^2} + \frac{1.3.5.7.9^2}{2.4.6.8.10^2} +$ ecc. *in inf.* ha parimente un valore infinito.

SCOLIO.

Nel Teorema XVII. ſi dimoſtrerà, che queſta ſerie conſerva il ſuo valore infinito quand' anche i due ultimi fattori di tutti i numeratori e denominatori ſieno elevati al quadrato; e lo ſteſſo potrà dimoſtrarſi, quando i tre ultimi, i quattro ultimi, ecc. e generalmente qualunque numero finito di fattori ultimi nel numeratore, e denominatore di ciaſcun termine della ſerie ſi trovi alzato al quadrato. Che ſe tutti i fattori de' termini della ſerie vengono elevati al quadrato, la ſomma ritiene tuttavia un valore infinito, ma d' un' indole però affatto ſingolare, qual è l' infinito logaritmico. Ecco pertanto il ſeguente

TEOREMA IV.

La ſerie $\frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2} +$ ecc. *in inf.* ha un valore infinito, ma logaritmico.

TEOREMA

TEOREMA V.

Il quadrante inverſo della periferia del cerchio deſcritto col raggio 1, cioè $\frac{2}{\pi}$ è uguale alla ſerie infinita

$$1-\frac{1}{2^2}-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2}-\text{ecc.}$$

in inf.

SCOLIO.

La famoſa ſerie Walliſiana, la quale ſuole dimoſtrarſi mediante un lungo giro di calcoli complicati, diventa un' immediata conſeguenza di queſto Teorema. Imperciocchè ſommando ſucceſſivamente i termini della ſerie, ſi ottiene di mano in mano

1.°

$$1^2-\frac{1^2}{2^2}=\frac{1^2\cdot 3}{2^2}.$$

2.°

$$\frac{1^2\cdot 3}{2^2}-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}=\frac{1^2\cdot 3\,(4^2-1^2)}{2^2\cdot 4^2}=\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2}.$$

3.°

$$\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}=\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5\,(6^2-1^2)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}=\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}.$$

4.°

$$\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}=\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\,(8^2-1^2)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}=\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}.$$

5.°

$$\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2} = \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9(10^2 - 1^2)}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}$$

$$= \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2.11}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}.$$

6.° ecc.

Quindi apertamente ſi ſcorge eſſere il quadrante inverſo $\frac{2}{\pi} = \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2.11^2.13^2.15^2.17.\text{ecc.}}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2.12^2.14^2.16^2.\text{ecc.}}$ che è appunto la ſerie Walliſiana formata d' un ſolo termine contenente il prodotto de' quadrati di tutti i numeri diſpari diviſo pel prodotto de' quadrati di tutti i numeri pari.

TEOREMA VI.

Il quadrante inverſo $\frac{2}{\pi}$ della circonferenza del cerchio deſcritto col raggio 1 è parimente uguale alla ſerie infinita

$$\frac{1}{2} + \frac{1^2}{2^2.4} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2.6} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10}$$

$$+ \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2.12} + \text{ecc.}$$

TEOREMA VII.

Lo ſteſſo quadrante inverſo $\frac{2}{\pi}$ è uguale alla ſerie infinita

$$3\left(\frac{1}{2.4} + \frac{1^2.3}{2^2.4.6} + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6.8} + \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8.10}\right.$$

$$\left. + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10.12} + \text{ecc.}\right),$$ di cui è chiara la legge.

TEOREMA VIII.

Lo ſteſſo quadrante inverſo $\frac{2}{\pi}$ è parimente eguale alla ſerie infinita, della quale è pur manifeſta la legge,

$$5\left(\frac{1.3}{2.4.6}+\frac{1^2.3.5}{2^2.4.6.8}+\frac{1^2.3^2.5.7}{2^2.4^2.6.8.10}+\frac{1^2.3^2.5^2.7.9}{2^2.4^2.6^2.8.10.12}+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9.11}{2^2.4^2.6^2.8^2.10.12.14}+\text{ecc.}\right).$$

TEOREMA IX.

Il predetto quadrante inverſo $\frac{2}{\pi}$ è uguale a queſt' altra ſerie di legge pur manifeſta

$$7\left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8}+\frac{1^2.3.5.7}{2^2.4.6.8.10}+\frac{1^2.3^2.5.7.9}{2^2.4^2.6.8.10.12}+\frac{1^2.3^2.5^2.7.9.11}{2^2.4^2.6^2.8.10.12.14}+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9.11.13}{2^2.4^2.6^2.8^2.10.12.14.16}+\text{ecc.}\right).$$

TEOREMA X

In generale, ſe n eſprime qualſivoglia numero diſpari, il quadrante inverſo $\frac{2}{\pi}$ è uguale ad n moltiplicato per la ſerie infinita, la quale ha le ſeguenti proprietà: 1.° ogni ſuo termine frazionario ha per numeratore il prodotto dei numeri diſpari ſucceſſivi, i quali arrivano ſino al diſpari n eſcluſivamente nel primo termine, e ne' termini ſuſſeguenti creſcono ſempre di uno di più ſopra il precedente: 2.° queſti fattori diſpari ſono elevati al quadrato a riſerva degli ultimi in numero di $\frac{n-1}{2}$ in ciaſcun termine: 3.° il denominatore di ogni termine contiene il prodotto dei numeri pari ſucceſſivi, i quali arrivano nel primo termine ſino al pari $n+1$ incluſivamente, e ne' termini ſuſſeguenti creſcono ſempre di un fattore di più ſopra il termine precedente: 4.° queſti numeri pari ſono elevati al quadrato ad eccezione degli ultimi in numero di $\frac{n+1}{2}$ in ciaſcun termine.

TEOREMA XI.

Il quadrante inverſo $\frac{2}{\pi}$ è nuovamente uguale alla ſerie infinita

$$3\left(\frac{1}{2}-\frac{1\cdot3}{2^2.4}-\frac{1^2\cdot3\cdot5}{2^2.4^2.6}-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5\cdot7}{2^2.4^2.6^2.8}-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\cdot9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10}\right.$$

$$\left.-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2 7^2\cdot9\cdot11}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2.12}-\text{ecc.}\right)$$

TEOREMA XII.

Il quadrante inverſo $\frac{2}{\pi}$ è uguale alla ſerie infinita

$$5\left(\frac{1\cdot3}{2.4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^2.4.6}-\frac{1^2\cdot3\cdot5\cdot7}{2^2.4^2.6.8}-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot9}{2^2.4^2.6^2.8.10}\right.$$

$$\left.-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\cdot9\cdot11}{2^2.4^2.6^2.8^2.10.12}-\text{ecc.}\right)$$

TEOREMA XIII.

Il quadrante inverſo $\frac{2}{\pi}$ viene eſpreſſo dalla ſerie infinita

$$7\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2.4.6}-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2^2.4.6.8}-\frac{1^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2^2.4^2.6.8.10}-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2^2.4^2.6^2.8.10.12}\right.$$

$$\left.-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\cdot9\cdot11.13}{2^2.4^2.6^2.10.12.14}-\text{ecc.}\right)$$

TEOREMA XIV.

Se in generale n rappreſenta qualunque numero diſpari, il quadrante inverſo $\frac{2}{\pi}$ viene eſpreſſo dal prodotto di n moltiplicato per una ſerie infinita di termini frazionarj, tutti negativi a riſerva del primo, la qual ſerie procede con queſta legge: 1.° il numeratore di ciaſcun termine è il prodotto dei numeri diſpari ſucceſſivi, i quali nel primo termine giungono ſino al diſpari n eſcluſivamente, ed ogni termine ſuſſeguente acquiſta un fattore di più ſopra il termine antecedente: 2.° queſti fattori diſpari ſono elevati alla ſeconda potenza a riſerva delli $\frac{n+1}{2}$ ultimi in ciaſcun termine: 3.° il denominatore di ciaſcun termine della ſerie è il prodotto de' numeri pari ſucceſſivi, l' ultimo de' quali nel primo termine è $n - 1$, ed ogni termine ſuſſeguente della ſerie acquiſta un fattore di più che il precedente: 4.° tali numeri pari aſcendono alla ſeconda potenza ad eccezione delli $\frac{n-1}{2}$ ultimi in ciaſcun termine.

TEOREMA XV.

Il logaritmo iperbolico del numero 2 è uguale alla ſerie infinita di nota legge $\frac{1}{2^2} + \frac{1.3}{2.4^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8^2} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4,6.8.10^2} + \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12^2} + \text{ecc.}$

TEOREMA XVI.

Il logaritmo iperbolico del numero 2 è parimente uguale alla ſerie infinita, di cui è pure viſibile la legge

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1.3^2}{2^2.4^2} + \frac{1.3.5^2}{2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5.7^2}{2.4.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7.9^2}{2.4.6.8^2.10^2}\right.$$

$+ \frac{1.3.5.7.9.11^2}{2.4.6.8.10^2.12^2} +$ ecc.$)$

TEOREMA XVII.

Il valore della ſerie di manifeſta legge
$\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} + \frac{1.3^2.5^2}{2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5^2.7^2}{2.4.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7^2.9^2}{2.4.6.8^2.10^2}$
$+ \frac{1.3.5.7.9^2.11^2}{2.4.6.8.10^2.12^2} +$ ecc. *in inf.* è infinito.

TEOREMA XVIII.

La ſerie di nota legge
$\frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5^2.7^2}{2.4^2.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7^2.9^2}{2.4.6^2.8^2.10^2} + \frac{1.3.5.7.9^2.11^2}{2.4.6.8^2.10^2.12^2}$
$+ \frac{1.3.5.7.9.11^2.13^2}{2.4.6.8.10^2.12^2.14^2} +$ ecc. *in inf.* ha per ſomma
$\frac{41}{64}\log. 2 - \frac{1}{128}$.

TEOREMA XIX.

La ſerie $\frac{1.3}{2^2.4^2} + \frac{1.3.5}{2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8^2.10^2} +$ ecc. *in inf.* dove i due ultimi fattori di ogni denominatore ſono elevati al quadrato, ha per ſomma $\frac{1}{4}(1 - \log. 2)$.

TEOREMA XX.

La ſerie $\frac{1.3.5}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4^2.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6^2.8^2.10^2}$
$+ \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8^2.10^2.12^2} + \frac{1.3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10^2.12^2.14^2} +$ ecc. *in inf.*, nella quale i tre ultimi fattori di ciaſcun denominatore ſono ele-

vati alla ſeconda potenza, ha per ſomma $\frac{3}{64}\left(\log. 2 - \frac{1}{2}\right)$.

TEOREMA XXI.

La ſomma della ſerie $\frac{1.3.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5.7^2}{2.4^2.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7.9^2}{2.4.6^2.8^2.10^2} + \frac{1.3.5.7.9.11^2}{2.4.6.8^2.10^2.12^2} +$ ecc., nella quale i tre ultimi fattori di ciaſcun denominatore, e l' ultimo di ciaſcun numeratore ſi trovano alzati al quadrato, ha per valore $\frac{17}{128} - \frac{7}{64}\log. 2$.

TEOREMA XXII.

La ſerie $1 - \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} - \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} - \frac{1}{9.11} -$ ecc. *in inf.* ha la ſua ſomma $= \frac{1}{2}$.

TEOREMA XXIII.

La ſomma della ſerie $\frac{2}{1.3} - \frac{4}{1.3.5} - \frac{6}{3.5.7} - \frac{8}{5.7.9} - \frac{10}{7.9.11} - \frac{12}{9.11.13} - \frac{14}{11.13.15} -$ ecc., di cui è manifeſto l' andamento, è $= \frac{1}{4}$.

TEOREMA XXIV.

La ſerie $\frac{2.4}{1.3.5} - \frac{4.6}{1.3.5.7} - \frac{6.8}{3.5.7.9} - \frac{8.10}{5.7.9.11} - \frac{10.12}{7.9.11.13} - \frac{12.14}{9.11.13.15} -$ ecc. ha per ſomma $\frac{1}{6}$.

TEOREMA XXV.

La ſomma della ſerie $\frac{2.4.6}{1.3.5.7} - \frac{4.6.8}{1.3.5.7.9} - \frac{6.8.10}{3.5.7.9.11} - \frac{8.10.12}{5.7.9.11.13} - \frac{10.12.14}{7.9.11.13.15} - \frac{12.14.16}{9.11.13.15.17} -$ ecc., di cui è paleſe la legge, è $= \frac{1}{8}$.

TEOREMA XXVI.

La ſerie $\frac{2.4.6.8}{1.3.5.7.9} - \frac{4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11} - \frac{6.8.10.12}{3.5.7.9.11.13} - \frac{8.10.12.14}{5.7.9.11.13.15} - \frac{10.12.14.16}{7.9.11.13.15.17} - \frac{12.14.16.18}{9.11.13.15.17.19} -$ ecc. di manifeſta legge ha per ſomma $\frac{1}{10}$.

TEOREMA XXVII.

La ſerie $\frac{2.4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11} - \frac{4.6.8.10.12}{1.3.5.7.9.11.13} - \frac{6.8.10.12.14}{3.5.7.9.11.13.15} - \frac{8.10.12.14.16}{5.7.9.11.13.15.17} - \frac{10.12.14.16.18}{7.9.11.13.15.17.19} -$ ecc. di evidente andamento ha per ſomma $\frac{1}{12}$.

TEOREMA XXVIII.

La ſomma della ſerie $\frac{2.4.6.8.10.12}{1.3.5.7.9.11.13} - \frac{4.6.8.10.12.14}{1.3.5.7.9.11.13.15} - \frac{6.8.10.12.14.16}{3.5.7.9.11.13.15.17} - \frac{8.10.12.14.16.18}{5.7.9.11.13.15.17.19}$

— 10.12

$-\frac{10.12.14.16.18.20}{7.9.12.13.15.17.19.21}$ — ecc. di legge manifeſta è $=\frac{1}{14}$.

TEOREMA XXIX.

Eſſendo n qualunque numero intero, la frazione $\frac{1}{2n}$ è uguale alla ſomma della ſerie che ha tutti i termini negativi a riſerva del primo, ed è dotata delle ſeguenti proprietà: 1.° Il numeratore del primo termine è il prodotto de' numeri pari ſucceſſivi continuati ſino al pari $(2n-2)$ incluſivamente: 2.° il numeratore di ogni termine ſuſſeguente è il numeratore precedente ſminuito del ſuo primo fattore, e aumentato del fattore ſucceſſivo all' ultimo: 3.° il denominatore così del primo come del ſecondo termine è il prodotto de' numeri diſpari ſucceſſivi continuati ſino a $(2n-1)$ incluſivamente nel primo termine, e ſino a $(2n+1)$ incluſivamente nel ſecondo termine: 4.° il denominatore di ogni altro termine ſuſſeguente è lo ſteſſo che il denominatore antecedente, a cui manca il primo fattore, e creſce il fattore conſecutivo all' ultimo.

TEOREMA XXX.

La ſerie $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\frac{1}{9.11}+\frac{1}{11.13}+$ ecc. *in inf.* ha la ſua ſomma $=\frac{1}{2}$.

SCOLIO.

Queſto Teorema non differiſce dal Teorema XXII., ma non doveva qui ometterſi, perchè forma il primo anello della catena ſeguente.

TEOREMA XXXI.

La ſomma della ſerie $\frac{2}{1.3.5}+\frac{4}{3.5.7}+\frac{6}{5.7.9}+\frac{8}{7.9.11}$

$+\frac{10}{9\cdot11\cdot13}+\frac{12}{11\cdot13\cdot15}+$ ecc. non è altro che $\frac{1}{4}$.

TEOREMA XXXII.

La ſerie $\frac{2\cdot4}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{4\cdot6}{3\cdot5\cdot7\cdot9}+\frac{6\cdot8}{5\cdot7\cdot9\cdot11}+\frac{8\cdot10}{7\cdot9\cdot11\cdot13}+\frac{10\cdot12}{9\cdot11\cdot13\cdot15}+$ ecc. ha per ſomma $\frac{1}{6}$.

TEOREMA XXXIII.

La ſomma della ſerie $\frac{2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}+\frac{4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}+\frac{6\cdot8\cdot10}{5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13}+\frac{8\cdot10\cdot12}{7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15}+\frac{10\cdot12\cdot14}{9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17}+$ ecc., il di cui andamento è evidente, è $=\frac{1}{8}$.

TEOREMA XXXIV.

La ſerie $\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}+\frac{4\cdot6\cdot8\cdot10}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13}+\frac{6\cdot8\cdot10\cdot12}{5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15}+\frac{8\cdot10\cdot12\cdot14}{7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17}+$ ecc. ha per ſomma $\frac{1}{10}$.

TEOREMA XXXV,

La ſomma della ſerie $\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13}+\frac{4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15}$
$+\frac{6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14}{5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17}+\frac{8\cdot10\cdot12\cdot14\cdot16}{7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdot19}$
$+\frac{10\cdot12\cdot14\cdot16\cdot18}{9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdot19\cdot21}+$ ecc. è $=\frac{1}{12}$.

TEOREMA XXXVI.

La ſomma della ſerie $\frac{2.4.6.8.10.12}{1.3.5.7.9.11.13.15}$ $+\frac{4.6.8.10.12.14}{3.5.7.9.11.13.15.17}+\frac{6.8.10.12.14.16}{5.7.9.11.13.15.17.19}$ $+\frac{8.10.12.14.16.18}{7.9.11.13.15.17.19.21}+\frac{10.12.14.16.18.20}{9.11.13.15.17.19.21.23}+$ ecc. ha per valore $\frac{1}{14}$.

TEOREMA XXXVII.

Preſo per n qualunque numero intero, la frazione $\frac{1}{2n}$ è uguale alla ſomma della ſerie continuata in infinito, e compoſta di termini tutti poſitivi e frazionarj, e regolati dalle ſeguenti leggi: 1.° il numeratore del primo termine è il prodotto de' numeri pari ſucceſſivi continuati ſino a $(2n-2)$ incluſivamente: 2.° il numeratore di ciaſcun termine ſuſſeguente è lo ſteſſo che il numeratore precedente ſminuito del primo fattore, ed accreſciuto del fattore conſecutivo all' ultimo: 3.° il denominatore del primo termine è il prodotto de' numeri diſpari ſucceſſivi continuati ſino a $(2n+1)$ incluſivamente: 4.° il denominatore di qualunque termine ſuſſeguente è il prodotto dei fattori del denominatore antecedente incominciando dal fattor ſecondo, e terminando nel fattore conſecutivo all' ultimo.

SI AVVERTONO I LIBRAJ

Che il paſſaggio dalla pag. 187 *alla pag.* 220 *è errore tipografico, perchè non ſia creduto difettivo il volume.*

SOPRA L' INTEGRAZIONE DELLA FORMULA

$$Qdx + Py^2dx \pm dy = 0$$

MEMORIA

Del Sig. Cavaliere Lorgna.

L' Equazione enunziata nel titolo di queſta Memoria occupa un luogo nel Calcolo integrale sì diſtinto per sè non meno che per la celebrità della formula

$$ax^m dx + bx^n y^2 dx - dy = 0$$

che le appartiene, detta *Riccaziana* dall' inventore primo di onorata e ſempre illuſtre memoria Co. *Jacopo Riccati*, che ho creduto ſtudio non infruttuoſo il promuoverne l'integrazione al ſegno che ho potuto più lontano. Se mi ſia toccato in ſorte di fare qualche avanzamento in queſta indagine, il conoſcano e giudichino i Geometri che vorranno concederle nel riandarla qualche momento delle loro applicazioni.

I.

Ridurre l' equazione differenzio-differenziale (A)

$$(A) \ldots . ddt + Qtdx^2 = 0$$

in cui dx è coſtante, Q ſunzione di x, al primo grado.

Si faccia $(\mu) \ldots dt = tydx + udx$, ove y, u ſon due variabili aſſunte, e ſoſtituendo per ddt il valore $y^2tdx^2 + yudx^2 + tdxdy + dudx$, ſi avrà

$$t + \frac{1}{Q}\left(y^2t + yu + \frac{tdy}{dx} + \frac{du}{dx}\right) = 0$$

di cui formando due equazioni, come due ſono le variabili introdotte, avremo le due equazioni di primo grado (B), (C)

$$(B) \ldots \, 0 = dy + y^2 dx + Q dx$$

$$(C) \ldots \, 0 = y u dx + du$$

da cui dipenderà l' equazione propoſta (A). Il che ecc.

II.

Dato un valore ſoddisfacente all' equazione (B)

$$(B) \ldots \, 0 = dy + y^2 dx + Q dx$$

integrare l' equazione (A)

$$(A) \ldots \, 0 = ddt + Q t dx^2$$

Sia $y = \Delta$ un tal valore ſoddisfacente. Il ſi ſoſtituiſca nell' equazione (C) (§. I.), e s' integri. Sarà $u = Ce^{-\int \Delta dx}$, eſſendo C la coſtante arbitraria, ed e il numero di cui l' unità è il logaritmo iperbolico. Ripreſa poſcia la relazione (μ) (§. I.), vi ſi ponga Δ per y, $Ce^{-\int \Delta dx}$ per u, e s' integri. Riſulterà $t = e^{\int \Delta dx}\left(C' + C \int dx e^{-2\int \Delta dx}\right)$ integrale completo dell' equazione (A). Il che ecc.

III.

Dato il valore particolare Δ ſoddisfacente all' equazione (B)

$$(B) \ldots \, 0 = dy + y^2 dx + Q dx$$

trovare l' integrale completo dell' equazione (B)

Si faccia $y = \frac{dt}{tdx}$; ſarà $y^2 = \frac{dt^2}{t^2 dx^2}$, $dy = \frac{tdxddt - dt^2 dx}{t^2 dx^2}$, poſto dx coſtante. Soſtituendo pertanto queſti valori in (B), riavremo l' equazione $(A) \ldots \, ddt + Q t dx^2 = 0$.

Sia poi $y = \omega$ l' integrale completo dell' equazione (B), che ſi cerca. Riprendendo l' equazione di relazione

$y = \frac{dt}{tdx}$, vi ſi ſoſtituiſca per y il valor generale ω sì che ſia $\frac{dt}{t} = \omega dx$, e s' integri. Sarà $t = Ae^{\int \omega dx}$, integrale completo dell' equazione (A), giacchè ω dee comprendere una coſtante arbitraria. Ma s' è trovato (§. II.) eſſere

$$t = e^{\int \Delta dx}\left(C' + C\int dx e^{-2\int \Delta dx}\right)$$

integrale completo della medeſima equazione (A), ſe ſia Δ valor ſoddisfacente all' equazione (B). Dunque neceſſariamente dovrà eſſere

$$Ae^{\int \omega dx} = C' e^{\int \Delta dx} + C e^{\int \Delta dx}\int dx\, e^{-2\int \Delta dx}, \text{ cioè}$$

$$A = C' e^{\int (\Delta - \omega) dx} + C e^{\int (\Delta - \omega) dx}\int dx\, e^{-2\int \Delta dx}$$

e però differenziando, dividendo l' equazione differenziale per $dx \,.\, e^{\int (\Delta - \omega) dx}$, e facendo $\frac{C'}{C} = B$, ſi troverà eſſere

$$(*) \ldots . y = \omega = \Delta + \frac{e^{-2\int \Delta dx}}{B + \int dx\, e^{-2\int \Delta dx}}$$

l' integrale completo dell' equazione (B). Il che ecc.

IV.

Se ha luogo la relazione (1), eſſendo M qualunque funzione di x, o di y, o di entrambe, ſi verifica pure l' equazione differenziale (2)

$$(1) \ldots . x^2 y^2 = M$$

$$(2) \ldots . \pm dy\sqrt{M} + y^2 dx - \frac{dM}{2x} = 0$$

Imperciocchè, differenziando l' equazione (1), ſi ottiene l' equazione $2xy^2dx + 2yx^2dy - dM = 0$, la quale ſi trasforma nell' equazione $2xy(xdy + ydx) - dM = 0$, cioè nella ſeguente (3)

$$(3) \ldots . xydy + y^2dx - \frac{dM}{2x} = 0$$

Ma l' equazione (1) ſomminiſtra $xy = \pm \sqrt{M}$. Soſtituendo pertanto queſto valore nell' equazione (3), ſi verifica l' equazione (2). Il che ecc.

V.

E' dunque $y = \pm \frac{1}{x} \sqrt{M}$ un doppio valore ſoddisfacente all' equazione (2) per l' ambiguità de' ſegni.

VI.

Pertanto ſe ſia $M = y^p$, e però abbia luogo la relazione $(4) \ldots y = x^{2:(p-2)}$, ſi verificherà l' equazione (5)

$$(5) \ldots - \frac{p}{p-2} x^{(4-p):(p-2)} dx + x^{-p:(p-2)} y^2 dx \pm dy = 0$$

Imperciocchè in queſta ſuppoſizione l' equazione (2) del §. IV. prende la forma (6)

$$(6) \ldots \pm 2y^{p:2} dy + 2y^2 dx - p y^{p-1} x^{-1} dy = 0$$

Dunque ſoſtituendo per $y^{p:2}$ nel primo membro, e per $y^{p-1} dy$ nel terzo il reſpettivo valore in x dall'equazione (4) ſi avrà l' equazione

$$\pm 2x^{p:(p-2)} dy + 2y^2 dx - \frac{2p}{p-2} x^{4:(p-2)} dx = 0$$

la quale diviſa per $2x^{p:(p-2)}$ ſomminiſtrerà l' equazione (5). Il che ecc.

VII.

Se dunque ha valor finito ſoddisfacente l' equazione (5) l' avrà pure la forma generale (7)

$$(7) \ldots n x^m dx + x^n y^2 dx \pm dy = 0$$

allorchè ſia $m + n + 2 = 0$. Giacchè, poſto $\frac{4-p}{p-2} = m$, $- \frac{p}{p-2} = n$, ſi avrà dalla prima relazione $p = \frac{4+2m}{m+1}$, e dalla ſeconda $p = \frac{2n}{n+1}$. Dunque $\frac{4+2m}{m+1} = \frac{2n}{n+1}$, e però $m+n+2=0$. Se dunque ecc.

VIII.

Integrare generalmente l' equazione (5)

$$(5) \ldots - \frac{p}{p-2} x^{(4-p):(p-2)} dx + x^{-p:(p-2)} y^2 dx \pm dy = 0$$

Si faccia $x = z^{-(p-2):2}$, ſarà $dx = -\frac{p-2}{2} z^{-p:2} dz$, e l'equazione (5) ſi trasformerà nell' equazione (8)

$$(8) \ldots \frac{p}{2} z^{-2} dz - \frac{p-2}{2} y^2 dz \pm dy = 0$$

A queſta equazione pertanto ſoddisfa il valor particolare $y = \pm z^{-1}$ ricavato dal ſoſtituire nella relazione $y = \pm x^{2:(p-2)}$ ſoddisfacente all' equazione (5) (§. VI.) il valore di x in z, in cui corriſponde il ſegno ſuperiore o inferiore al ſegno ond' è affetto l' ultimo termine dell' equazione. Poſto ciò, ſi faccia $y = -\frac{2u}{p-2}$, e l' equazione (8) ſi convertirà nell' equazione (9)

$$(9) \ldots \frac{p}{4} (2-p) z^{-2} dz + u^2 dz \pm du = 0$$

che ha l' iſteſſa forma dell' equazione (*B*) del §. III. , e a cui ſoddisfa il valore particolare $u = \pm \frac{2z^{-1}}{2-p}$. Si ripigli pertanto l' integrale generale di quella (*) e vi ſi ſoſtituiſca per Δ il valore $\pm \frac{2z^{-1}}{2-p}$. Sarà l' equazione (10)

$$(10) \ldots u = \mp \frac{2z^{-1}}{p-2} \pm \frac{(p+2) z^{4:(p-2)}}{B(p+2) \pm (p-2) z^{(p+2):(p-2)}}$$

l' integrale completo dell' equazione (9) . E perciò rimettendo il valore di u in y, e il valore di z in x, ſarà l' equazione (*D*)

(*D*) . . . .

$$(D)\ldots\ldots y = \pm\frac{4x^{2:(p-2)}}{(p-2)^2} \mp \frac{2(p+2)x^{-8:(p-2)^2}}{B(p^2-4)\pm(p-2)^2x^{-2(p+2):(p-2)^2}}$$

l' integrale completo dell' equazione (5). Il che ecc.

IX.

Baſterà dunque porre nell' equazione (D) $\frac{2n}{n+1}$, oppure $\frac{4+2m}{m+1}$ in luogo di p, e ſi otterrà l' integrale generale dell' equazione del §. VII.

$$nx^{-n-2}dx + x^ny^2dx \pm dy = 0$$

oppure dell' equazione

$$-(m+2)x^mdx + x^{-m-2}y^2dx \pm dy = 0$$

X.

Pertanto l' equazione

$$(11)\ldots\ldots Ax^{-2}dx + By^2dx \pm dy = 0$$

avrà integrale completo, qualunque quantità coſtante ſieno A e B. Imperciocchè, fatto $y = u : B$, l' equazione prende la forma canonica

$$(12)\ldots\ldots ABx^{-2}dx + u^2dx \pm du = 0$$

però col porre $1 \pm \sqrt{(1-4AB)}$ in luogo di p nell' equazione (10) ſi ottiene l' integrale dell' equazione (12), e in conſeguenza quello pure dell' equazione (11) manifeſtamente.

XI.

Sia $M = -\frac{ax^2}{b}$; l' equazione fondamentale (2) del §. IV. prende la forma (13)

$$(13)\ldots\ldots x^{-1}dx\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)} + x^{-1}y^2dx\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)} \pm dy = 0$$

di cui ſarà integrale ſoddisfacente $y = \pm\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)}$. Poſto ciò, inoltriamoci a trovare di queſta equazione l' integrale completo.

Poichè $\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)} = \frac{a}{\sqrt{(-ab)}}$, $\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)} = \frac{b}{\sqrt{(-ab)}}$, ſi faccia $dz = \frac{x^{-1}dx}{\sqrt{(-ab)}}$. Avremo l' equazione

$$adz + by^2dz \pm dy = 0$$

la quale prende la ſorma canonica (B) del §. III. col porre $y = \frac{u}{b}$, nel qual caſo ella diventa l' equazione (14)

$$(14) \ldots\ldots Adz + u^2dz \pm du = 0$$

eſſendo $A = ab$. A queſta ſoddisfa il valore $u = \pm\sqrt{-A}$, e però ripigliando l'equazione integrale (*) dal §. III., poichè $\Delta = \pm\sqrt{-A}$, ſarà la forma

$$u = \pm\sqrt{-A} + \frac{\mp 2e^{\mp 2z\sqrt{-A}}\sqrt{-A}}{\mp 2B\sqrt{-A} + e^{\mp 2z\sqrt{-A}}} = \frac{\mp\sqrt{-A} + 2ABe^{2z\sqrt{-A}}}{\mp 2Be^{2z\sqrt{-A}}\sqrt{-A} + 1}$$

l' integrale generale dell' equazione (14). Se dunque ſi rimettano i valori di u, z in y, x, ſi avrà l' integrale ricercato dell' equazione (13) di queſta forma

$$y = \frac{\mp\sqrt{-a:b} + 2aBx^2}{\mp 2Bx^2\sqrt{-ab} + 1}$$

Il che ecc.

XII.

Con queſto metodo troveremo pure l' integrale completo dell' equazione

$$-\frac{dx}{\sqrt{(x^2+c^2)}} + \frac{y^2dx}{\sqrt{(x^2+c^2)}} \pm dy = 0$$

procedente dalla ſuppoſizione di $M = x^2 + c^2$. Imperciocchè, poſto $\frac{dx}{\sqrt{(x^2+c^2)}} = dz$, avremo immediatamente

$$-dz+y^2dz\pm dy=0$$

cui ſoddisfa $y=1$, ed è della forma dimandata per l' integrazione (§. III.).

XIII.

L' equazione $Adz+u^2dz\pm du=0$, cioè $dz=\mp\frac{du}{A+u^2}$, cui abbiamo integrato al §. XI. è per sè importantiſſima, e merita bene, che ſi faccia riſcontro del ſuo integrale col valore d' altronde noto che ne riſulta di un arco circolare per la tangente, allorchè ſia A quantità poſitiva. Eſſendo pertanto l' integrale trovato

$$u=\frac{\mp\sqrt{-A}+2ABe^{\pm 2z\sqrt{-A}}}{\mp 2Be^{\pm 2z\sqrt{-A}}\sqrt{-A}+1}$$

Sarà facile lo ſvolgere anche il valore dell' arco circolare z in ſunzione finita della tangente u. In fatti ſi troverà eſſere, moltiplicando ſotto e ſopra per $\sqrt{-1}$,

$$e^{\pm 2z\sqrt{-A}}=\frac{\mp\sqrt{-A}-u}{\mp 2uB\sqrt{-A}-2AB}=\frac{\pm\sqrt{A}-u\sqrt{-1}}{\pm 2Bu\sqrt{A}-2AB\sqrt{-1}}$$

e però $z=\frac{1}{\pm 2\sqrt{A}\sqrt{-1}}\,l.\,\frac{\pm\sqrt{A}-u\sqrt{-1}}{\pm 2Bu\sqrt{A}-2AB\sqrt{-1}}$.

Ma nel caſo di $z=0$ è pure $u=0$. Dunque, poſto nell' equazione $z=0$, $u=0$, ſi trova eſſere la coſtante $B=\frac{\pm\sqrt{-1}}{2\sqrt{A}}$. Soſtituendo pertanto queſto valore per B, ſarà

$$\text{Arc. } z=\pm\frac{1}{2\sqrt{A}\sqrt{-1}}\,l.\,\frac{\pm\sqrt{A}-\sqrt{-1}\ \text{tang. } u}{\pm\sqrt{A}+\sqrt{-1}\ \text{tang. } u}$$

Se dunque ſia $A=1$, ed abbia luogo il ſegno negativo, ſarà

$$\text{Arc.}\, z = -\frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l.\, \frac{-1-\sqrt{-1}\ \text{tang.}\, u}{-1+\sqrt{-1}\ \text{tang.}\, u}, \text{ cioè}$$

$$\text{Arc.}\, z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l.\, \frac{1+\sqrt{-1}\ \text{tang.}\, u}{1-\sqrt{-1}\ \text{tang.}\, u}$$

il che preciſamente ſomminiſtrando il valore dell'arco circolare per la tangente trovato col metodo de' ſeni e coſeni dal Sig. *Eulero* nel Tomo I. dell' Introduzione all' Analiſi degl' Infiniti §. 140, comprova l' eſattezza dell' integrazione fondamentale al noſtro §. III.

XIV.

Ma laſciando di cercare l' integrazione d' altre formule col dare diverſi valori alla funzione indeterminata M, mi ſo a richiamare a integrazione la formula *Riccaziana* in tutti quegl' infiniti caſi, pe' quali l' inventore Co. *Jacopo Riccati* giunſe a ottenere la ſeparazione delle indeterminate, cioè a prepararla opportunamente per la coſtruzione col mezzo delle curve, il che non va confuſo coll' analitica e vera integrazione di cui ſi tratta in queſto luogo. Ella è di queſta forma (R)

$$(R) \ldots\ ax^m dx + bx^n y^2 dx - dy = 0$$

Pertanto facendo le ſteſſe ſoſtituzioni Riccaziane (μ), (ω)

$$(\mu) \ldots\ y = -\frac{n+1}{b} x^{-n-1} + x^{-2n-2} t$$

$$(\omega) \ldots\ y = x^{2m+2} : \left(u + \frac{m+1}{a} x^{m+1}\right)$$

otterremo le due equazioni (S), (T)

$$(S) \ldots\ ax^{m+2n+2} dx + bx^{-n-2} t^2 dx - dt = 0$$

$$(T) \ldots\ bx^{2m+n+2} dx + ax^{-m-2} u^2 dx - du = 0$$

Supponendo ora, che poſſa integrarſi compiutamente l' equazione (R), ſe ſia $m = n$, potrà del pari integrarſi l' equazione (S), ſe ſia $m + 2n + 2 = -n - 2$, e l' equazione

(T), ſe ſia $2m+n+2=-m-2$, cioè ſe ſia $m=-3n-4$, $m=\frac{-n-4}{3}$. Nel primo caſo ciaſcuno degli eſponenti di x diventa $-n-2$ nell' equazione (S), e nel ſecondo ciaſcheduno diventa $\frac{n-2}{3}$ nell' equazione (T), e però l' una e l' altra s' integra, come s' integra (R) ſe ſia $m=n$. Dunque l' equazione (R) può integrarſi tanto ſe ſia $m=-3n-4$, quanto ſe ſia $m=\frac{-n-4}{3}$, eſſendo le equazioni (S), (T), integrabili in queſti caſi, derivate dall' equazione (R) con le ſoſtituzioni (μ), (ω). Si apponga P in luogo di $m+2n+2$, Q in luogo di $-n-2$ agli eſponenti di x nell' equazione (S), ed L, K in luogo degli eſponenti $2m+n+2$, $-m-2$ nell' equazione (T), e ſi ragioni come qui innanzi dicendo, ſe è integrabile l' equazione (R) quando ſia $m=\frac{-n-4}{3}$, il ſarà pure l' equazione (S), quando ſia $P=\frac{-Q-4}{3}$, e l' equazione (T) qualor ſia $L=\frac{-K-4}{3}$. Avremo pertanto due nuovi valori per m, cioè $m=\frac{-5n-8}{3}$, $m=\frac{-3n-8}{5}$, poſto il primo de' quali, l' uno e l' altro degli eſponenti di x nell' equazione (S) diventa $\frac{n-2}{3}$, e poſto il ſecondo, ciaſcuno degli eſponenti di x diventa $\frac{m-2}{3}$ nell' equazione (T), oppure $\frac{-5n-10}{9}$. E però è ciaſcheduna integrabile, come s' integra l' equazione (R), quando ſia $m=n$. Procedendo con queſto ragionamento, e tenendo conto ſucceſſivamente de' valori di m in n riſultanti dal progreſſo di queſti paragoni, ſi perverrà a conchiudere che l' equazione (R) può integrarſi compiutamente ſe tra m ed n abbia luogo queſta relazione

$$m(2g\mp 1)+n(2g\pm 1)+4g=0$$

in cui g è qualunque numero intero affermativo, ſuppoſto ſempre, che ſappia integrarſi un' equazione della forma (R) in cui gli eſponenti di x ſieno tra di sè uguali. Dipende dunque lo ſcioglimento del nodo dall'integrare compiutamente un' equazione come (R) in ſuppoſizione di $m=n$, al che dietro alle coſe trovate qui innanzi è facilisſimo il pervenire. Imperciocchè ſi faccia $x^m dx=dz$, qualunque coſa ſia m, e l' equazione (R) prenderà queſta forma

$$adz+by^2dz-dy=0$$

Poſto pertanto $y=u:b$, l' equazione da integrarſi della forma canonica ſarà quella del §. XI.

$$(14)\ldots\ Adz+u^2dz-du=0$$

eſſendo $A=ab$, la quale ha per integrale completo

$$u=\frac{\sqrt{-A}-2ABe^{2z\sqrt{-A}}}{2Be^{2z\sqrt{-A}}\sqrt{-A}-1}$$

oppure (§. XIII.)

$$z=\frac{1}{2\sqrt{A}\sqrt{-1}}\,l.\,\frac{\sqrt{A}-u\sqrt{-1}}{2Bu\sqrt{A}-2AB\sqrt{-1}}$$

E poichè $u:b=y$, $x^m dx=dz$, ſi reſtituiſca in queſte equazioni by per u, $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ per z, e ciaſcheduna delle equazioni (V), (V')

$$(\text{V})\ldots\ y=\frac{\sqrt{-a:b}-2aBe^{\frac{2x^{m+1}\sqrt{-ab}}{m+1}}}{2Be^{\frac{2x^{m+1}\sqrt{-ab}}{m+1}}\sqrt{-ab}-1}$$

$$(\text{V}')\ldots\ x^{m+1}=\frac{m+1}{2\sqrt{-ab}}\,l.\,\frac{\sqrt{a}-y\sqrt{b}\sqrt{-1}}{2Bby\sqrt{a}-2aB\sqrt{b}\sqrt{-1}}$$

Sarà l' integrale completo dell' equazione (R) ſe ſia $m=n$, eſſendo B la coſtante arbitraria.

XV.

E' dunque integrabile generalmente la formula (X)

$$(X) \ldots\ldots ax^{(-n(2g\pm1)-4g):(2g\mp1)}dx + bx^n y^2 dx - dy = 0$$

in cui dimoſtrò ſeparabili le indeterminate il ſoprallodato Geometra, ſenza il ſoccorſo di sì fatta ſeparazione, e co' puri e diretti artificj dell' Algebra. Prendiamo, a fine di darne qualche eſempio, a ſvolgere i due primi caſi che riſultano dal porre $g=1$. Il metodo è lo ſteſſo per tutti gli altri.

I. Eſ.

Sia da integrarſi l' equazione (a)

$$(a) \ldots\ldots ax^{-3n-4}dx + bx^n y^2 dx - dy = 0$$

S' intenda fatta la ſoſtituzione (μ) del §. XIV., cioè nell' equazione (S) fatto $m=-3n-4$. L' equazione (S) ſi traſforma nell' equazione (b)

$$(b) \ldots\ldots ax^{-n-2}dx + bx^{-n-2}t^2 dx - dt = 0$$

della forma (R) (§. preced.) in ſuppoſizione di $m=n$. Nell' integrale pertanto (V') dell' equazione (R) ſi ponga $-n-2$ per m, t per y, e ſarà

$$x^{-n-1} = \frac{-n-1}{2\sqrt{-ab}}\, l.\, \frac{\sqrt{a} - t\sqrt{b}\sqrt{-1}}{2Bbt\sqrt{a} - 2aB\sqrt{b}\sqrt{-1}}$$

l' integrale completo dell' equazione (b). Ma dall' equazione (μ), $t = \left(y + \frac{n+1}{b}x^{-n-1}\right) : x^{-2n-2}$. Per conſeguenza ſoſtituendo in queſto integrale sì fatto valore per t, ſarà

$$x^{-n-1} = \frac{-n-1}{2\sqrt{-ab}}\, l.\, \frac{\sqrt{a} - \left(y + \frac{n+1}{b}x^{-n-2}\right)\left(\sqrt{b}\sqrt{-1}\right) : x^{-2n-2}}{2Bb\left(y + \frac{n+1}{b}x^{-n-1}\right)\sqrt{a} : x^{-2n-2} - 2aB\sqrt{b}\sqrt{-1}}$$

l' integrale generale dell' equazione (a). Il che ecc.

II. Eſ.

Sia da integrarſi l' equazione (c)

$$(c)\ldots.\ ax^{(-n-4):3}dx+bx^{n}y^{2}dx-dy=0$$

Si ponga $m=\frac{-n-4}{3}$ nell' equazione (T) (§. XIV.). Diverrà ella della forma (d)

$$(d)\ldots.\ bx^{(n-2):3}dx+ax^{(n-2):3}u^{2}dx-du=0$$

ch' è la forma (R) in ſuppoſizione di $m=n$, permutati ſoltanto i coefficienti. Si ripigli pertanto l' integrale (V') di (R), e vi ſi ponga $\frac{n-2}{3}$ per m, u per y, a per b, b per a. Sarà

$$x^{(n+1):3}=\frac{n+1}{6\sqrt{-ab}}\,l.\,\frac{\sqrt{b}-u\sqrt{a}\sqrt{-1}}{2aBu\sqrt{b}-2bB\sqrt{a}\sqrt{-1}}$$

l' integrale completo dell' equazione (d). Ma per l' equazione (ω) è $u=x^{2m+2}y^{-1}-\frac{m+1}{2}x^{m+1}=x^{(-2n-2):3}y^{-1}$ $+\frac{n+1}{6}x^{(-n-1):3}$, poſto per m il ſuo valore in n. Dunque ſurrogato in queſt' integrale il valore di u, ſarà

$$x^{(n+1):3}=\frac{n+1}{6\sqrt{-ab}}\,l.\,\frac{\sqrt{b}-\left(x^{(-2n-2):3}y^{-1}+\frac{n+1}{6}x^{(-n-1):3}\right)\sqrt{-a}}{2aB\left(x^{(-2n-1):3}y^{-1}+\frac{n+1}{6}x^{(-n-1):3}\right)\sqrt{b}-2bB\sqrt{-a}}$$

l' integrale completo dell' equazione (c). Il che ecc.

XVI.

Due illuſtri geometri *Daniello* e *Nicola Bernoulli* preſero per mano in quel torno di tempo la formula *Riccaziana*, e ſi volſero a rintracciare i caſi di ſeparazione delle variabili nell' equazione (Z)

(Z)....

$$(Z) \ldots . ax^m + y^2dx - dy = 0$$

Con molta eleganza pertanto dimoſtrarono entrambi, che in queſta equazione ſono ſeparabili le indeterminate allorchè ſia l' eſponente $m = \frac{-4g}{2g \pm 1}$. Ma non è ſtata neppur queſta forma integrata completamente, ch' io ſappia, per altro mezzo fuorchè per opera delle ſerie infinite dal Sig. *Eulero* nel T. II. del ſuo Calcolo Integrale alla pag. 182. Ora col fare $n = 0$ nella formula (X) del §. XV. riceve ella integrazione non ſolamente per una via diretta e ſemplice, ma eziandio per un mezzo puramente algebraico.

XVII.

Non ſi riſtrigne per altro a queſto ſolo il frutto, che poſſiamo ricavare dal Teorema del §. IV., avendovi una forma da eſſo dipendente, generale e fecondiſſima, cui mi propongo di additare, non del tutto immeritevole di attenzione.

XVIII.

Se ha luogo l' equazione (1)

$$(1) \ldots . y = \frac{dM}{Mdx}$$

ſi verifica pure l' equazione differenziale (2)

$$(2) \ldots . - \frac{ddM}{Mdx} + y^2dx + dy = 0$$

qualunque funzione di x, o di y, o d'entrambe le variabili promiſcuamente ſia il ſimbolo M.

Imperciocchè, eſſendo $y = \frac{dM}{Mdx}$, ſarà $yMdx = dM$, e quadrando $y^2M^2dx^2 = dM^2$. Dunque differenziando

$$2yMdx(ydMdx + dyMdx) - 2dMddM = 0$$

cioè

$$Mdx(y^2dMdx + ydyMdx) - dMddM = 0$$

e però

$$y^2dMdx + ydyMdx - \frac{dMddM}{Mdx} = 0$$

Ma $yMdx = dM$. Soſtituendo pertanto queſto valore nel ſecondo termine, e dividendo l' equazione per dM, ſi verificherà l' equazione (2). Il che ecc.

XIX.

L' equazione (2) eſſendo della forma canonica (B) (§. III.), col valore finito (1) in pronto, che le ſoddisfa, e potendo in oltre eſſere M qualunque funzione ad arbitrio, ſi comprende agevolmente eſſere ſenza limiti il numero delle equazioni traſcendenti della forma (B)

$$(B) \ldots . dy + y^2dx + Qdx = 0$$

le quali a completa integrazione ſi conducono col metodo eſpoſto nel §. III., ed altrettante eſſere le equazioni differenzio-differenziali della forma (A)

$$(A) \ldots . ddt + Qtdx^2 = 0$$

che poſſono generalmente integrarſi, dato l' integrale (§. II.) della forma (B). Diamone alcuni eſempli.

I. Eſ.

Sia da integrarſi l' equazione (3)

$$(3) \ldots . dy + y^2dx - dx\left(m(m-1)x^{m-2} + m^2x^{2m-2}\right) = 0$$

Si faccia nell' equazione (2) del §. XVIII. $M = e^{x^m}$; ſarà $dM = mx^{m-1}dxe^{x^m}$, $ddM = m(m-1)x^{m-2}dx^2e^{x^m}$ $+ m^2x^{2m-2}dx^2e^{x^m}$, e ſi verificherà l' equazione (3). Fatta poi una ſimile ſoſtituzione nell' equazione (1) del medeſimo §., avrà luogo l' equazione $y = mx^{m-1}$, il qual valore rappreſenta in conſeguenza il valore ſoddisfacente Δ dell' equazione canonica (B). Se dunque nell' equazione (*) dell' §. III. ſi ſoſtituiſca queſto valore per Δ, ſarà

$$y = mx^{m-1} + e^{-2x^{m}} : \left(B + \int dxe^{-2x^{m}}\right)$$

l' integrale completo dell' equazione (3). Il che ecc.

II. Eſ.

Sia da integrarſi l' equazione (5)

$$(5) \ldots . dy + y^2dx + (x^{-2}dx) : l. x = 0$$

Si ponga $M = l.x$, e fatte per M, dM, ddM le convenevoli ſoſtituzioni nelle equazioni (1) , (2) del §. XVIII., ſi verificherà l'equazione (5), di cui ſarà un valore ſoddiſfacente $y = x^{-1} : l . x$. Surrogando pertanto queſto valore per Δ nell' equazione (*), ſi troverà eſſere

$$y = \frac{x^{-1}}{l.x} + e^{-2\overline{\int x^{-2}dx : l.x}} : \left(B + \int \left(dxe^{-2\overline{\int x^{-1}dx : l.x}}\right)\right)$$

l' integrale completo dell' equazione (5). Il che ecc.

III. Eſ.

Sia l' equazione differenziale (6)

$$(6) \ldots . dy + y^2dx - \frac{dx}{1 + x^2} = 0$$

di cui ſi cerca l' integrale.

Si faccia $M = \sqrt{(1 + x^2)}$. Fatte le ſoſtituzioni per M, e ſuoi differenziali nelle equazioni (1), (2) del §. XVIII., ſi verificherà l' equazione (6) , ed avrà luogo il valor particolare $y = x : \sqrt{(1 + x^2)}$. Si ſoſtituiſca pertanto $x : \sqrt{(1 + x^2)}$ per Δ nell' equazione fondamentale (*), e ſi troverà , che l' equazione

$$y = x : \sqrt{(1 + x^2)} + e^{-2\sqrt{(1+x^2)}} : \left(B + \int dxe^{-2\sqrt{(2+x^2)}}\right)$$

è l' integrale completo dell' equazione (6) Il che ecc.

XX.

E per avere gl' integrali immediatamente ne' caſi particolari, integriamo generalmente l' equazione (2)

$$(2)\ldots\ldots -\frac{ddM}{Mdx}+y^2dx+dy=0$$

Eſſendo pertanto $y=\frac{dM}{Mdx}$ il valor particolare che le ſoddisfa, ſi ſoſtituiſca nell' integrale canonico (*) queſta eſpreſſione per Δ, e ſarà

$$y=\frac{dM}{Mdx}-\frac{M^2}{B-\int\overline{M^2dx}}$$

l' integrale completo dell' equazione (2), di qualunque forma ad arbitrio ſia M.

XXI.

Ed ecco fatta ſtrada alla determinazione di un' opportuna equazione di relazione tra le funzioni indeterminate P, $\mathcal{Q}$, perchè abbia luogo l' integrazione dell' equazione generale

$$\mathcal{Q}dx+Py^2dx+dy=0$$

avendola verificata qui innanzi ſoltanto in caſi particolari. Porremo in chiaro nel ſeguente Teorema il trovato, che non ha biſogno nè di ſchiaramenti, nè di eſemplificazioni, apparendo toſto nell' eſpoſizione di lui il campo che s' apre per lo ſcioglimento di sì fatta equazione. Il che baſti nel preſente argomento.

XXII.

Se ha luogo la relazione finita (ξ)

$$(\xi)\ldots\ldots P\mathcal{Q}+\frac{ddM}{Mdx^2}=0$$

qualunque coſa ſia M, l' equazione (ω)

$$(\omega)\ldots\ldots\mathcal{Q}dx+Py^2dx+dy=0$$

è generalmente integrabile.

Imperciocchè, ſoſtituendo nell' equazione (ω) il valore di $\mathcal{Q}dx$ tratto dalla relazione (ξ), riſulta l' equazione (π)

$$(\pi)\ldots:-\frac{ddM}{MPdx}+Py^2dx+dy=0$$

Se dunque ſi faccia in (π) $Pdx=dz$, ſi avrà l' equazione (μ)

$$(\mu)\ldots:-\frac{ddM}{Mdz}+y^2dz+dy=0$$

E l' equazione (μ) ha per integrale completo (§. XX.)

$$y=\frac{dM}{Mdz}-\frac{M^2}{B-\int M^2dz}$$

Soſtituendo pertanto in queſto integrale Pdx in luogo di dz, ſarà

$$y=\frac{dM}{MPdx}-\frac{M^2}{B-\int M^2Pdx}\text{, oppure}$$

$$y=-\frac{dM\mathcal{Q}dx}{MddM}-\frac{M^2}{B+\int MddM:\mathcal{Q}dx}$$

l' integrale completo in M, P, oppure in M, $\mathcal{Q}$ dell' equazione (ω), qualunque funzione di x ſieno M, P nel primo caſo, ed M, $\mathcal{Q}$ nel ſecondo. Il che ecc.

DELLA FIGURA DEL GORGO

Che la Natura forma in un vaſo cilindrico ripieno d' acqua, nel centro del cui fondo ſia aperto un foro circolare.

Del Sig. Co. GIORDANO RICCATI.

I. NEll' Annotazione allo Schediaſma XXXVI. del Co. *Jacopo Riccati* mio Padre contenuto nel Tomo III. delle ſue Opere ho determinato la figura del gorgo $SMEFNT$ (*Fig. I.*), che ſi genera girando intorno all' aſſe ZG la curva SME, la cui equazione $\frac{y\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$, nella quale le ſezioni circolari $MN = y$, $EF = c$, $ST = b$, ed inoltre le linee $IG = g$, $IZ = \frac{gc^2}{b^2}$, $IO = x$. Ho dedotta queſta figura dalla ſuppoſizione, che la velocità dell' acqua nel gorgo ſi acceleri colla legge dei gravi cadenti per la linea del piombo. Chiamata u la velocità, colla quale l' acqua ſgorga dal foro, ho dimoſtrato, che la forza viva dell' acqua contenuta nel gorgo s' eguaglia a $\left(\frac{2}{3}gc + \frac{\frac{1}{3}gc^4}{b^3}\right) \cdot \frac{u^2}{2}$.

II. Sia $HG = a$ l' altezza del vaſo, $HQ = s$ lo ſpazio minimo, per cui è diſceſa l' acqua, e per conſeguenza l' acqua uſcita dal vaſo ſia bs, la quale ſi è conformata in un cilindro cz, la cui baſe $EF = c$, e la lunghezza $z = \frac{bs}{c}$. Se nella citata Annotazione, che ſuppone minimo il foro $EF = c$, non aveſſi traſcurato alcune quantità relativamente nulle, ed aveſſi ridotto le formole alle miſure conoſciute, ſarei pervenuto alle due ſeguenti

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon abs)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2 - gc^2 - sc^2}{b} + bs + \frac{2}{3}gc + \frac{\frac{1}{3}gc^4}{b^3}\right)}} = u$$

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon acz)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2}{b}-\frac{zc^3}{b^2}+cz+\frac{2}{3}gc+\frac{\frac{1}{3}gc^4}{b^3}\right)}}=u,$$

nelle quali ε ſignifica lo ſpazio ſcorſo in un minuto ſecondo da un grave, che liberamente diſcende. Dalla ſovraſcritta ſeconda ſormola ſi comprende, che ſe l' altezza $IG=g$ del gorgo nell' ipoteſi del foro c minimo non è infinitamente minore di z, l' acqua ch' eſce dal foro non giungerà mai ad acquiſtare la velocità $\sqrt{(4\varepsilon a)}$ propria di un grave diſceſo dall' altezza $HG=a$. L' eſperienza c' inſegna, che l' altezza del gorgo è finita, ed oltre a ciò ſe foſſe infiniteſima, il moto dell' acqua incontrerebbe una gran reſiſtenza pel fregamento del fondo del vaſo.

III. Biſogna dunque aſſegnare al gorgo una figura; da cui s' inferiſca nell' ipoteſi del foro minimo, che a z infinitamente picciola corriſponda $u=\sqrt{(4\varepsilon a)}$, quantunque g ſia finita. Tagliata $Oo=dx$, e chiamata W la velocità confaccente alla ſezione $MN=y$, ne riſulta la forza viva dello ſtrato d' acqua ydx uguale a $ydx.\frac{W^2}{2}$. Ma ſtando le velocità u, W in ragione inverſa delle ſezioni $EF=c$, $MN=y$, ci ſi preſenta l' analogia $y:c::u:W$, da cui ſi deduce il valore di $W=\frac{cu}{y}$, che ſoſtituito mi dà la predetta forza viva $=\frac{c^2dx}{y}.\frac{u^2}{2}$, e conſeguentemente la forza viva della porzione $SMNT$ dell' acqua contenuta nel gorgo $=\frac{c^2u^2}{2}\int\frac{dx}{y}$. Noto che la velocità u ſi dee conſiderare coſtante, cercandoſi la forza viva dell' acqua nel gorgo, mentre alla ſezione $EF=c$ compete la velocità u. Avremo pertanto generalmente le due formole

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon abs)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2-sc^2}{b}+bs+c^2\int\frac{dx}{y}\right)}}=u$$

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon acz)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2}{b}-\frac{zc^3}{b^2}+cz+c^2\int\frac{dx}{y}\right)}}=u$$

Se ſuppoſto minimo il ſoro c, ſia per eſempio $z=c^{1:2}$, dovranno in riguardo a $cz=c^{3:2}$ traſcurarſi i termini $\frac{ac^2-gc^2}{b}$ $-\frac{zc^3}{b^2}$, e quando anche $c^2\int\frac{dx}{y}$ ſia infinitamente minore di $cz=c^{3:2}$, ne proverrà $u=\sqrt{(4\varepsilon a)}$.

IV. Afferma l' Ab. *Vincenzo Riccati* mio fratello nella Lettera XIX. intorno ai *Principj della Meccanica*, che per mancanza di dati non ci è permeſſo di determinare la figura del gorgo. Or ecco il dato da me ſcoperto, col mezzo del quale ſtabiliſco la mentovata figura. La gravità fa ogni sforzo, acciocchè l' acqua cz, che ſcaturiſce dal foro, acquiſti la maſſima velocità u. S' otterrà ciò, quando eſſendo date l'altre grandezze, ſia minima $\int\frac{dx}{y}$. La natura dunque preſceglierà quella figura di gorgo, riſpettivamente a cui ſia minima $\int\frac{dx}{y}$, e per conſeguenza ancora tale $\frac{dx}{y}$, formandoſi da infiniti elementi minimi un minimo tutto.

V. Fa di meſtieri adunque il ricorrere al metodo delle *Variazioni*. Sia SME (*Fig.* 2.) la curva, che girandoſi intorno all' aſſe ZG generi la cercata figura del gorgo $SMEFNT$, e ſieno come ſopra le ſezioni circolari $ST=b$, $EF=c$, $MN=y$, e le linee $ZG=g$, $ZO=x$, $Oo=dx$. Le variazioni della curva SME vengano determinate dalla curva SiE, e la variazione della ſezione $MN=y$ ſi eguaglierà alla zona circolare deſcritta coi raggi OM, Oi, la cui larghezza Mi. Dinotando le variazioni col ſegno δ, ſarà la predetta variazione $=\delta y$. Segnata di più $Oo=dx$, da $oK=\delta dx$ venga eſpreſſa la ſua variazione. La proprietà di minimo, che compete all' elemento $\frac{dx}{y}$, eſige che ſia nulla la ſua variazione, onde s' abbia $\frac{dx}{y}=\frac{dx+\delta dx}{y+\delta y}$. Ne ſegue per conſeguenza, che debba avverarſi l' analogia $dx:\delta dx :: y:\delta y$, e che perciò ne riſulti $y\delta dx = dx\delta y$. Ma ſi ſa eſſere $\delta dx = d\delta x$; dunque $yd\delta x = dx\delta y$. Di queſta formola ne faremo uſo in progreſſo al numero VII.

VI. Ripigliata per mano la formola $\frac{c^2dx}{y}$, ne prendo le differenze eſpreſſe per δ indice delle variazioni, e mi ſi preſenta $\frac{c^2\delta dx}{y}-\frac{c^2dx\delta y}{y^2}=0$, e conſeguentemente ancora $\int\frac{c^2\delta dx}{y}-\int\frac{c^2dx\delta y}{y^2}=0$, ovvero $\int\frac{c^2d\delta x}{y}-\int\frac{c^2dx\delta y}{y^2}=0$, ponendo in luogo di δdx la grandezza eguale $d\delta x$. Pel metodo delle integrazioni per parti ſi trova $\int\frac{c^2d\delta x}{y}=\frac{c^2\delta x}{y}+\int\frac{c^2dy\delta x}{y^2}$, e perciò l' equazione precedente ſi cangia così

$$(A)\int\left(\frac{c^2dy}{y^2}.\delta x\right)$$
$$-\int\left(\frac{c^2dx}{y}.\delta y\right)$$
$$+\frac{c^2}{y}.\delta x=0$$

Da queſta formola ſi caverà primieramente l' equazione indefinita

$$(B)\ \frac{c^2dy}{y^2}.\delta x$$
$$-\frac{c^2dx}{y^2}.\delta y=0$$

ed in oltre l' equazione determinata

$$(C)\ \frac{c^2}{y}.\delta x=0.$$

VII. Per liberarci frattanto nell' equazioni trovate dalle differenze indeterminate δx, δy, eſamino ſe per la natura del Problema v' abbia fra loro qualche relazione. E primieramente per la formola (B) trovo $\frac{c^2 dy\delta x}{y^2} = \frac{c^2 dx\delta y}{y^2}$, e dividendo per $\frac{c^2}{y^2}$, $dy\delta x = dx\delta y$. Ma al fine del numero V. ho ſcoperto $yd\delta x = dx\delta y$; dunque $dy\delta x = yd\delta x$, e perciò $\frac{dy}{y} = \frac{d\delta x}{\delta x}$, ed integrando $\log. y = \log. \frac{\delta x}{dx}$, prendendo dx in qualità di coſtante. Quindi $y = \frac{\delta x}{dx}$, e finalmente $\delta x = ydx$. Si ſoſtituiſca queſto valore nella formola $dy\delta x = dx\delta y$, e ſi troverà $ydydx = dx\delta y$, e poſcia $\delta y = ydy$. Per la qual coſa ſono reſi noti i valori delle due differenze indeterminate.

$$\delta x = ydx$$

$$\delta y = ydy$$

Scorgeremo a chiaro lume eſſere ſtati rettamente determinati i valori di δx, δy, ſe differenziando la formola $\delta x = ydx$, conſiderata coſtante dx, come s' è fatto nella predetta determinazione, onde s'abbia $d\delta x = dxdy$, ſi ſoſtituiſcano i valori di $d\delta x$, e di δy nell' equazione $yd\delta x = dx\delta y$ ſcoperta al fine del numero V. Effettuata la ſoſtituzione, troveremo giuſtamente $ydydx = ydydx$.

VIII. Surrogati i valori di δx, δy nella formola (A), ci ſi affaccierà

$$(A') \int\left(\frac{c^2 dy}{y^2} . ydx\right)$$

$$-\int\left(\frac{c^2 dx}{y^2} . ydy\right)$$

$$+\frac{c^2}{y} . ydx = 0 .$$

Si faccia la rifleſſione, che gli elementi delle due ſommatorie ſono eguali a due quantità indentiche affette da ſegni contrarj, e che perciò l' aggregato delle due ſommatorie eſſer dee $=0$. E poichè la ſomma dei tre termini della formola (A') eſſer dee uguale a nulla, addiviene che ſia il terzo termine $c^2dx=0$. Il perchè ſarà nullo l' elemento della ſeconda ſommatoria $\frac{c^2dx}{y^2}.ydy=0.\frac{dy}{y}$, e per conſeguenza anche quello della prima.

Avverto in oltre, che dalla formola determinata (C) $\frac{c^2}{y}.\delta x=c^2dx=0$ ſi raccoglie $x=\frac{K}{c^2}$. Ora x ha due valori coſtanti, cioè a dire $x=0$ nel punto Z, $x=g$ nel punto G; e quindi ſi avrà $K=\left\{\begin{matrix}c^2.0\\ c^2.g\end{matrix}\right.$. Ai due valori di $x=\left\{\begin{matrix}0\\ g\end{matrix}\right.$ corriſpondono altrettanti valori di $y=\left\{\begin{matrix}b=ST\\ c=EF\end{matrix}\right.$.

IX. Stabiliſce il ch. Sig. *Luigi de la Grange* nel Tomo II. dell' Accademia di Turino pag. 176, che ſe δx, δy ſono aſſolutamente indipendenti l' una dall' altra, ſi ſaranno i coefficienti di ciaſcuna d' eſſe uguali a zero. Benchè non ſi avveri queſta indipendenza nel noſtro caſo, ci è nulladimeno permeſſo di ſupporre nella formola (B), che ſieno $\frac{c^2dx}{y^2}=0$, $\frac{c^2dy}{y^2}=0$, ma non già congiuntamente, onde quando $\frac{c^2dx}{y^2}=0$, ſia parimente $\frac{c^2dy}{y^2}=0$. Vediamo coſa ſuccederebbe ammettendo, che $\frac{c^2dx}{y^2}$, $\frac{c^2dy}{y^2}$ ſi riferiſcano in proporzione finita. Se $\frac{c^2dx}{y^2}=0$, ſarà parimente $\frac{Fc^2dx}{y^2}=0$, e perciò ſecondo la premeſſa ſuppoſizione $\frac{c^2dy}{y^2}=\frac{Fc^2dx}{y^2}$, e dividendo per $\frac{c^2}{y^2}$, $dy=Fdx$, ed integrando $y+H=Fx$. Si rifletta, che quando $x=ZG=g$, è $y=EF=c$. Il perchè $c+H=Fg$, e quindi $H=Fg-c$. Fatto uſo di queſto valore, ſi ſcoprirà $y+Fg-c=Fx$. E poichè quando $x=0$, eſſer dee $y=ST=b$, ne riſulta $b+Fg-c=0$, e conſeguentemente $\frac{b-c}{g} = -F$. Troveremo dunque finalmente $y - \left(\frac{b-c}{g}\right).g - c = -\left(\frac{b-c}{g}\right).x$, oſſia $\left(\frac{b-c}{g}\right).(g-x) + c = y$, la qual formola ſi riduce a queſt' altra $\left(\frac{b-c}{g}\right).\left(\frac{bg}{b-c} - x\right) = y$. Poſti i raggi $SZ = r$, $EG = q$, $MO = p$, onde ſieno $b = nr^2$, $c = nq^2$, $y = np^2$, ci ſi preſenterà $\left(\frac{r^2-q^2}{g}\right).\left(\frac{gr^2}{r^2-q^2} - x\right) = p^2$, equazione alla parabola conica, il cui parametro $= \frac{r^2-q^2}{g}$, che girata intorno all' aſſe ZG genera il gorgo.

X. Ripigliata la formola $\left(\frac{b-c}{g}\right).\left(\frac{bg}{b-c} - x\right) = y$, ſoſtituiſco nella formola $\frac{c^2u^2}{2}.\int\frac{dx}{y}$ dinotante la forza viva dell'acqua contenuta nella porzione di gorgo $SMNT$ in cambio di y lo ſcoperto valore, e trovo
$$\frac{gc^2}{b-c}.\frac{u^2}{2}\int\frac{dx}{\frac{bg}{b-c} - x} = \frac{gc^2}{b-c}.\frac{u^2}{2}.\log.\frac{K}{\frac{bg}{b-c} - x}$$
: ma quando $x = ZO = 0$, $\log.\frac{K}{\frac{bg}{b-c} - x} = 0$; perchè in tal caſo è nulla la forza viva dello ſtrato nullo $SMNT$; dunque ſupponendoſi $l1 = 0$, dovrà eſſere $K = \frac{bg}{b-c}$, e conſeguentemente
$$\frac{gc^2}{b-c}.\frac{u^2}{2}.\log.\left(\frac{\frac{bg}{b-c}}{\frac{bg}{b-c} - x}\right)$$
ſarà la forza viva dell'acqua contenuta nella porzione di gorgo $SMNT$. Ponendo $x = g = ZG$,

avremo la forza viva del gorgo intero

$$SMEFNT = \frac{gc^2}{b-c} \cdot \frac{u^2}{2} \cdot \log.\left(\frac{\frac{bg}{b-c}}{\frac{bg}{b-c} - g} \right) = \frac{gc^2}{b-c} \cdot \frac{u^2}{2} \cdot \log. \frac{b}{c},$$

la qual dovrebbe eſſer minima nella ſuppoſizione, che ſieno date le quantità b, c, g, u.

XI. Nelle due formole generali, che ſi leggono al numero III., ſi ſoſtituiſca in vece di $c^2 \int \frac{dx}{y}$ il rinvenuto valore $\frac{gc^2}{b-c} \cdot \log.\left(\frac{b}{c}\right)$, e prenderanno eſſe il ſeguente aſpetto

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon abs)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2 - gc^2 - sc^2}{b} + bs + \frac{gc^2}{b-c} \cdot \log.\left(\frac{b}{c}\right) \right)}} = u$$

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon acz)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2 - gc^2}{b} - \frac{zc^3}{b^2} + cz + \frac{gc^2}{b-c} \cdot \log.\left(\frac{b}{c}\right) \right)}} = u$$

Ho già oſſervato al numero III. che ſuppoſto minimo il foro $EF = c$, e fatto $z = c^{1:2}$, ſvaniſcono i termini $\frac{ac^2 - gc^2}{b} - \frac{zc^3}{b^2}$, ed ora fa d' uopo provare, ch' è parimente traſcurabile il termine $\frac{gc^2}{b-c} \cdot \log.\left(\frac{b}{c}\right)$. Per la natura della logiſtica il logaritmo d' un numero infinito $= \frac{b}{c}$ è immenſamente minore d' eſſo numero. Dimoſtro preſentemente che $\log.\left(\frac{b}{c}\right)$ è più picciolo infinitamente di $\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$. Si prendano fra 1, e $\frac{b}{c}$ tre medie continue proporzionali $\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, $\frac{b^{1:2}}{c^{1:2}}$,

$\frac{b^{1:4}}{c^{3:4}}$, e ſe foſſe log. $\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, ai detti numeri dovrebbero adattarſi i logaritmi $\frac{1}{4} \cdot \frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, $\frac{3}{4} \cdot \frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, e perciò il numero infinito $\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, ed il logaritmo corriſpondente $\frac{1}{4} \cdot \frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$ ſpetterebbero ad un infinito dello ſteſſo grado, il che ſi oppone alla natura della logaritmica. Ma quantunque foſſe log. $\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, e $\frac{gc^2}{b-c} \cdot \log. \left(\frac{b}{c}\right) = \frac{gc^2}{b-c} \cdot \frac{b^{1:4}}{c^{1:4}} = \frac{gb^{1:4}}{b-c} \cdot c^{7:4}$, queſto termine merita di eſſer negletto a confronto di $cz = c^{3:2}$; dunque tanto più dovrà traſandarſi la quantità immenſamente minore $\frac{gc^2}{b-c} \cdot \log. \left(\frac{b}{c}\right)$. Per la qual coſa quando l' acqua uſcita dal foro avrà ſcorſo uno ſpazio $z = c^{1:2}$ proporzionale al diametro del foro ſteſſo, sarà eſſa pervenuta alla velocità $u = \sqrt{(4\varepsilon a)}$, benchè ſia finita l' altezza g del gorgo.

XII. Se frattanto il foro $EF = c$ foſſe infiniteſimo, l'acqua non uſcirebbe dal vaſo. Fa di meſtieri adunque al minimo matematico ſoſtituire il minimo foro fiſico, e s' otterrà che l' acqua dopo avere ſcorſo fuori del buco il picciolo ſpazio z, abbia fatto acquiſto d' una velocità, che molto ſi accoſterà a $\sqrt{(4\varepsilon a)}$. Sia per eſempio $b = 3600$, $c = 1$, il che richiede che i diametri di queſte ſezioni circolari ſi corriſpondano in ragione di 60 : 1. Sia in oltre $a = 60$, $g = 40$, $z = 1$. Avremo l' iperbolico log. $\left(\frac{b}{c}\right) = \log. 3600 = 8,18869$. Nella formola eſprimente la velocità u per z, e per le coſtanti ſi può fiſicamente negligere $-\frac{zc^3}{b^2}$, e ſupporre $b - c = b$. Sarà dunque ſoſtituendo i valori ſtabiliti

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon a)}}{\sqrt{\left(\frac{20}{3600} + 1 + \frac{40}{3600} \cdot 8,18869\right)}} = u, \text{ e perciò}$$

$\frac{\sqrt{(4\varepsilon a)}.60}{\sqrt{(3947,5476)}} = \sqrt{(4\varepsilon a)}.\frac{60,00}{62,82} = u$, e proſſimamente $\sqrt{(4\varepsilon a)}.\frac{21}{22} = u$. Il perchè nell' eſempio propoſto dopo che l' acqua uſcita pel foro ha ſcorſo lo ſpazio $z = 1$, la ſua velocità cala ſoltanto la vigeſima ſeconda parte da quella d' un grave verticalmente diſceſo dall' altezza $a = 60$. Se aveſſi ſuppoſto minore l' altezza del gorgo ponendo $g = 20$, avrei trovato $\sqrt{(4\varepsilon a)}.\frac{60,00}{61,67} = u$, e proſſimamente $\sqrt{(4\varepsilon a)}.\frac{36}{37} = u$, dimodochè la velocità u ſi approſſimerebbe maggiormente a $\sqrt{(4\varepsilon a)}$.

XIII. Ora ecco ciò che ho raccolto dalla mentovata ſuppoſizione, che $\frac{c^2dx}{y^2}$, $\frac{c^2dy}{y^2}$ ſi riferiſcano in proporzione finita. Ma per dir il vero la forza viva dell' acqua contenuta nel gorgo generato dalla porzione della parabola SME, che s' è girata intorno all' aſſe ZG, non è la minima. Mi ſerva di prova il cercare la forza viva dell' acqua, che riempie il gorgo prodotto dal girare la porzione d' elliſſe conica SME intorno all' aſſe ZG. Ritenute le ſopra ſtabilite denominazioni, onde ſieno le ſezioni circolari $ST = b = nr^2$, $EF = c = nq^2$, $MN = y = np^2$, e di più il ſemiaſſe $ZV = e$, l' altezza del gorgo $ZG = g$, l' aſſiſſa $ZO = x$, la ſua fluſſione $Oo = dx$, oſſervo che per la natura dell' elliſſe abbiamo $\frac{r^2}{e^2}.(e^2 - x^2) = p^2 = \frac{y}{n}$, e quindi $\frac{nr^2}{e^2}.(e^2 - x^2) = b.(\frac{e^2 - x^2}{e^2}) = y$. Ma quando $y = c = EF$, è $ZG = x = g$; dunque $b.(\frac{e^2 - g^2}{e^2}) = c$, e perciò $e^2 = \frac{bg^2}{b - c}$, $e = g.\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b - c)}}$. Nella formola generale $\frac{c^2u^2}{2}\int\frac{dx}{y}$ eſprimente la forza viva dell' acqua contenuta nella porzione $SMNT$ del gorgo ſi collochi in cambio di y il rinvenuto valore, e ci ſi preſenterà la detta forza viva $= \frac{e^2c^2}{b}\cdot\frac{u^2}{2}\int\frac{dx}{e^2-x^2} = \frac{ec^2}{2b}\cdot\frac{u^2}{2}\int\left(\frac{dx}{e+x}+\frac{dx}{e-x}\right)$ $= \frac{ec^2}{2b}\cdot\log.\left(\frac{e+x}{e-x}\right)\cdot\frac{u^2}{2}$. Non c' è biſogno di aggiunger coſtante; perchè ſupponendoſi $\log. 1 = 0$, quando nel ſito ST l' aſſiſſa $ZO = x = 0$, ne riſulta rettamente la forza viva $\frac{gc^2}{2b}\cdot\log. 1\cdot\frac{u^2}{2} = 0$.

Soſtituito nella noſtra formola in luogo di e il ſuo valore $g\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}$, ſcopriremo la mentovata forza viva

$$= \frac{gc^2}{2b}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}\cdot\log.\left(\frac{\frac{g\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}+x}{\frac{g\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}-x}\right)\cdot\frac{u^2}{2},$$

e poſta $x = ZG = g$, ne proverrà la forza viva di tutta l'acqua contenuta nel gorgo $= \frac{gc^2}{2b}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}\cdot\log.\left(\frac{\frac{g\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}+g}{\frac{g\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}-g}\right)\cdot\frac{u^2}{2}$

$$= \frac{gc^2}{2b}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}\cdot\log.\left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{(b-c)}}{\sqrt{b}-\sqrt{(b-c)}}\right)\cdot\frac{u^2}{2},$$

la qual formola vale per qualunque miſura del foro c. Che ſe lo ſteſſo ſia minimo o matematicamente, o anche fiſicamente in riguardo a b; ſarà $\sqrt{(b-c)} = \sqrt{b} - \frac{c}{2\sqrt{b}}$, e la formola ſi modificherà nel modo ſeguente

$$\frac{gc^2}{2b}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\frac{c}{2\sqrt{b}}}\cdot\log.\left(\frac{2\sqrt{b}-\frac{c}{2\sqrt{b}}}{\frac{c}{2\sqrt{b}}}\right)\cdot\frac{u^2}{2}$$

$= \frac{gc^2}{2b}\cdot\frac{2b}{2b-c}\cdot\log.\left(\frac{4b-c}{c}\right)\cdot\frac{u^2}{2} = \frac{gc^2}{2b}\cdot\log.\left(\frac{4b}{c}\right)\cdot\frac{u^2}{2}$. Una tal ſorza viva è minore di quella $\frac{gc^2}{b}\,.\,\log.\left(\frac{b}{c}\right)$ determinata al numero X; imperciocchè ſe il ſoro c è infiniteſimo, $\log.\left(\frac{4b}{c}\right) = \log.\left(\frac{b}{c}\right) + \log.4$ ſi eguaglia a $\log.\left(\frac{b}{c}\right)$, e la forza viva dell' acqua nel gorgo ellittico è la metà di quella nel gorgo parabolico. Che ſe il ſoro è minimo fiſicamente, la prima ſorza viva ſarà alquanto maggiore della metà della ſeconda.

XIV. Suppoſti come ſopra al numero XII. $b = 3600$, $c = 1$, $a = 60$, $g = 40$, $z = 1$, ed eſſendo $\log.\left(\frac{4b}{c}\right) = 9,57495$, ſi troverà $\frac{\sqrt{(4ga)}}{\sqrt{\left(\frac{20}{3600} + 1 + \frac{20\,.\,9,57495}{3600}\right)}} = u$, e ridotto il computo, $\sqrt{(4ga)}\,.\,\frac{60}{61,737} = u$, o proſſimamente $\sqrt{(4ga)}\,.\,\frac{35}{36} = u$. Che ſe foſſe $g = 20$, ne riſulterebbe $\frac{\sqrt{(4ga)}}{\sqrt{\left(\frac{40}{3600} + 1 + \frac{10\,.\,9,57495}{3600}\right)}} = u$, e fatte le neceſſarie operazioni, $\sqrt{(4ga)}\,.\,\frac{60}{61,12} = u$, o proſſimamente $\sqrt{(4ga)}\,.\,\frac{54}{55} = u$. Le ſcoperte velocità ſono maggiori di quelle, che aſſegnati alle coſtanti gli ſteſſi valori, abbiamo rinvenuto nella ſuppoſizione del gorgo parabolico; e per conſeguenza col mezzo del gorgo ellittico ſi ottiene una più copioſa uſcita d' acqua dal vaſo,

XV. Ella è agevole da farſi la rifleſſione, che quanto più ſono grandi le ſezioni circolari $MN = y$, altrettanto cala la forza viva dell' acqua nel gorgo. Per reſtar convinti d' una tal verità, baſta il conſiderare la formola $c^2 . \int \left(\frac{dx}{y} \right) . \frac{u^2}{2}$. Aſcenderebbero adequatamente al maſſimo le dette ſezioni, ſe la curva SME accettaſſe l'equazione $\frac{r^\infty}{e^\infty} . (e^\infty - x^\infty) = p^\infty$.

Non tralaſcio di notare, che la formola $\frac{\sqrt{(4\varepsilon abz)}}{\sqrt{(ac+bz)}} = u$ determinata nel Problema I. della mentovata Annotazione, la quale dipende dalla ſuppoſizione, che ſia traſcurabile la forza viva dell' acqua nel gorgo, è quella appunto, che con ſomma approſſimazione, e ſalva la legge di continuità, conviene coll' equazione $\frac{r^\infty}{e^\infty} . (e^\infty - x^\infty) = p^\infty$. E vaglia il vero, ſintanto che (*Fig.* 2.) $ZO = x$ cala da $ZV = e$ per una quantità finita, ed anche infiniteſima dentro certi limiti, come vedremo, ſarà ſempre x^∞ traſcurabile riſpettivamente ad e^∞, e perciò eſſendo $SZ = r = MO = p$, le due linee SC, SM coincideranno, e ſi potrà ſupporre, che il gorgo principj ad una diſtanza picciolisſima dal punto G, e che conſeguentemente ſia traſcurabile la forza viva dell' acqua, che lo riempie. Preſcindendo adunque dalle reſiſtenze, la ſovraſcritta formola ſi dee preferire; perchè, paragonata coll' altre, ci dà più grande il valore della velocità u.

XVI. Sia come ſopra al numero XII. $a = 60$, $b = 3600$, $c = 1$, $z = 1$, e dopo che l' acqua uſcita dal foro avrà ſcorſo lo ſpazio $z = 1$, ſarà fornita della velocità

$\sqrt{(4\varepsilon a)} . \frac{60}{\sqrt{(3660)}} = \sqrt{(4\varepsilon a)} . \frac{120}{121} = u$, la qual è maggiore delle due $\sqrt{(4\varepsilon a)} . \frac{21}{22} = u$, $\sqrt{(4\varepsilon a)} . \frac{36}{37} = u$ dipendenti dalla figura parabolica del gorgo regiſtrate al predetto numero XII., e delle altrettante $\sqrt{(4\varepsilon a)} . \frac{35}{36} = u$, $\sqrt{(4\varepsilon a)} . \frac{54}{55} = u$ dipendenti dalla figura ellittica regiſtrate al numero XIV., che ſuppongono l' altezza del gorgo, quella poſta in primo luogo $= 40$, e quella poſta in ſecondo luogo $= 20$. Ma quand' anche ſi foſſe ſtabilito $g = 1$, ſi ſarebbe trovato

$\sqrt{(4\varepsilon a)}\,.\,\frac{109}{110} = u$ in riguardo alla figura parabolica, e $\sqrt{(4\varepsilon a)}\,.\,\frac{113}{114} = u$ in riguardo alla figura ellittica; velocità tutte e due minori della $\sqrt{(4\varepsilon a)}\,.\,\frac{120}{121}$.

XVII. Vediamo preſentemente come dall' equazione $\frac{r^\infty}{e^\infty}\,.\,(e^\infty - x^\infty) = p^\infty$ ſi deduca analiticamente la formola $\frac{\sqrt{(4\varepsilon abz)}}{\sqrt{(ac+bz)}} = u$, che ſuppone minimo il foro $EF = c$. Poichè $\frac{r^\infty}{e^\infty}\,.\,(e^\infty - x^\infty) = p^\infty$, ſarà parimente $\frac{nr^2}{e^2}\,.\,(e^\infty - x^\infty)^{2:\infty} = np^2$: ma $nr^2 = b$, $np^2 = y$; dunque $\frac{b}{e^2}\,.\,(e^\infty - x^\infty)^{2:\infty} = y$. Sia (*Fig.* 3.) $ZV = K$ minima di tal miſura relativamente all' infinito ∞, che la ſezione circolare $S'T'$ s' adegui colla $ST = b$. Segno $OV = t$, ed eſſendo $ZV = e$, $ZO = x$, ne proviene $x = e - t$. Supponendoſi t infiniteſima, avremo $x^\infty = e^\infty - \infty e^{\infty - 1}\,.\,t$, e quindi $e^\infty - x^\infty = \infty e^{\infty - 1}\,.\,t$, e perciò $\frac{b}{e^2}\,.\,\frac{\infty^{2:\infty}\,.\,e^2\,.\,t^{2:\infty}}{e^{2:\infty}}$ $= \frac{b\,.\,\infty^{2:\infty}\,.\,t^{2:\infty}}{e^{2:\infty}} = y$. Sarà pertanto la forza viva dell' acqua contenuta nella porzione $S'MNT'$ del gorgo $= c^2 \int \left(\frac{dx}{y}\right)\,.\,\frac{u^2}{2} = e^{2:\infty}\,c^2 \int \left(\frac{-dt}{b\,.\,\infty^{2:\infty}\,.\,t^{2:\infty}}\right)\,.\,\frac{u^2}{2}$. Paſſo all' integrazione, e trovo la detta forza viva

$$= \frac{e^{2:\infty}\,.\,c^2}{\infty^{2:\infty}\,.\,b}\,.\,\frac{\infty}{\infty - 2}\,.\,\left(K^{(\infty-2):\infty} - t^{(\infty-2):\infty}\right)\,.\,\frac{u^2}{2}$$

$$= \frac{e^{2:\infty}\,.\,c^2}{\infty^{2:\infty}\,.\,b}\,.\,(K - t)\,.\,\frac{u^2}{2}.$$

Ho aggiunta la coſtante K, acciocchè ſi annulli la ſommatoria, quando $OV = t = ZV = K$.

Nella formola $\frac{b\,.\,\infty^{2:\infty}\,.\,t^{2:\infty}}{e^{2:\infty}}=y$ ſi ponga $y=c$, e ne proverrà $t=\frac{ec^{\infty\,:\,2}}{\infty\,.\,b^{\infty\,:\,2}}=GV$. Soſtituito queſto valore, ci ſi preſenterà la forza viva dell' acqua contenuta nella parte di gorgo $S'MEFNT'=\frac{e^{2\,:\,\infty}c^{2}}{\infty^{2:\infty}\,.\,b}\cdot\left(K-\frac{ec^{\infty\,:\,2}}{\infty\,.\,b^{\infty\,:\,2}}\right)\cdot\frac{u^{2}}{2}$ $=\left(\frac{e^{2:\infty}\,c^{2}K}{\infty^{2:\infty}\,.\,b}-\frac{e^{1+2:\infty}\,c^{\infty\,:\,2+2}}{\infty^{1+2:\infty}\,.\,b^{\,\infty:2+1}}\right)\cdot\frac{u^{2}}{2}$. Ora quando $t=K$, $y=b$; dunque per la formola $\frac{b\,.\,\infty^{2:\infty}\,.\,t^{2:\infty}}{e^{2:\infty}}=y$ avremo $\frac{b\,.\,\infty^{2:\infty}K^{2:\infty}}{e^{2:\infty}}=b$, e perciò $K=\frac{e}{\infty}$. Fatta la ſoſtituzione, la detta forza viva riceverà la ſeguente eſpreſſione $\left(\frac{c^{2}e^{1+2:\infty}}{\infty^{1+2:\infty}\,.\,b}-\frac{c^{\infty\,:\,2+2}\,.\,e^{1+2:\infty}}{\infty^{\,1+2:\infty}\,.\,b^{\infty\,:\,2+1}}\right)\cdot\frac{u^{2}}{2}$. Supponendoſi il foro c minimo, la quantità traſcendentemente infiniteſima $\frac{-c^{\infty\,:\,2+2}\,.\,e^{1+2:\infty}}{\infty^{1+2:\infty}\,.\,b^{\infty\,:\,2\,+\,1}}$ è nulla in paragone di $\frac{c^{2}e^{1+2:\infty}}{\infty^{1+2:\infty}\,.\,b}=\frac{c^{2}e}{\infty b}$; dunque la mentovata forza viva $=\left(\frac{c^{2}e}{\infty\,b}\right)\cdot\frac{u^{2}}{2}=\frac{c^{2}K}{b}\cdot\frac{u^{2}}{2}$. Si aggiunga la forza viva della parte $SS'T'T$ del gorgo, che s' eguaglia ad $(e-K)\cdot\frac{c^{2}}{b}\cdot\frac{u^{2}}{2}$, o adequatamente a $(g-K)\cdot\frac{c^{2}}{b}\cdot\frac{u^{2}}{2}$, meritando d' eſſere traſcurata la $GV=\frac{ec^{\infty\,:\,2}}{\infty\,.\,b^{\infty\,:\,2}}$, e ne riſulterà la forza viva di tutto il gorgo $SMEFNT$ uguale a $\left((g-K)\cdot\frac{c^{2}}{b}+\frac{Kc^{2}}{b}\right)\cdot\frac{u^{2}}{2}=\frac{gc^{2}}{b}\cdot\frac{u^{2}}{2}$.

Nella formola generale, che ſi legge al numero III. $\frac{V(4\varepsilon acz)}{V\left(\frac{ac^{2}}{b}-\frac{gc^{2}}{b}-\frac{zc^{3}}{b^{2}}+cz+c^{2}\int\frac{dx}{y}\right)}=u$ ſi ſoſtituiſca in cambio di $c^2 \int \frac{dx}{y}$ lo ſcoperto valore $\frac{gc^2}{b}$, e ci ſi preſenterà, traſcurando il termine riſpettivamente nullo $\frac{zc^3}{b}$, e fatte le convenienti riduzioni, $\frac{\sqrt{(4\varepsilon abz)}}{\sqrt{(ac+bz)}} = u$, ch' è quella ſteſſa formola, che ho determinata nel Problema I. della più volte nominata Annotazione, ſupponendo minimo il foro c, e che ſi poſſa negligere la forza viva dell' acqua, dalla quale il gorgo è riempiuto.

XVIII. Ho detto al numero IX., che $\frac{c^2dx}{y^2}$, $\frac{c^2dy}{y^2}$ non poſſono congiuntamente uguagliarſi a nulla. In fatti ſtando $\frac{c^2dx}{y^2} : \frac{c^2dy}{y^2} :: dx : dy$, può accadere, che ſia dy infinitamente minore di dx, o al contrario. Suppongaſi $dy = 0$ riſpettivamente a dx; e poichè $-\frac{c^2dy}{y^2} = 0$, avremo integrando $\frac{c^2}{y} = M$: ma quando $x = 0$, $y = b$; dunque $M = \frac{c^2}{b}$, e perciò ſempre $y = b$, e $dy = 0$, qualunque ſia il valore di x; dimodochè la linea retta SC è il luogo, che ſerve al minimo valore di $c^2 \int \frac{dx}{y}$. Lo ſteſſo intento ottiene adequatamente, come ho fatto vedere, l' elliſſe di grado infinito $\frac{r^\infty}{e^\infty} \cdot (e^\infty - x^\infty) = p^\infty$, la quale di più oſſerva la legge di continuità, e fa tranſito gradatamente dalla ſezione y alla c.

In oltre $y = c$, quando $x = g$; dunque $M = \frac{c^2}{c} = c$, e per conſeguenza $y = c$, qualunque ſia il valore di x, e queſta è la determinazione, che ſerve al maſſimo valore di $c \int \frac{dx}{y}$. Si conſeguirebbe con ſomma approſſimazione lo ſteſſo, ſe la curva (*Fig.* 1.) SME foſſe tale, che ſuppoſta minima

$ZO = x$, la ſezione $MN = y$ s'adeguaſſe alla ſezione $EF = c$. In tal caſo per tutto lo ſpazio OG ſi potrebbe conſiderar coſtante il valore di $y = c$, e la forza viva dell' acqua nel gorgo adequatamente al maſſimo aſcenderebbe, ſalva la legge di continuità.

XIX. La fluſſione $\frac{c^2 dx}{y^2}$ dedotta anch' eſſa dalla formola indefinita (B) ſi può ſtabilire infinitamente minore di $\frac{c^2 dy}{y^2}$. Ciò poſto ſi otterrebbe $c^2 dx = 0$, e quindi integrando $c^2 x = N$, e qualunque foſſe la y, dovrebb' eſſere $x = \frac{N}{c^2}$, cioè uguale ad una coſtante. Richiedono le condizioni del Problema, che x poſſa ricevere due valori coſtanti $x = 0$, $x = g$. Accettato il ſecondo, ad $x = g$ ſi riferirebbe qualunque valore di y fra i limiti b, c: ma per la formola $-\frac{c^2 dy}{y^2} = 0$ a qualſivoglia grandezza di x fra il nulla, e g dee corriſpondere $y = b$; dunque reſta determinato il gorgo (*Fig.* 3.) $ECSTDF$, in cui l' acqua è fornita della minima forza viva. Suppoſta $x = 0$, potrebbe y ricevere tutti i valori fra b, e c. E poichè per la formola $-\frac{c^2 dy}{y^2} = 0$ eſſer dee ſempre $y = c$, aſſegnato ad x qualunque valore fra il nulla e g; ne proviene il gorgo $SeEFfT$ (condotte Ee, Ff parallele a GZ) la cui acqua è dotata della maſſima forza viva.

XX. Le due ſuppoſizioni di $-\frac{c^2 dy}{y^2} = 0$, $\frac{c^2 dx}{y^2} = 0$ ci guidano alla concluſione, che ſia nulla quell' altezza, in cui gradatamente ſi paſſa dalla velocità conveniente alla ſezione b alla velocità, che compete alla ſezione c. Succede ciò o nel ſito CD, o nel ſito ST, ſecondochè la forza viva dell' acqua nel gorgo è minima, o maſſima. Una tal altezza uguale a nulla non appartiene alla Fiſica, la quale può ſoltanto ſupporla minima sì ma finita. Nel Problema I. della citata Annotazione ho ſuppoſto minima e traſcurabile la forza viva dell' acqua nel gorgo. Un effetto equivalente naſce ammettendo per la curva $SS'ME$, che genera il gorgo, l' equazione $\frac{r^{\infty}}{e^{\infty}}.(e^{\infty}-x^{\infty})=p^{\infty}$, eſſendo traſcurabile la differenza fra le forze vive dell' acqua $SS'MEFNT'T$, e dell' acqua $SCDT$. Se non ſi doveſſero evitare i ſoverchj fregamenti, e le particole acquee foſſero infiniteſime, baſterebbe un menomiſſimo ſpazio $Z'G$, nel quale ſi faceſſe tranſito dalla velocità conveniente alla ſezione $S'T'=ST$ adequatamente a quella che compete alla ſezione EF. Ma tentando la gravità dell' acqua d' eſercitare la maſſima azione, ed eſſendo queſta tanto maggiore, quanto ſono minori le reſiſtenze, ed oltre a ciò eſſendo le particole acquee piccioliſſime sì ma finite; egli è neceſſario, che lo ſpazio $Z'G$ ſia tale, che poſſa eſſere compoſto da innumerabili ſtrati d' acqua, la velocità dei quali vada gradatamente creſcendo, e di più la curva $S'ME$ ſia quanto baſta diſtante dalle pareti, e dal fondo del vaſo. Il perchè la natura ſceglierà per la figura del gorgo l' elliſſe SME di quel grado, che laſci un conveniente ſpazio $SMECS'$ fra il gorgo, le pareti, ed il fondo del vaſo, onde minorate le reſiſtenze, eſerciti la gravità dell' acqua la maſſima poſſibile azione.

XXI. Si conchiuda pertanto, che il metodo delle Variazioni ſerve alla ſoluzione del propoſto Problema col mezzo delle formole $-\frac{c^2dy}{y^2}=0$, $\frac{c^2dx}{y^2}=0$, preſcindendo dalle reſiſtenze, e ſupponendo infiniteſime le particole acquee, dimodochè lo ſpazio piccioliſſimo $Z'G$ baſti, ſalvata la legge di continuità, per paſſare dalla velocità ſpettante alla ſezione $S'T'$ all' altra, che appartiene alla ſezione EF. Il valore coſtante $y=b$ mi dà la minima forza viva dell' acqua nel gorgo, ed il valore coſtante $y=c$ mi dà la maſſima. Ai mentovati minimo, e maſſimo ci poſſiamo accoſtare bensì, ma non giammai pervenirvi, a cagione di dover paſſar l' acqua dalla velocità propria della ſezione $ST=b$ a quella, che conviene alla ſezione $EF=c$ col mezzo d' infiniti inaſſegnabili incrementi. Alla curva $SS'ME$ generante il gorgo, la cui equazione $\frac{r^{\infty}}{e^{\infty}} \cdot (e^{\infty} - x^{\infty}) = p^{\infty}$, proccura la natura di accoſtarſi quanto lo permettono le reſiſtenze, e la grandezza menomiſſima delle particole acquee, ma dentro i limiti del finito.

XXII. Do compimento alla preſente Memoria con una rifleſſione, che ſembrami molto importante. Si può dubitare che ſia una continuazione del gorgo la porzione di vena $EFF'E'$ ſituata tra il foro EF, e la maſſima ſua contrazione $E'F'$. In queſta ipoteſi la curva SME, che colla ſua rivoluzione intorno all' aſſe ZG genera la figura del gorgo, non potrebb' eſſer un' elliſſe: ma io l' ho dimoſtrata tale; dunque la curva EE' non è una continuazione dell'elliſſe SME. Qual è dunque l' indole della curva EE'? Riſtrignendoſi gli ſtrati acquei procedendo da ST verſo EF, l'acqua guadagna qualche velocità da M, e da N verſo O, la quale, non eſſendo ſenſibilmente coſtipabili le particole acquee, ben preſto prende la direzione OG, onde le velocità degli ſtrati ST, MN, EF per la detta direzione ſtiano in ragion inverſa delle ſezioni ST, MN, EF. Dalle velocità per le direzioni EG, FG nel ſito EF, e dall' uſcir l' acqua rarefatta dal foro EF, dipende il riſtrignimento della vena. Applicando al foro EF un cannone convergente, ſi ſuol far retto il lato EE'. Se le velocità della particola E per le direzioni EG, GG' foſſero coſtanti, ſarebbe EE' una linea retta: ma annullandoſi nel ſito $E'G'$ della maſſima contrazion della vena la velocità per EG', e poco creſcendo la velocità per GG'; il lato EE' è una curva, che volge il conveſſo GG'. Sia giuſta il Cav. *Newton* il diametro del foro $EF = \frac{25}{40}$ di dito, ed alla diſtanza $GG' = \frac{20}{40}$ corriſponderà il più riſtretto diametro della vena $E'F' = \frac{21}{40}$. Le velocità dunque della particola E per le direzioni GG', EG ſtarebbero come $20 : \frac{25 - 21}{2} = 2$, ovvero come $10 : 1$, ſe la velocità per EG

foſſe

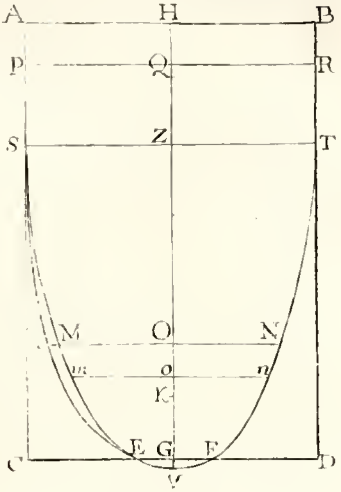

A
H
B
P
Q
R
S
Z
T
M
O
N
m
o
n
K
E
G
F
C
V
D

Fig : II.

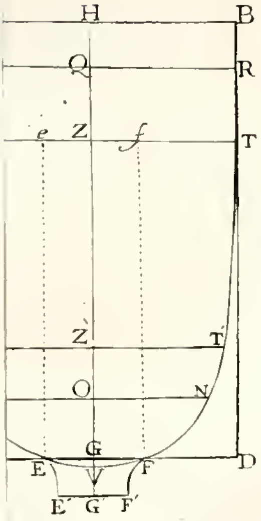

H
B
Q
R
e
Z
f
T
Z'
T'
O
N
G
E
V
F
D
E'
G'
F'

Fig : III.

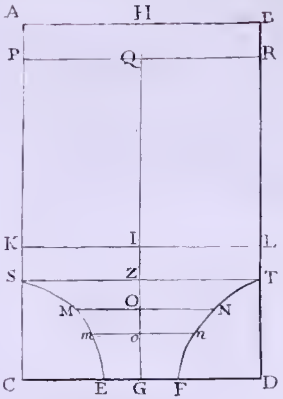

A
H
B
P
Q
R
K
I
L
S
Z
T
M
O
N
m
o
n
C
E
G
F
D

Fig: I.

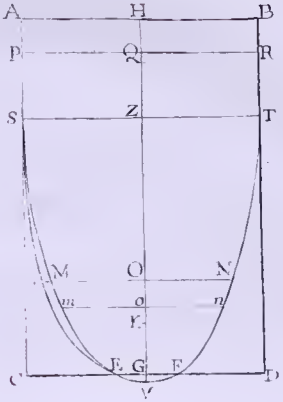

A
H
B
P
Q
R
S
Z
T
M
O
N
m
o
n
Y
E
G
F
C
D
V

Fig: II.

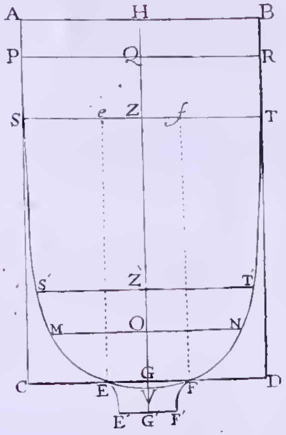
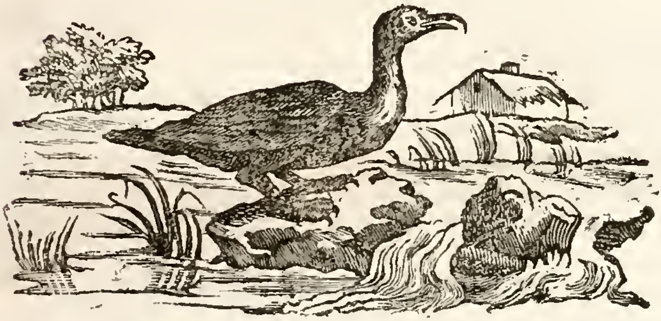

A
H
B
P
Q
R
S
e
Z
f
T
S'
Z'
T'
M
O
N
G
C
E
V
F
D
E'
G'
F'

Fig: III.

foſſe equabile: ma poichè queſta ſi eguaglia a nulla nel ſito $E'G'$; la velocità per GG' a quella per EG ſi riferirà in minor proporzione di 10:1.

S' inferiſca pertanto, che la curva EE' non è una continuazion dell' elliſſe SME. Volge queſta il concavo verſo l' aſſe ZG', e quella tutto al contrario il conveſſo, così richiedendo la velocità per la direzione EG, che s' annienta nel ſito $E'G'$ della maſſima contrazion della vena.



OPPOSIZIONE

DEL NUOVO PIANETA

Oſſervata nel 1783

Dal Sig. Giuseppe Slop de Cadenberg Pubblico Profeſſore d' Aſtronomia nell' Univerſità di Piſa.

PEr le continue nuvole, che coprirono il cielo, non fu poſſibile oſſervare il pianeta al quadrante *Murale* prima del dì 8 Gennajo 1784, cioè nove giorni dopo dell' oppoſizione. Suſſeguentemente il pianeta fu riviſto il dì 21 dell' iſteſſo meſe; ma ſiccome i di lui moti geocentrici ſono nelle vicinanze dell' oppoſizione molto regolari e quaſi uniformi, ed inoltre abbaſtanza conoſciuti per le oſſervazioni degli anni precedenti, abbiam creduto di poter dedurne con ſufficiente ſicurezza da queſte due ſole oſſervazioni il tempo dell' oppoſizione. Le ſtelle fiſſe, alle quali fu paragonato il pianeta erano η, μ, ε e δ della coſtellazione dei Gemini. I loro luoghi apparenti ſono dedotti per il dì 8 Gennajo dai Cataloghi di *Mayer*, *Bradlej*, e dell' Abbate della *Caille*. Noi ci ſiam ſerviti di quelli di *Mayer* per le ſtelle η ed ε, e di quelli di *Bradlej* per le ſtelle μ e δ, tenendo conto dei piccoli loro moti apparenti per l' oſſervazione del dì 21.

Dal Catalogo di Mayer.

η dei Gemini Aſcenſione retta	$3^{s}.\ 0.^{g}\ 28'.\ 3''$, 4
Declinazione boreale	0. 22. 23. 17, 0
μ dei Gemini Aſcenſione retta	3. 2. 28. 41, 7
Declinazione boreale	0. 22. 36. 30, 2
ε dei Gemini Aſcenſione retta . , ...	3. 7. 39. 59, 2
Declinazione boreale	0. 25. 19. 45, 8

δ dei Gemini	Aſcenſione retta	$3^{s}.\ 16^{g}.\ 48'\ 35''$, 2
	Declinazione boreale	0. 22. 21. 54, 3

Dal Catalogo di Bradlej.

η dei Gemini	Aſcenſione retta	3. 0. 28. 6, 7
	Declinazione boreale	0. 22. 33. 13, 4
μ dei Gemini	Aſcenſione retta	3. 2. 28. 48, 2
	Declinazione boreale	0. 22. 36. 26, 5
ε dei Gemini	Aſcenſione retta	3. 7. 40. 3, 2
	Declinazione boreale	0. 25. 19. 44, 3
δ dei Gemini	Aſcenſione retta	3. 16. 48. 42, 6
	Declinazione boreale	0. 22. 21. 52, 6

Dal Catalogo di Stelle Zodiacali dell' Ab. de la Caille.

η dei Gemini	Aſcenſione retta	3. 0. 27. 56, 5
	Declinazione boreale	0. 22. 33. 19, 2
μ dei Gemini	Aſcenſione retta	3. 2. 28. 39, 7
	Declinazione boreale	0. 22. 36. 31, 3
ε dei Gemini	Aſcenſione retta	3. 7. 40. 2, 5
	Declinazione boreale	0. 25. 19. 41, 8
δ dei Gemini	Aſcenſione retta	3. 16. 48. 29, 6
	Declinazione boreale	0. 22. 21. 57, 1

Il dì 8 *Gennajo tempo medio* $11.^{ore}\ 28'.\ 21''$.

Differenza oſſervata fra il pianeta ed η dei Gemini

Nell' Aſcenſione retta	+	0. 9. 53. 6, 2
Nella Declinazione	+	0. 0. 56. 46, 7
Differenza nella Declinazione corretta dalla refrazione	+	0. 0. 56. 47, 8
Aſcenſione retta del pianeta		3, 10. 21. 9, 6
Declinazione boreale		0. 23. 30. 4, 8

8 *Gennajo t. m.* $11.^{ore}\ 28'.\ 21''$.

Differenza oſſervata fra il pianeta e μ dei Gemini

In Aſcenſione retta	+	0. 7. 52. 21, 5

In Declinazione	+	0^s. 0^g. 53'. 30'', 0
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	+	0. 0. 53. 31, 0
Aſcenſione retta del pianeta		3. 10. 21. 9, 7
Declinazione boreale		0. 23. 29. 57, 5

8 *Gennajo t. m.* 11.^{ore} 28'. 21''.

Differenza oſſervata fra il pianeta ed ε dei Gemini

In Aſcenſione retta	+	0. 2. 41. 17, 7
In Declinazione	—	0. 1. 49. 41, 8
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	—	0. 1. 49. 43, 9
Aſcenſione retta del pianeta		3. 10. 21. 16, 9
Declinazione boreale		0. 23. 30. 1, 9

Fatta una giuſta eſtimazione delle deſcritte oſſervazioni (1) ſi ha per l' iſteſſo tempo

I luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3. 10. 21. 12, 8
Declinazione boreale	0. 23. 30. 1, 4
Longitudine	3. 9. 29. 12, 1
Latitudine boreale	0. 0. 22. 15, 8

Il dì 21 *Gennajo t. m.* 10.^{ore} 35'. 55''.

Differenza oſſervata fra il pianeta ed ε dei Gemini

Nell' Aſcenſione retta	+	0. 2. 6. 27, 8
Nella Declinazione	—	0. 1. 47. 22, 0
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	—	0. 1. 47. 24, 1
Aſcenſione retta del pianeta		3. 9. 46. 27, 8
Declinazione boreale		0. 23. 32. 21, 9

21 *Gennajo t. m.* 10.^{ore} 35'. 55''.

Differenza oſſervata fra il pianeta e δ dei Gemini

In Aſcenſione retta	—	0. 7. 2. 30, 9

---

(1) Vedi *Novi planetæ obſervationes & theoria* pag. 26.

In Declinazione	+	0^s.	1^g.	10'.	22'', 7
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	+	0.	1.	10.	24, 1
Aſcenſione retta del pianeta		3.	9.	46.	13, 4
Declinazione boreale		0.	23.	32.	16, 8

Preſo un medio fra le due oſſervazioni ſi avranno per l' iſteſſo tempo

I luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3.	9.	46.	20, 6
Declinazione boreale	0.	23.	32.	19, 3
Longitudine	3.	8.	57.	8, 1
Latitudine boreale	0.	0.	22.	19, 9

Il dì 8 Gennajo per il momento dell' oſſervazione ſi trova dalle tavole del *Mayer* la longitudine del Sole 9^s. 18^g. 24'. 53'', 7, onde in quel tempo era già ſtato percorſo col moto relativo del pianeta dal Sole un arco di 8^g. 55'. 41'', 6 dopo dell'oppoſizione. Il dì 8 Decembre del 1783 a $11.^{ore}$ 28'. 21'' di t. m. ſi ha dall' iſteſſe tavole la longitudine del Sole 9^s. 9^g. 14'. 39'', 9, ed il ſuo moto in longitudine dal dì 3 Decembre all'8 Gennajo 9^g. 10'. 13'', 8. Il moto geocentrico del pianeta nell'iſteſſo intervallo di tempo ſi deduce dalle tavole del pianeta del Ch. Sig. *Barnaba Oriani* inſerite nelle Effemeridi di Milano del 1785 0^g. 23'. 22'', 3, onde l' arco 8^g. 55'. 41'', 6, che dopo ſeguita l' oppoſizione il dì 8 Gennajo era ſtato deſcritto col moto relativo del pianeta dal Sole, doveva deſcriverſi nell'intervallo di 8 giorni $9.^{ore}$. 43'. 30'' di tempo medio. L' oppoſizione apparente ſeguì dunque il dì 31 Decembre 1783 a $1.^{ora}$ 44'. 51'' di t. m. nel qual tempo la longitudine del Sole ſi ha dalle tavole 9^s. 9^g. 51'. 3'', 0, onde la longitudine geocentrica apparente del pianeta era per il momento dell' oppoſizione 3^s. 9^g. 51'. 3'', 0. Corretta queſta dalle due piccole equazioni, che abbiamo altrove deſcritte, ſi avrà finalmente per l'iſteſſo tempo dell' oppoſizione la longitudine eliocentrica vera 3^s. 9^g. 50'. 44'', 0, e l' iſteſſa nell' orbita del pianeta 3^s. $9.^g$ 50'. 51'', 0.

Oppoſizione del nuovo pianeta oſſervata l' anno 1785.

Il Pianeta fu oſſervato al quadrante *Murale* inſieme con le ſtelle ζ, δ e ρ della coſtellazione dei Gemini il 26 e 28 Decembre, ed il 10 ed 11 Gennajo, cioè nelle ſere in cui il tempo lo permiſe. Noi riporteremo i luoghi apparenti delle fiſſe dedotti per il dì 28 Decembre dai cataloghi delle ſtelle Zodiacali del *Mayer*, dell' Ab. *della Caille*, e da quello di *Bradlej*, che ſi trova inſerito nell' Almanaco Nautico e Aſtronomico di *Maſkelin* per il 1773. Nelle oſſervazioni degli altri giorni abbiamo tenuto conto dei piccoli moti apparenti delle fiſſe, facendo ſempre uſo dei luoghi dedotti dal catalogo di *Bradlej*.

Dal Catalogo di Mayer.

ζ dei Gemini Aſcenſione retta	3^s. 12^g. 50'. 45'', 1
Declinazione boreale	0. 20. 52. 4, 6
δ dei Gemini Aſcenſione retta	3. 16. 49. 32, 4
Declinazione boreale	0. 22. 21. 47, 4
ρ dei Gemini Aſcenſione retta	3. 18. 44. 56, 2
Declinazione boreale	0. 21. 52. 14, 8

Dal Catalogo di Bradlej.

ζ dei Gemini Aſcenſione retta	3. 12. 50. 47, 1
Declinazione boreale	0. 20. 52. 12, 4
δ dei Gemini Aſcenſione retta	3. 16. 49. 39, 8
Declinazione boreale	0. 22. 21. 45, 7
ρ dei Gemini Aſcenſione retta	3. 18. 45. 2, 8
Declinazione boreale	0. 21. 52. 11, 1

Dal Catalogo di ſtelle Zodiacali dell' Ab. de la Caille.

ζ dei Gemini Aſcenſione retta	3. 12. 50. 24, 7
Declinazione boreale	0. 20. 52. 7, 2
δ dei Gemini Aſcenſione retta	3. 16. 49. 26, 8
Declinazione boreale	0. 22. 21. 50, 7

ρ dei Gemini Aſcenſione retta		$3^{s}. 18^{g}. 45'. 39'', 3$
Declinazione boreale		0. 21. 52. 10, 1

Il dì 26 Decembre tempo medio 12.^{ore} 39′. 32″.

Differenza oſſervata fra il pianeta e ζ dei Gemini

Nell' Aſcenſione retta	+	0. 3. 12. 19, 1
Nella Declinazione	+	0. 2. 12. 15, 8
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	+	0. 2. 12. 19, 8

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3. 16. 3. 15, 8
Declinazione boreale	0. 23. 4. 32, 2
Longitudine	3. 14. 44. 23, 2
Latitudine boreale	0. 0. 25. 29, 4

26 *Decembre t. m.* 12.^{ore} 39′. 32″.

Differenza oſſervata fra il pianeta e ρ dei Gemini

Nell' Aſcenſione retta	—	0. 2. 41. 43, 4
Nella Declinazione	+	0. 1. 12. 19, 4
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	+	0. 1. 12. 20, 8

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3. 16. 3. 18, 9
Declinazione boreale	0. 23. 4. 31, 9
Longitudine	3. 14. 44. 26, 1
Latitudine boreale	0. 0. 25. 29, 4

Preſo un medio fra le due oſſervazioni ſi avrà per l' iſteſſo tempo

Longitudine del pianeta	3. 14. 44. 24, 7
Latitudine boreale	0. 0. 25. 29, 4

Il dì 28 *Decembre t. m.* 12.^{ore} 31′. 17″.

Differenza oſſervata fra il pianeta e ζ dei Gemini

In Aſcenſione retta	+	0. 3. 6. 54, 6

In Declinazione	+	0^s. 2^g. $13'$. $0''$, 7
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	+	0. 2. 13. 3, 4

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3. 15. 57. 41, 7
Declinazione boreale	0. 23. 5. 15, 8
Longitudine	3. 14. 39. 12, 9
Latitudine boreale	0. 0. 25. 38, 8

28 *Decembre t. m.* 12.^{ore} 31'. 17''.

Differenza oſſervata fra il pianeta e δ dei Gemini

In Aſcenſione retta	—	0. 0. 51. 45, 9
In Declinazione	+	0. 0. 43. 26, 6
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	+	0. 0. 43. 27, 4

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3. 15. 57. 53, 9
Declinazione boreale	0. 23. 5. 13, 1
Longitudine	3. 14. 39. 24, 4
Latitudine boreale	0. 0. 25. 37, 4

28 *Decembre t. m.* 12.^{ore} 31'. 17''.

Differenza oſſervata fra il pianeta e ρ dei Gemini

Nell' Aſcenſione retta	—	0. 2. 47. 15, 9
Nella Declinazione	+	0. 1. 13. 0, 4
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	+	0. 1. 13. 1, 8

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3. 15. 57. 46, 9
Declinazione boreale	0. 23. 5. 12, 9
Longitudine	3. 14. 39. 18, 0
Latitudine boreale	0. 0. 25. 36, 5

Preſo un medio fra le tre oſſervazioni ſi avrà per l' iſteſſo tempo

Longitudine

Longitudine del pianeta	3^s.	14^g.	39′.	18″,	4
Latitudine boreale	0.	0.	25.	37,	6

Il dì 10 *Gennajo t. m.* 11.^{ore} 37′. 43″.

Differenza osservata fra il pianeta e ζ dei Gemini

Nell' Aſcenſione retta	+	0.	2.	30.	18,	9
Nella Declinazione	+	0.	2.	16.	40,	1
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	+	0.	2.	16.	42,	8

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3.	15.	21.	8,	5
Declinazione boreale	0.	23.	8.	54,	6
Longitudine	3.	14.	5.	24,	0
Latitudine boreale	0.	0.	25.	39,	5

10 *Gennajo t. m.* 11.^{ore} 37′. 43″.

Differenza osservata fra il pianeta e δ dei Gemini

Nell' Aſcenſione retta	—	0.	1.	28.	18,	9
Nella Declinazione	+	0.	0.	47.	7,	9
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	+	0.	0.	47.	8,	8

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3.	15.	21.	23,	6
Declinazione boreale	0.	23.	8.	54,	2
Longitudine	3.	14.	5.	37,	8
Latitudine boreale	0.	0.	25.	40,	6

10 *Gennajo t. m.* 11.^{ore} 37′. 43″.

Differenza osservata fra il pianeta e ρ dei Gemini

Nell' Aſcenſione retta	—	0.	3.	23.	45,	9
Nella Declinazione	+	0.	1.	16.	40,	1
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	+	0.	1.	16.	41,	6

Luoghi apparenti del pianeta

Aſcenſione retta	3^{s}.	15^{g}.	21′.	19″, 9
Declinazione boreale	0.	23.	8.	52, 3
Longitudine	3.	14.	5.	34, 6
Latitudine boreale	0.	0.	25.	38, 5

Preſo un medio fra le tre oſſervazioni ſi avrà di nuovo per l' iſteſſo tempo

Longitudine apparente del pianeta	3.	14.	5.	32, 1
Latitudine boreale	0.	0.	25.	39, 5

Il dì 11 *Gennajo t. m.* 11.^{ore} 33′. 38″.

Differenza oſſervata fra il pianeta e ζ dei Gemini

In Aſcenſione retta	+	0.	2.	27.	42, 3
In Declinazione	+	0.	2.	16.	53, 0
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	+	0.	2.	16.	55, 7

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3.	15.	18.	32, 1
Declinazione boreale	0.	23.	9.	7, 5
Longitudine	3.	14.	2.	59, 9
Latitudine boreale	0.	0.	25.	37, 3

11 *Gennajo t. m.* 11.^{ore} 33′. 38″.

Differenza oſſervata fra il pianeta e δ dei Gemini

In Aſcenſione retta	—	0.	1.	30.	58, 9
In Declinazione	+	0.	0.	47.	19, 0
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	+	0.	0.	47.	19, 9

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3.	15.	18.	43, 8
Declinazione boreale	0.	23.	9.	5, 3
Longitudine	3.	14.	3.	10, 4
Latitudine boreale	0.	0.	25.	36, 2

Preſo un medio fra le due oſſervazioni ſi avrà per l' iſteſſo tempo

La longitudine apparente del pianeta . .	$3^s.\ 14^g.\ 3'.\ 5''$, 1
Latitudine boreale	0. 0. 25. 36, 8

Il dì 28 Decembre per il momento dell' oſſervazione ſi ha dalle tavole del *Mayer* la longitudine del Sole $9^s.\ 8^g.\ 1'.\ 5''$, 5 , onde reſtava un arco di $6^g.\ 38'.\ 12''$, 9 da deſcriverſi col moto relativo del pianeta dal Sole prima dell' oppoſizione. Il dì 10 Gennajo la longitudine del Sole ſi deduce dall' iſteſſe tavole per il tempo dell' oſſervazione $9^s.\ 21^g.\ 13'.\ 58''$, 7, il moto dunque del Sole in longitudine dal dì 28 Decembre al 10 Gennajo, cioè in giorni $12.\ 23.^{ore}\ 6'.\ 26''$. di tempo medio, fu di $13^g.\ 12'.\ 53''$, 2. Il moto del pianeta fu oſſervato nell' iſteſſo intervallo di tempo di $0^g.\ 33'.\ 46''$, 3, onde il moto relativo del pianeta dal Sole ſi ha per l' iſteſſo tempo di $13^g.\ 46'.\ 39''$, 5. Ciò poſto l' arco di $6^g.\ 38'.\ 12''$, 9, che doveva deſcriverſi col moto relativo del pianeta dal Sole prima dell' oppoſizione, fu realmente deſcritto in giorni $6.\ 5.^{ore}\ 51'.\ 56''$ di tempo medio. L' oppoſizione apparente ſeguì dunque l' anno 1785. al dì tre Gennajo a $18.^{ore}\ 23'.\ 13''$ di tempo medio, nel qual tempo eſſendo ſecondo le tavole la longitudine del Sole di $9^s.\ 14^g.\ 23'.\ 2''$, 0, la longitudine apparente geocentrica del pianeta doveva eſſere di $3^s.\ 14^g.\ 23'.\ 2''$, 0 . Fatto uſo come ſopra delle due piccole equazioni, ſi avrà dunque la longitudine eliocentrica vera del pianeta per il momento della ſua apparente oppoſizione $3^s.\ 14^g.\ 22'.\ 38''$, 1, e l' iſteſſa longitudine nell' orbita del pianeta $3^s.\ 14^g.\ 22'.\ 46''$, 1.

CONSIDERAZIONI OTTICHE

Del Sig. Ab. GIAMBATTISTA VENTURI Profeſſore di Filoſofia e Matematica nell' Univerſità di Modena.

ARTICOLO I.

Si dimoſtra la falſità del metodo, che tengono varj Fiſici per miſurare la Diſperſione dei raggi nelle varie ſoſtanze rifrangenti; e ſi ſtabiliſce la vera teoria delle fimbrie colorate del Priſma contro ciò che ha detto il Sig. Beguelin *negli Atti di Berlino* 1764.

1. E' Noto ai fiſici, che un raggio ſolare introdotto nella camera oſcura e rotto nel priſma dipinge ſul muro oppoſto l' imagine del Sole allungata e diſteſa ne' ſuoi colori diverſi; ed è pur noto dopo le eſperienze del *Newton*, che tali colori e tale allungamento d' immagine proviene dalla diverſa rifrangibilità delle fila diverſe, ond' è compoſto il raggio bianco; le quali fila nell' atto della rifrazione rimangono ſeparate e divergenti fra loro per un certo angolo che chiamaſi *l' angolo di diſperſione*. Il determinare con eſattezza la quantità di un tale angolo rieſce di grave importanza nella pratica egualmente che nella teoria dell' Ottica; dipendendo da ciò e la miſura degli errori di rifrangibilità negli iſtromenti diottrici, e la coſtruzione delle lenti acromatiche, e tutto quant' è il preciſo della dottrina Neutoniana intorno alla luce. Ora poichè le fimbrie colorate, di cui s' adornano gli orli di un corpo guardato attraverſo del priſma, ſono un fenomeno analogo al primo dell' immagine variotinta del Sole entro la camera oſcura; e poichè la ſteſſa diſeguale rifrangibilità ſi è la cagione dell' un fenomeno e dell' altro egualmente; quindi era facile a conchiudere, che la grandezza apparente delle fimbrie colorate è eguale all' angolo di diſperſione dei raggi paſſati attraverſo del priſma, e che però la grandezza ſuddetta apparente può ſervir di mi-

ſura a queſt'angolo. Così han conchiuſo di fatti, e ne hanno anche applicato la concluſione alla pratica varj di quei moderni filoſofi, i quali dopo la ſcoperta di *Dollond* ſi ſono accinti a dare la teoria delle lenti acromatiche. Tra queſti ſingolarmente il Sig. *Beguelin* oltre ad avere nelle Memorie dell' Accademia Real di Berlino degli anni 1762, e 1763 data la ſpiegazione dei priſmi acromatici, e la coſtruzione delle lenti ſimili dipendentemente dall' eguaglianza dell' angolo ottico, che forman nell'occhio le fimbrie colorate coll' angolo di diſperſione nell' eſperienza della camera oſcura; ha poi nelle ſteſſe Memorie all' anno 1764 fondato ſulla medeſima ſuppoſizione una analiſi delle ſteſſe fimbrie colorate, e varie conſeguenti oſſervazioni, le quali ſe foſſer vere, riuſcirebbono di non leggero incomodo ai dogmi comunemente adottati nell' Ottica. Ad una tale, ſe mi è lecito dirla, o imperfezione della teoria, o inavvertenza degli ottici, mi propongo io qui di ſupplire con due Teoremi, che pongano nel ſuo vero lume l' affare, e la teoria in ſicurezza.

TEOREMA I.

2. *Se un faſcetto di raggi omogenei uſciti da* A (*Fig.* I.) *infinitamente vicini tra loro ſoffre nel priſma* PMN *la rifrazione minima; l' angolo* F, *che forman tra loro i raggi eſtremi del faſcetto dopo l' intera rifrazione, pareggia l' angolo* A *che formavano prima di cadere ſul priſma.*

DIMOSTRAZIONE.

Il Sig. *Barrow* ha provato, che i raggi AB dopo la prima rifrazione in B vanno divergenti da un punto Q con un certo angolo Q. Qualunque ſia queſto punto e queſt' angolo, s' intenda condotta per lo punto B, che è il medio del faſcetto QB, un altra ſuperficie XZ d' egual forza rifrangente con PM, e poſta in guiſa, che l' angolo $QBX = QBM$. Poi prendaſi un altro punto raggiante V tale, che ſia $VB = AB$ e l' angolo $VBX = ABM$; e da queſto punto vada il faſcetto VB a rifrangerſi nella ſuperficie XZ con un angolo $V = A$. E' evidente, che il foco e la divergenza di queſto nuovo faſcetto VB dopo la rifrazione in XZ ſarà il punto e l' angolo Q, quel medeſimo, che apparteneva prima al faſcetto AB rifratto dalla ſuperficie PM. Ora eſſendo BC per l' ipoteſi la via della minima rifrazione, ſarà PBC un triangolo iſoſcele; e però l'angolo $QBX = QBM = PBC = PCB$; onde ſarà XZ parallela a PC. Dunque i raggi uſciti da V dopo eſſerſi rifratti in B ed in C uſciranno per la via CD paralleli a ſe medeſimi; e però l' angolo $F = V = A$. Ma per la rifrazione in C è indifferente, che i raggi ſieno uſciti da V o da A, giacchè la loro direzione e divergenza per QBC è la medeſima in ambidue i caſi. Dunque ecc. *C. D. P.*

TEOREMA II.

3. *La grandezza apparente delle fimbrie colorate, che l'occhio vede in un oggetto attraverſo il priſma, ſta alla diſperſione dei raggi prodotta nel medeſimo priſma, proſſimamente come la diſtanza dell' obbietto dal priſma ſta alle due diſtanze inſieme dell' obbietto e dell' occhio dal priſma: poſta ſempre nel priſma la rifrazione minima.*

Sia un punto viſibile A (*Fig. II.*), da cui uſcendo un raggio bianco AB mandi attraverſo il priſma PMN il ſuo filo di rifrazion media oſſia il verde per la via BCD a ferir l' occhio poſto in D; e ſia ABC la via della rifrazion minima per lo raggio verde, cioè ſia PBC un triangolo iſoſcele. Il raggio violetto uſcito da A per la direzione AB volgerà per BEO, facendo col raggio verde l'angolo DLO, il quale ſarà la miſura della diſperſione tra il raggio medio oſſia verde, e l' eſtremo violetto. Ma eſſo raggio EO non potrà entrare inſieme col ſuo verde entro la pupilla dell' occhio poſta in D: bensì vi entrerà un altro raggio violetto AG, il quale cadendo più verſo l' angolo rifrangente del priſma volgerà per GHD, e verrà a fare nell' occhio col raggio verde l'angolo D; il quale angolo ſarà la miſura della grandezza apparente della linea colorata, in cui l'occhio D vedrà allungato l' oggetto A dalla rifrazione del priſma. Ora ſi prolunghino AB, DC ſino ad incontrarſi dentro il priſma in T. Dico eſſere proſſimamente l'angolo $D : DLO = AT : AT + TD$.

DIMOSTRAZIONE.

Si prolunghi il raggio violetto HD ſino ad incontrare il ſuo incidente in R, e l' altro violetto EO in F. Si conduca RT. E poichè i tre raggi $ABCD$, $ABEO$, $AGHD$ forman l' uno coll' altro angoli aſſai piccoli, ſi potranno conſiderar queſti come angoli minimi; e però la retta RT ſi potrà conſiderare come formante angoli eguali colle due rette TA, TD. Sarà dunque $D:A = AT:TD$. Ma $A = F$ (Teor. I.). Dunque $D:F = AT:TD$. E però $D:D+F = AT:AT+TD$. Ma nel triangolo FDL l' angolo eſterno $DLO = D+F$. Dunque $D:DLO = AT:AT+TD$. Come D. P.

COROLLARIO I.

4. Se $AT = TD$, ſarà $D = \frac{1}{2} DLO$. E queſta dovette eſſere all' incirca la circoſtanza con cui il Sig. *Lambert* iſtituì le ſue eſperienze, quando con un priſma di 60° non trovò la grandezza delle fimbrie ſe non di $0^\circ.\,52\frac{1'}{2}$; mentre il Sig. *Newton* trova la diſperſione dello ſteſſo priſma di $1^\circ.\,48\frac{1'}{2}$. (*Beguelin* ibid. §. 30).

COROLLARIO II.

5. Se l' oggetto tocca il priſma in B, e l' occhio ne è lontaniſſimo; in tal caſo la ragione $\frac{AT}{AT+TD}$ ſvaniſce, e ſvaniſcono anche le fimbrie colorate, il quale è uno dei fenomeni, che il Sig. *Beguelin* non ſa combinare colla teoria (*Beguelin ib.* §. 34). Ben è vero, che ſe il punto B è aſſai diſcoſto dall' angolo rifrangente P, e l' occhio aſſai vicino al priſma, le fimbrie compariſcono anche nell' oggetto che tocca il priſma; ed io difatti, uſando la debita attenzione, ve le ho rinvenute. Ma ſiccome i priſmi conſueti di

criſtallo non ſogliono permettere molta diſtanza tra P e B; e ſiccome un occhio, il quale non ſia aſſai miope, non può accoſtarſi molto al priſma ſenza conſonder l' immagine dell' oggetto poſto in B; così può avvenire, che a taluno ſembrino in tal caſo ſvanite le fimbrie. Tanto più, che eſſendo $AT < TD$, la retta TR piega un poco verſo F; onde rimane D minore ancora un poco oltre a quanto importerebbe la proporzione del Teorema.

COROLLARIO III.

6. Non può eſſere ſtata altro che inavvertenza quella la quale ha fatto chiedere il Sig. d' *Alembert* (Opuſcul. tom. 3. n. 963), perchè noi non veggiamo colorato l' orlo degli obbietti poſti ſott' acqua, " ſur tout ſi l' oeil eſt.... à une „ aſſez grande diſtance de la ſurface refringente, pour que „ l' écartement des rayons produiſe un effet ſenſible? „ Giacchè la diſtanza dell' occhio è appunto quella che fa ſvanire le fimbrie.

ARTICOLO II.

Si eſamina coll' eſperienza, ſe gli umori dell' occhio formino una combinazione acromatica; e ſi dà la miſura della loro aberrazione di rifrangibilità.

7. Quando nel 1747 il Sig. *Euler* (*a*) a perfezionare gli iſtromenti diottrici moſſe quei primi sforzi, i quali fra il contraſto delle opinioni fecero poi naſcere le lenti acromatiche; partì egli da queſto principio: " che gli umori dell' „ occhio erano dalla natura diſpoſti in guiſa di riunir tutti „ i raggi partiti da un ſol punto luminoſo in un ſol punto „ della retina, quantunque foſſero i medeſimi raggi diverſi „ fra loro di rifrangibilità „. E con queſto principio medeſimo ſi tenne poi egli forte nella lite agitata con *Dollond* (*a*); ſenza

---

(*a*) Mem. de Berlin 1747.

(*a*); ſenza che i ſuoi avverſarj ardiſſero contraſtargli un tale aſſunto. Anzi degli Ottici poſteriori alcuni hanno adottato ſenz' altro queſto acromatiſmo dell' occhio, come il Conte di *Rederu* (*b*), *Beguelin* (*c*), ed *Hennert* (*d*): altri ne hanno ommeſſo l' eſame, come *Boſcovich* (*e*), *Clairaut* (*f*): e finalmente il Sig. *d' Alembert* (*g*) dopo avere propoſti alcuni mezzi per aſſicurarſi del fatto, gli confeſſa poi egli ſteſſo mezzi intentabili in pratica; e ſi riduce a concludere, che qualunque ſia l' aberrazione dei colori nell' occhio, eſſa deve eſſere inſenſibile e incomparabilmente minore di quella aberrazione, a cui andrebbe ſoggetta una lente di vetro, la quale voleſſe ſoſtituirſi agli umori dell' occhio ſteſſo. Quanto ciò ſia vero, lo vedremo fra poco. Intanto oſſervo che il *Newton* avea già nelle lezioni ottiche (Par. 1. Sez. 2. verſo la fine) dubitato di queſta vantata prerogativa dell' occhio; e quantunque confeſſi di non ſapere alcun fatto, il quale dimoſtri negli umori di quell' organo la ſeparazione priſmatica de' colori; pure egli indica ivi la ſtrada da tenerſi per decidere la quiſtione, ſtrada aſſai più ſicura e più facile della propoſta dal Sig. *d' Alembert*. Dirò qui, che ſiami riuſcito di oſſervare intorno a ciò, e quali conſeguenze derivino da tali oſſervazioni.

ESPERIMENTO I.

8. Ho poſto in *A* (*Fig. III.*) (*h*) un obbietto illuminato, per eſ. il lume d' una piccola candela, o un piccolo foro in una camera oſcura. Davanti all' occhio, e aderente a lui ho poſto una ſottil laminetta di piombo o di cartoncino *BC* traforata con due piccoli pertugi *M*, *N*; laſciando tra queſti una

---

(*a*) Tranſact. Vol. 48. n. 43.

(*b*) Accad. de Berlin 1759.

(*c*) Accad. de Berlin 1764. n. 38.

(*d*) Diſſert. ſur les Moyens de perfectionner la lunette, qui a remporté le prix a Berlin en 1771 n. 27.

(*e*) Mem. ſui Cannoch. diottrici n. 12.

(*f*) Accad. de Paris 1756.

(*g*) Opuſc. tom. 3 ch. 3.

(*h*) Nel ripetere queſti ed i ſeguenti eſperimenti abbiaſi rifleſſione, che la poſizione dell' obbietto viſibile è ſempre roveſcia dell' immagine formata ſulla retina.

diſtanza di due linee circa, che tanta e più ancora è l' apertura della mia pupilla nella poca luce. In tal guiſa l' obbietto *A* mandava entro il mio occhio due faſcetti di raggi *AM*, *AN* nel medeſimo tempo. Ho cominciato dal riguardare con queſti due fori inſieme l' obbietto *A*, quando la diſtanza del medeſimo dal mio occhio era di 10, o 12 piedi, cioè quando eſſa era aſſai più in là del termine della viſione diſtinta, il quale per me che ſon miope ſuol eſſere al di qua di un piede. In queſta poſitura ſi ſa che i raggi uſciti dal punto luminoſo *A* ſi raccolgono entro l' occhio in un foco più vicino alla pupilla di quel che ſia la retina medeſima. Nel noſtro caſo ſi univano per eſ. in *XZ*, e divaricando di nuovo andavano a dipingere ſulla retina due immagini dell' obbietto *A* una in *OR*, e l' altra in *SQ*. Or ſe gli umori dell' occhio mandano alla retina uniti i raggi tutti dello ſteſſo faſcetto, quantunque eterogenei; dovrebbero le due immagini *OR*, *SQ* eſſere bianche per tutto, come già ſupponiam che lo ſia l' oggetto *A*. Pur realmente le due immagini non rieſcono di un color uniforme; ma roſſeggiano evidentemente in *R*, *S*, e volgono all' azzurro in *O* e *Q*. Lo che dimoſtra, che il faſcetto *AM* nel rifrangerſi entro l' occhio divideſi ne' ſuoi colori, in guiſa che l' azzurro torcendo più forte dirigeſi in *DQ*, mentre il roſſo ſi rimane in *DS*. Lo ſteſſo fa duopo dir che ſucceda al faſcetto *AN*, ſicchè ne rieſcano poi le due immagini colorate *OR*, *SQ* tali quali ſono ſtate oſſervate da me e da chiunque altro ho eccitato a ripetere l' eſperimento.

9. Veggo, che coſa addur ſi potrebbe contro la forza del recato eſperimento. Potrebbe dire taluno, che l' occhio preſenta bensì alla retina diſperſi e ſeparati i raggi eterogenei, quando queſta è fuori del foco dell' occhio, quando è fuori del punto della viſione diſtinta; ma che nel foco e nel punto della viſione diſtinta eſſo li preſenta raccolti ed uniti. Come una lente poſta in ſito opportuno dietro ad un priſma raccoglie di nuovo i raggi diſperſi dal medeſimo priſma, e li riuniſce bensì nel foco a formar la bianchezza, ma in qualunque altro luogo fuori del foco gli laſcia ſeparati e tinti dei diverſi colori. Così potrebb' eſſere, che per eſ. il criſtallino concentri nel ſuo foco quei raggi eterogenei che la cornea

avea diviſi, laſciandoli poi in tutto il rimanente del viaggio ſeparati or più or meno di prima. Se così foſſe, dovrebbero i colori apparire qualunque volta il punto raggiante *A* è fuori del termine della viſione diſtinta, e ſvanire poi in un tal termine. Or di fatti ſuccede, che quando il punto *A* ſi trova alla diſtanza richieſta per la viſione diſtinta, vale a dire quando la retina corriſponde al foco *XZ*; in tal caſo una ſola immagine ſi vede del punto *A*, e queſta veſtita di un color bianco uniforme. La riſoluzione di queſto dubbio naſcerà dal ſeguente

ESPERIMENTO II.

10. Ho portato l'occhio munito dei due forellini *M*, *N* vicino all' obbietto *A* più di quel che importi il termine della mia viſione diſtinta, alla diſtanza per eſ. di ſoli due o tre pollici. In tal poſitura il foco *XZ* delle lenti dell'occhio cadeva al di là della retina; onde ſupponendo la retina portata in *TV*, l' immagine dell' oggetto ſi raddoppiava di nuovo in *TH* ed *IV*: ed ambedue le immagini erano tinte agli orli come nel primo eſperimento; ma qui eraſi rovesciato l'ordine dei colori, e il roſſo facevaſi vedere in *T*, ed *V*, mentre l' azzurro manifeſtavaſi all' interno verſo l'aſſe dell' occhio in *H*, ed *I*.

Combiniamo queſto eſperimento col primo, e vedremo che dopo la rifrazione dell'occhio il raggio roſſo del faſcetto *AM* ſcorre al di ſotto nella linea *DHQ* sì prima di giungere al foco in *XZ*, che dopo eſſervi trapaſſato; ed al contrario il raggio azzurro del faſcetto medeſimo ſcorre alla parte ſuperiore nella linea *TXS* sì prima che dopo del foco. Donde ſi fa chiaro, che dunque i due raggi roſſo ed azzurro del medeſimo faſcetto *AM* non hanno potuto riunirſi nel foco dell' occhio: perchè in tal caſo le loro vie ſi ſarebbono ivi incrocicchiate, ed il raggio azzurro da *H* ſarebbe andato in *S*, ed il roſſo da *T* in *Q*: lo che è contrario all' eſperienze precedenti. Quando poi l' obbietto *A* ſi trova nel punto della viſione diſtinta, e la retina corriſponde al luogo *XZ* del foco; allora una ſola immagine ſi vede e tutta bianca: perchè il raggio roſſo *ER* del faſcetto *AN* va ad incontrare in *Z* l'azzurro *DQ* del faſcetto *AM*; e ſimilmente in *X* s' incontrano gli altri due raggi eterogenei dei due faſcetti diverſi. Una tal meſcolanza riſuſcita il color bianco o quaſi bianco; appunto come ſuccede ad una lente di vetro, in cui ſi prenda per foco totale quello dei raggi di rifrangibilità media.

Poſta così fuor d' ogni dubbio (per quanto a me ſembra) la diſperſione dei raggi eterogenei entro dell' occhio, mi ſono indi accinto a prenderne la miſura, per vedere ſe eſſa almeno ſia tanto piccola e diſprezzabile, quanto porta l'opinione del Sig. *d' Alembert*.

ESPERIMENTO III.

11. Per un priſma di criſtallo, il di cui angolo rifrangente era di 43°. 36', ho fatto raggiare un punto luminoſo *A* (*Fig. IV.*), e ponendomi coll'occhio nella direzione della minima rifrazione del priſma, ho guardato per i due ſoliti forellini *M*, *N* l' obbietto *A* rifratto dal priſma. Venivano dunque al mio occhio due faſcetti diverſi *AXM*, *ATN*; nel primo de' quali il raggio azzurro veniva per la direzione *XMD*, ed il roſſo per *ZMD*, a norma di quanto ſi è detto al §. 3. Queſti due raggi ſi incrocicchiavano in *D*; ed anche preſcindendo dalla rifrazione dell' occhio, ſarebbe, dopo il punto *D*, il raggio roſſo paſſato all' alto, e l' azzurro al baſſo, proſeguendo così a divergere entro dell' occhio. La rifrazione poi degli umori dell' occhio, operando più forte ſull' azzurro, che ſul roſſo, non fa che aumentar vie più la divergenza degli ſteſſi due raggi, portandoli a formare l' immagine *SQ* roſſa in *S* ed azzurra in *Q* con una ſeparazion di colori più notabile di quel che ebbeſi nel primo eſperimento, in cui mancava la rifrazione del priſma. Ma nel ſecondo faſcetto *ATN* la diſperſione dei colori prodotta dall' occhio ſi fa in un verſo oppoſto alla diſperſione prodotta dall' angolo *P*. Onde l' altra immagine *OR* rimane più o men colorata, o colorata anche in ordine roveſcio, ſecondo che l' azione diſperſiva dell' occhio è minore eguale o maggiore di quello che importi l' angolo *TEV*. Ora l' angolo *TEV*, il quale miſura ora la forza diſperſiva dell' occhio in

Fig: I.

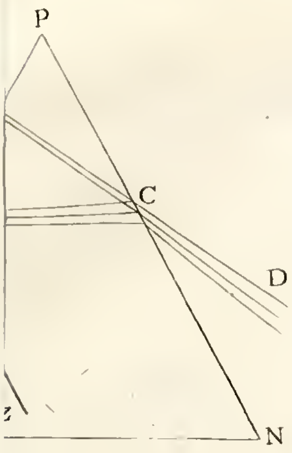
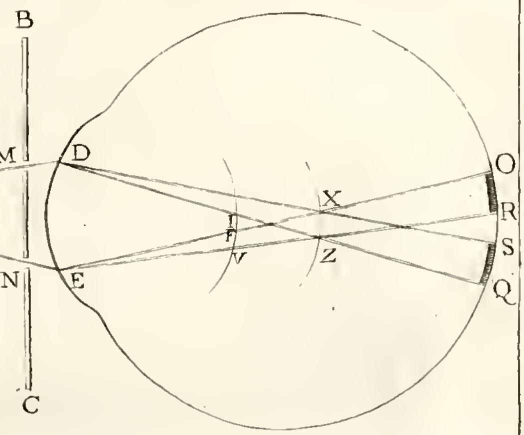


Fig: III.


B
M
D
A
N
E
C
I
F
V
X
Z
O
R
S
Q

II.

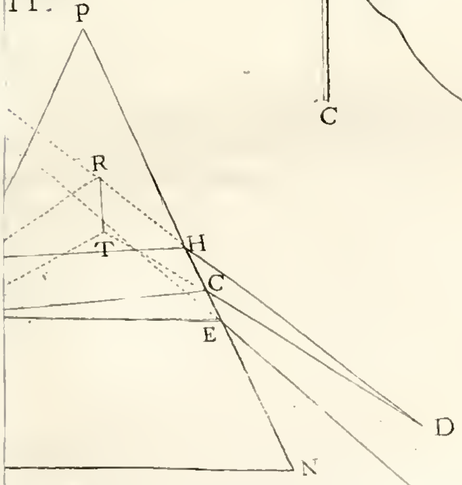
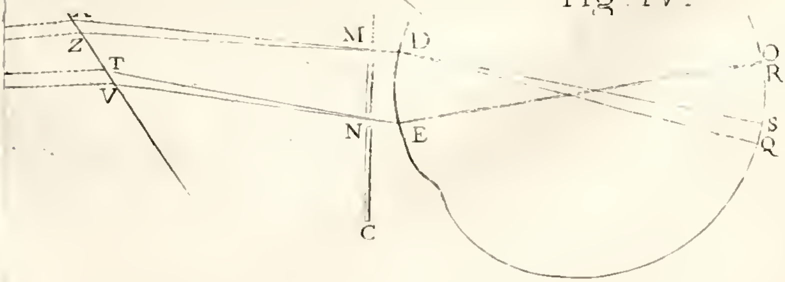


Fig: IV.


Z
T
V
M
D
N
E
C
O
R
S
Q

fi
ungi c
çalcoli,

Fig: I.

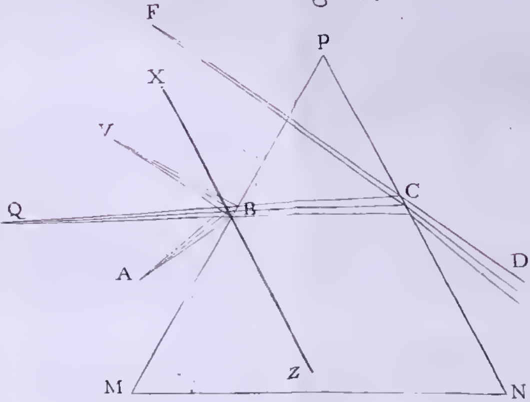

F
P
X
V
C
Q
B
A
D
M
Z
N

Fig: III.

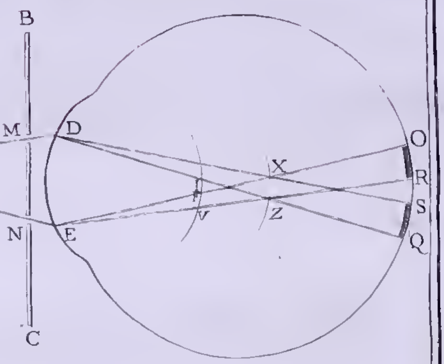

B
M
D
O
X
A
R
S
V
Z
N
E
Q
C

Fig: II.

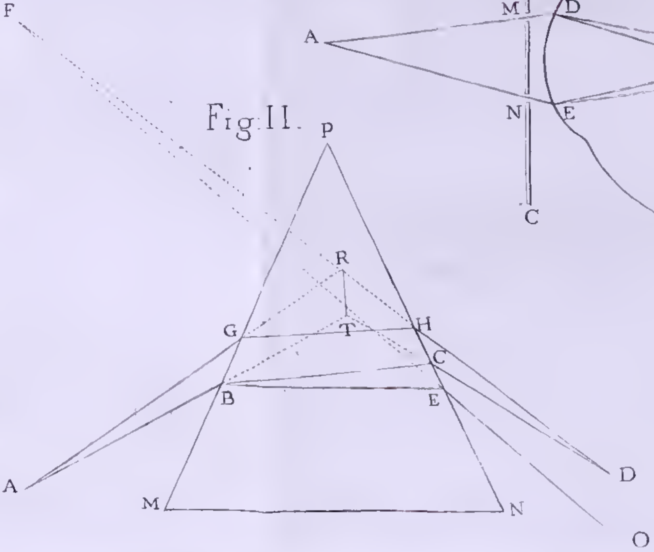
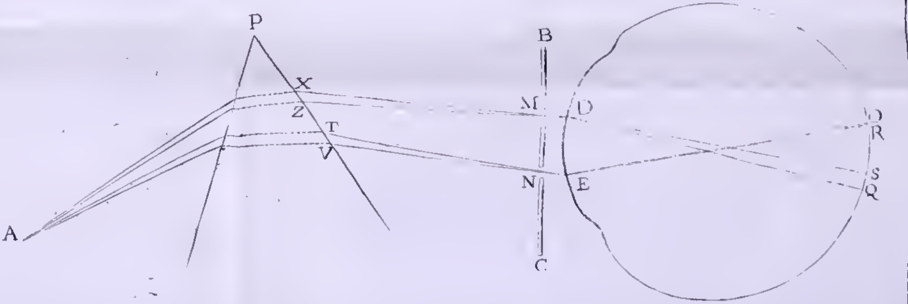

F
P
R
G
T
H
C
B
E
A
D
M
N
O

Fig: IV.


P
X
Z
T
V
B
M
D
O
R
N
E
S
Q
A
C

E, è pur quel deſſo che abbiam veduto (§. 3.) miſurare la grandezza apparente delle fimbrie colorate, e variare ſecondo la diverſa proporzione, che paſſa tra le due diſtanze *AT*, *TE* dell' oggetto e dell' occhio dal priſma. Stando adunque il priſma alla diſtanza fiſſa di 9 pollici dalla candela *A*, ed allontanando ſucceſſivamente l' occhio dal priſma ſteſſo, ho trovato: che l' orlo era azzurro in *R* finchè la diſtanza dell' occhio dal priſma era minore di 16 pollici; che lo ſteſſo orlo *R* ricompariva tinto in roſſo, quando la diſtanza eccedeva i 36 pollici; e che i colori al ſenſo ſvanivano tra i 16 e 36 pollici. Prendiamo un termine medio fra i due eſtremi; e potremo aſſumere la diſtanza di 26 pollici quella, in cui i colori ſvaniſcono perfettamente, ed in cui la diſperſione dell' occhio corregge affatto l' angolo *TEV* prodotto dal priſma.

12. Calcolando ora da queſto eſperimento la diſperſione che l' occhio cagiona ai raggi eterogenei nel punto *E*, trovo che la diſperſione dei raggi eſtremi tra loro nell' angolo rifrangente *P* rieſce di 62'. 26''. E l' angolo *TEV* a norma del §. 3. rieſce di 16'. 3''. Però ſe il raggio *RE* veniſſe bianco dall' interno dell' occhio, eſſo nell' uſcire ſoffrirebbe la diſperſione *TEV* di 16'. 3''. Supponendo che *DE* ſia la ſuperficie di una sfera di vetro comune, e tale che raccolga i raggi alla diſtanza di 8 pollici, a quanta incirca ſi raccolgono per gli umori dell' occhio, trovo che il ſemidiametro di una tale ſuperficie vitrea rieſce di poll. 2, 84. E prendendo la *DE* di due linee, rieſce nella ſteſſa ſuperficie l' arco *DE* 40°. 40'. Donde computando ricavo, che un raggio bianco, il quale uſciſſe dalla medeſima sfera vitrea nella linea *RET*, ſoffrirebbe in *E* una diſperſione di 16'. 26'', che è allo incirca la medeſima diſperſione, che abbiam trovata negli umori dell' occhio. E però fa duopo dire che l' aberrazione di rifrangibilità nell' occhio non è minore di quella, che ſi oſſerva nel vetro; e che per conſeguenza eſſa è ben lungi da quell' inſenſibile errore che poſſa non curarſi nei calcoli, e nelle macchine ottiche, come ſi è fatto finora.

MEMORIA I.

Sulla vera denſità de' Pianeti, ſulla riduzione de' loro ſemidiametri, e ſull' ipoteſi de' loro nuclei.

Del Sig. Ab. LEONARDO XIMENES Matematico di
S. A. R. il Granduca di Toſcana.

Introduzione, e proſpetto delle due Memorie.

1. L' Idea, che mi ha fatta ſcrivere la preſente Memoria, era quella di ben rettificare la denſità de' pianeti, che ſono corteggiati di ſatelliti, quali ſono Giove, e Saturno: poichè da una parte diſcordano gli Aſtronomi nel determinare la caduta de' gravi alla loro ſuperficie, e tal caduta è quella, che ci diſcuopre la denſità, e dall' altra la preciſa miſura di tal denſità era un elemento molto importante per la ſoluzione di molti Problemi appartenenti alla Fiſica celeſte. Tali ſono le perturbazioni vicendevoli di Giove, e di Saturno, che dipendono dalle loro maſſe paragonate tra di loro, e riferite ancora alla maſſa ſolare. Tali ſimilmente le perturbazioni, che ſoffrono le comete paſſando a qualche vicinanza di que' due inſigni pianeti, come accadde alla cometa del 1759, che ritardò di più meſi il ſuo ritorno per tali perturbazioni calcolate con gran profondità dall' inſigne Geometra il Sig. de *Clairaut*. L' importanza adunque di queſta ricerca mi eccitava a determinare colla maggior preciſione poſſibile la denſità di que' due pianeti.

2. Vi era pure un altro ſcopo per entrare in queſta carriera, ed era quello di ridurre a nuovo eſame l' ipoteſi delle denſità de' pianeti adottata dall' inſigne *Eulero* l' anno 1754, come leggeſi in una ſua Memoria inſerita negli Atti dell' Accademia di Berlino l' anno ſopraddetto 1754. Di tale ipoteſi io ho ragionato nel Tomo II. di queſta Società

facendo vedere, che detta teoria, ſecondo la quale le denſità de' pianeti eſſer dovevano in ragion reciproca ſudduplicata de' tempi periodici, ſi allontanava dalla verità, e dal fatto medeſimo. Poichè calcolando noi la denſità de' detti pianeti independentemente da quella ipoteſi coll' uſo de' tempi periodici, e delle diſtanze de' ſatelliti, e facendo il paragone di detta teoria col calcolo de' ſatelliti, non poco vi correva tra l' uno e l' altro riſultato, come è dimoſtrato in detta mia Memoria alla pag. 304, e 305 di detto Tomo II. Dove per la combinazione prima vi è la differenza, che paſſa tra 'l 23 ed il 29, e per la ſeconda vi è l' altra tanto maggior diſcrepanza che corre tra 'l 10 ed il 18. Tali differenze, come ognun vede, ci perſuadono che le denſità, che ſi deducono dall' ipoteſi Euleriana, non poſſono adoperarſi ne' problemi dell' Aſtronomia fiſica ſenza errori conſiderabili: ma avendo io avvertito, che quelle denſità, che erano calcolate da diverſi Aſtronomi coll' uſo de' ſatelliti, erano fra loro diſcrepanti, ho creduto di riſalire a tutti gli elementi di detti calcoli, ed a' metodi di eſeguirli, da' quali molto dipende.

3. Entrato appena in queſto difficil ſentiero, conveniva prima d' ogn' altro calcolare la caduta della noſtra luna nella ſua orbita alla ſua media diſtanza dalla terra. Eſſendo tal caduta originata dal volume, e dalla denſità della noſtra terra, eſſa era la baſe, ſulla quale doveva appoggiarſi il calcolo comparativo della denſità degli altri pianeti. Inoltrandomi adunque in queſto calcolo, mi ſi fece innanzi una grave difficoltà, cioè, che la caduta lunare nella ſua orbita paragonata alla caduta de' gravi ſulla ſuperficie terreſtre non era quella, che viene in conſeguenza della legge generaliſſima, ed indubitata de' gravi in ragion reciproca duplicata delle diſtanze. Gli Autori di Fiſica Aſtronomica mettono una perfetta concordia tra la caduta lunare nella ſua orbita e la caduta de' gravi ſulla terreſtre ſuperficie, ſupponendo, che la media diſtanza lunare dal centro terreſtre ſia di 60 ſemidiametri terreſtri, e che a tal diſtanza la caduta lunare in 1' di tempo ſia appunto di piedi 15. 10 centeſime, come accade in 1" ſulla terreſtre ſuperficie. Ma per quanto queſto conteggio poſſa paſſarſi, trattando tal Problema groſſolanamen-

te, non può nondimeno accettarſi, volendo procedere con preciſione. Eſſi ſuppongono due elementi difettoſi. Il primo, che la media diſtanza lunare ſia di 60 ſemidiametri terreſtri, quando eſſa in realtà è minore. Il ſecondo, che la caduta lunare a tal diſtanza è di piedi 15. 10 centeſime in un minuto di tempo, quando è ſenſibilmente minore, e per farla giungere a tal valore conviene traſportare la luna alla diſtanza minore di 59 ſemidiametri.

4. Non vi era adunque altro compenſo per concordare inſieme le oſſervazioni, e la preciſione della legge univerſale della gravità, ſe non che riportare i moti lunari ad una terra alquanto minore della noſtra, riducendo il ſuo ſemidiametro ad un altro minore, il quale faceſſe ben concordare la legge dell' univerſal gravità.

Si ſa, che le dimenſioni della terra degli antichi Geografi, che erano troppo grandi prima del Picard, tennero in ſoſpetto il Sig. *Newton* ſulla legge medeſima, ed egli tardò a pubblicare anzi ancora a compiere il famoſo libro dei Principj matematici della naturale Filoſofia, finchè non trovò nelle miſure del detto Picard un elemento più giuſto, che poteſſe ben corriſpondere co' ſenomeni delle cadute lunari.

Una nuova ma piccola riduzione del terreſtre ſemidiametro finirebbe di perſezionare il ſiſtema Neutoniano, facendo oſſervare eſattamente la legge del medeſimo.

Formati i debiti conteggi ho ritrovato, che impiccolendo tal ſemidiametro di $\frac{1}{32}$ incirca dell' attuale, e riportando le cadute lunari a tal ſemidiametro ridotto, il tutto veniva a concordare, e la ſteſſa gravità, che animava i corpi gravi a cadere ſulla ſuperficie terreſtre, la ſteſſa diminuita in ragion reciproca duplicata delle diſtanze, ſarebbe cadere la luna nella ſua orbita a tenore delle oſſervazioni, e miſure.

5. Ma per qual ragione, e con quali principj potremo noi ridurre a minor dimenſione il terreſtre ſemidiametro? Eccolo brevemente, per dimoſtrarlo poi a ſuo luogo. Se la terra invece di avere in tutti i ſuoi ſtrati dalla ſuperficie ſino al centro una coſtante, ed uniforme denſità, come ſi ſuppone ne' ſenomeni terreſtri, e celeſti, andaſſe addenſando detti ſuoi ſtrati tanto più, quanto eſſi ſi avvicinano al centro; allora converrebbe immaginare come più addenſati gli ſtrati

ſtrati ſuperiori, per avere una denſità uniforme, ſecondo la quale foſſe formata una terra fittizia. Or queſta terra ſarebbe minore della terra attuale, e queſta appunto ſarebbe quella, alla quale doveſſero riferirſi le cadute lunari.

E ſe la ſteſſa terra aveſſe nelle ſue viſcere delle vaſte caverne o piene d'aria, o di vapori, o di acqua, o di un foco centrale, le quali reſtaſſero ſparſe in qua, ed in là, queſte vaſte caverne gonfierebbero la terra più, che eſſa non ſarebbe ſenza le medeſime. Le materie delle caverne ſono di tanta minor denſità della terra ſolida, quanto più leggieri que' fluidi aeriformi, o aquei, o ignei, di cui eſſe ſono ripiene. Per ridurre adunque queſta terra ad un'altra tutta ripiena di materia uniforme, e di coſtante denſità biſognerebbe impiccolirla. Ecco intanto due principj certiſſimi per ridurre a minor valore il terreſtre ſemidiametro.

E ſe nel centro terreſtre vi foſſe un ampio nucleo, ripieno eſſo pure di materia di piccola ſpecifica gravità, eſſo pure eſiggerebbe, che ſi fingeſſe un'altra terra tutta ripiena di materia omogenea. Ed ecco un altro principio per impiccolirne il diametro. Onde non ſolo per le ragioni aſtronomiche, ma ancora per le fiſiche, e geografiche, conviene immaginare una terra alquanto minore della noſtra, la quale ſupponendola tutta ripiena di materia omogenea, e alla medeſima riportando i fenomeni della lunar gravità, eſſi ben corriſpondano alle inviolabili leggi della natura.

6. Rettificato, per così dire, il volume terreſtre, che era la baſe delle cadute lunari, ho poi continuato il mio viaggio, ſalendo prima a' ſatelliti di Giove, e poi a quelli di Saturno. Calcolando ad una ad una le cadute de' ſatelliti di Giove reſtai ſorpreſo, che il riſultato del primo ſatellite non ſi accordava co' riſultati degli altri tre. La caduta de' gravi alla ſuperficie di Giove non era la medeſima ſecondo il calcolo del primo ſatellite, e poi degli altri. E ſimilmente la denſità di Giove indi dedotta veniva mutando dall' un ſatellite all' altro, quando, regnando per tutto la ſteſſa legge della gravità, da' quattro ſatelliti doveva calcolarſi la ſteſſa caduta de' gravi alla ſuperficie di quel pianeta. Prima d' ogn' altro ſoſpettai di qualche errore ne' conteggi di qualche frazione traſcurata. Ma riteſſendo i detti calcoli con mag-

gior preciſione di frazioni, il riſultato era come prima, cioè che le cadute de' gravi alla ſuperficie di Giove, e la di lui denſità andava cambiando dall' un ſatellite all' altro. Indi mi cadde in ſoſpetto il metodo di calcolare.

7. Il primo metodo conſiſteva nel cercare la terza proporzionale tra 'l diametro medio dell' orbita di un ſatellite ed il ſeno dell' arco traſcorſo in un certo tempo, per ottenere il ſeno verſo, che rappreſenta la caduta del ſatellite nell' orbita ſua. Benchè in tal metodo doveſſe adoperarſi per il primo termine, non già tutto il diametro, ma la ſua porzione tagliata dal ſeno; pure era così tenue il ſeno verſo, che doveva ſottrarſi, che il traſcurarlo non induceva errore ſenſibile.

Paſſai nondimeno al ſecondo metodo di calcolare il detto ſeno verſo per mezzo della corda dell' arco, il qual arco eſſendo quaſi *naſcente* poteva confonderſi colla ſua corda. Onde formando la terza proporzionale tra 'l diametro e la corda, queſto era il ſeno verſo, che ridotto poi in parti reali ci paleſava la caduta del ſatellite nel dato tempo, che doveva eſſer piccolo.

Fu riteſſuto il calcolo, aſſumendo il tempo maggiore di 1'', per eſempio di 10', ed ancora più, affinchè poi l' arco traſcorſo in 1'' poteſſe dedurſi colla ſolita analogia de' quadrati delle corde proporzionali a' ſeni verſi. In ſomma per quanto io mutaſſi, e perſezionaſſi il metodo, ſempre appariva una gran diſcordia ne' riſultati della caduta de' gravi alla ſuperficie di Giove, e della ſua denſità.

8. Finalmente fu da me praticato il metodo di aſſumere immediatamente in teſe parigine gli archi traſcorſi da' ſatelliti in 1'' di tempo, e ciò ſecondo le tavole compilate dal Sig. *Briſſon*, e dedotte dalle migliori, e più moderne oſſervazioni. E ſuccedendo ancora in tal metodo, che mi parve più breve, o più preciſo, quella variazione trovata ne' primi metodi, ma molto più regolare, e preciſa, poſſo aſſicurare, che quanto più i ſatelliti ſi allontanano dal centro di Giove, tanto più ſcema la caduta de' gravi, e la denſità di

Giove indi dedotta (*a*). Allora mi venne in penſiero, che quanto mi era occorſo nelle cadute lunari, altrettanto ſuccedeſſe nelle cadute de' quattro ſatelliti di Giove, cioè, che le loro cadute doveſſero riportarſi, non già all' attual ſemidiametro di Giove, ma ad un altro ſemidiametro ridotto, come era ſtato ridotto il terreſtre.

Vi poſſono eſſere, e vi ſaranno nel vaſtiſſimo corpo di Giove, che è maggiore 1281 volta della noſtra terra, caverne tanto più ſpazioſe delle noſtre. La denſità de' ſuoi ſtrati dalla ſuperficie al centro eſſer doveva eterogenea. Chi ſa, che un grandiſſimo nucleo di materia leggiera non ſia collocato al centro di Giove?

Or queſte naturaliſſime circoſtanze unite a' fenomeni de' quattro ſatelliti potevano indurre una riduzione del ſemidiametro di Giove, come era ſucceduto nella terra per le ſteſſe ragioni, e per i medeſimi principj.

9. Oltrepaſſando collo ſteſſo metodo a' ſatelliti di Saturno, e deducendo da' loro tempi periodici, e loro diſtanze tanto la caduta de' gravi alla ſuperficie di quel pianeta, quanto la ſua denſità, l' una e l' altra miſura fu trovata variabile, come appunto ne' ſatelliti di Giove, e ciò che farà maraviglia ſi è, che la varietà rilevaſi per il medeſimo verſo, cioè ſempre decreſcente, quanto più i ſatelliti ſi ſcoſtano dal centro di Saturno.

10. Pare adunque che poſſa concluderſi, che i pianeti ſuperiori abbiano colla noſtra terra la ſteſſa analogia o di vaſte caverne ripartite pe' loro corpi, o di ſtrati variabili di denſità dalla ſuperficie ſino al centro, o di qualche nucleo centrale, che ne aumenti il volume ſenza accreſcerne la maſſa. Pare che la riduzione del ſemidiametro ſia comune alla Terra, a Giove, ed a Saturno, e che con tal compenſo poſſa felicemente ſpiegarſi quella differenza di riſultati, che turberebbe il ſiſtema inviolabile dell' univerſal gravità.

Le denſità de' due pianeti rieſcono minori di quello, che

(*a*) La diminuzione della caduta intendeſi in paragone di quella, che ſi calcola colla legge della ragione inverſa duplicata delle diſtanze.

ſi era ſtabilito dal Sig. *Eulero*. La caduta de' gravi alla ſuperficie di Giove ſi calcola minore di quella adoperata da' moderni Aſtronomi. Eſſendo ſottiliſſima la preſente ricerca, ed occorrendo, per aſſicurarla, frazioni aſſai minute di centeſime, milleſime ecc. io ho preſo il partito d' inſerire nel calcolo di ciaſcun ſatellite, non ſolamente gli ultimi riſultati, come aſſai ſpeſſo ſi fa per ragion di brevità, ma eziandio tutti gli elementi de' detti calcoli, e tutta la loro teſſitura, affinchè ſia in potere degli Aſtronomi di eſaminare il tutto, e di riſcontrare le operazioni fatte, ed i corriſpondenti riſultati.

PARTE I.

Della caduta lunare nella ſua orbita, e delle ſue conſeguenze.

11. Il primo calcolo, che conviene intraprendere per la preſente Memoria, ſi è quello di determinare più accuratamente, che ſi poſſa, la caduta lunare nell' orbita ſua alla media diſtanza dal centro terreſtre. E ſiccome tale accuratezza dipende primieramente dagli elementi, che ſi traſcelgono, e poi dal metodo, col quale eſſi vengono maneggiati; così io procurerò gli elementi delle Tavole più moderne aſtronomiche, e ſeguiterò quel metodo, che già è ſtato accennato nell' introduzione. La ſopraddetta preciſione è neceſſaria perchè appunto dalla caduta lunare nell' orbita ſua deve deſumerſi il conteggio intorno alla denſità de' pianeti, Giove, e Saturno, che ſono ſtati dalla natura dotati di più ſatelliti, e queſti ſono appunto quelli, che colla combinazione della caduta lunare ci paleſano la vera denſità de' loro primarj, la qual convien paragonare alla terreſtre denſità, la quale dee riguardarſi, come la baſe di tutte le altre.

Ora per ottenere un tal fondamento generale, io ho dovuto incominciare dalla terreſtre denſità, e queſta non ſi può meglio deſumere, ſe non che dalla caduta lunare nell' orbita ſua alla media diſtanza dalla terra. Quando queſta ſia ben calcolata, noi ſapremo, che ſe Giove, e Saturno foſſero dotati della ſteſſa denſità, e ſe un ſatellite ſi fingeſſe, che foſſe diſtante dal centro del ſuo primario, quanto lo è la luna dalla terra, allora la caduta di quel ſatellite eſſer dovrebbe tanto maggiore, quanto lo è il volume di quel pianeta riſpetto al volume terreſtre, giacchè in queſta ipoteſi il volume, e la maſſa ſarebbe la ſteſſa coſa. Sappiamo per eſempio, che il volume di Giove ſupera 1281 volta il volume terreſtre. Onde, eſſendo le gravità in ragion diretta delle maſſe, quando le diſtanze ſiano uguali, in tal caſo la caduta di quel ſatellite di Giove, ſupponendolo alla medeſima diſtanza, dovrebbe godere di una caduta 1281 volta maggiore, che non è la caduta lunare. E così ſupponendo per ora, che la caduta lunare in un minuto nella ſua orbita foſſe di piedi 15, allora la caduta di quel ſatellite fittizio dentro il medeſimo tempo caderebbe verſo Giove piedi 19215.

12. Dal ſatellite fittizio poi ſi fa paſſaggio ad un ſatellite vero, la cui diſtanza dal centro di Giove ſia ben conoſciuta, ed in tal caſo eſſendo la gravità in ragion reciproca duplicata delle diſtanze, dedurremo col ſolito conteggio, qual ſarebbe la caduta del vero ſatellite, ſul ſuppoſto, che la denſità di Giove foſſe uguale alla terreſtre.

Ma per la rivoluzione periodica di tal ſatellite combinata colla ſua media diſtanza, potremo noi calcolare la caduta vera di tal ſatellite, la qual corriſponde alla vera denſità di Giove, e perciò paragonando queſta caduta alla prima, ci faremo ſtrada per dimoſtrare, qual ſia la proporzione tra la terreſtre denſità e quella per eſempio di Giove. Supponendo, che la denſità terreſtre ſia rappreſentata da un numero coſtante, qual ſarebbe il 10000, nelle parti di tal numero potremo noi rappreſentare la denſità di que' pianeti. Ecco adunque, che con quanto maggior preciſione da noi ſarà conteggiata la caduta lunare nella ſua orbita, con tanto maggiore eſattezza rappreſenteremo ancora la denſità di quei pianeti.

Generalmente gli Autori di Fiſica aſtronomica, trattandoſi del preſente Problema, aſſeriſcono, che tanto cade la luna dentro un minuto nella ſua orbita, quanto cadono i gravi circumterreſtri dentro 1″ ſulla ſuperficie della terra. Una tal ſoluzione non è eſattamente vera per il difetto degli elementi, com' è ſtato già rilevato nell' introduzione.

13. La diſtanza media lunare, dedotta colla ſua parallaſſi, batte verſo i 59 ſemidiametri terreſtri. E con preciſione maggiore, ſupponendo la parallaſſi lunare media orizzontale di 58′. 22″, la media diſtanza ſi calcola di ſemidiametri 59. 08 cent. E′ bensì vero, che il Sig. Ab. *la Caille* nelle ſue Lezioni d' aſtronomia fa la media diſtanza lunare di ſemidiametri terreſtri 60. 20 cent. (*a*). Ma ſieguono i moderni aſtronomi con piccol divario la ſopraccennata diſtanza di 59 ſemidiametri terreſtri. Ed inoltre, quando ancora voglia aſſumerſi la diſtanza maggiore di ſemidiametri 60, non concorderebbe poi la caduta lunare, la quale ancora a 59 ſemidiametri è minore di piedi 15 incirca, quale ſi oſſerva nella caduta de' corpi terreſtri, come ſi manifeſta da' calcoli ſeguenti. Onde, ſe ſi calcolaſſe la caduta alla diſtanza maggiore di 59 ſemidiametri, molto più eſſa reſterebbe inferiore di prima.

Io adunque aſſumerò la media diſtanza lunare, che trovo regiſtrata dall' inſigne M. *de la Lande*, di leghe franceſi . . . . 84515 (*b*).

14. Il ſemidiametro terreſtre nella ſteſſa Tavola ſi ſuppone di leghe 1432. $\frac{1}{2}$, onde dividendo la diſtanza per il ſemidiametro, la prima tornerebbe di ſemidiametri terreſtri 58. 99 cent., e può farſi di 59. 00 ſenza errore ſenſibile. Il che comprova quanto dianzi ho aſſerito, che i più recenti, e più abili Aſtronomi ritengono la media diſtanza di 59 ſemidiametri terreſtri.

L'altro elemento neceſſario a queſta ricerca ſi è lo ſpazio, che percorre il centro lunare nella ſua orbita dentro 1″ di tempo, che ſecondo il moto periodico lunare, e la ſopraddetta diſtanza ſarà di teſe parigine . . . 513. 75 cent.

(*a*) Nelle dette Lezioni alla pagina 297 al §. 685.

(*b*) Il Sig. *de la Lande* nella ſua Tavola aſtronomica inſerita nel Tomo II. della ſua aſtronomia libro VI. N. 1398 pag. 158, regiſtra la minima diſtanza lunare di leghe franceſi 77577
La maſſima diſtanza di leghe 91454
La media tra queſte due diſtanze è di leghe . . . . 84515. $\frac{1}{2}$

Metodo per dedurre la caduta lunare nell' orbita alla ſua media diſtanza.

15. Il metodo, che a prima viſta ſi preſenta, ſi è quello di calcolare la corda di quell' arco che la luna deſcrive in un dato tempo, per eſempio in un minuto, come è ſtato accennato nell' introduzione. Poichè ſi ſa, che detta corda è la media proporzionale tra 'l diametro dell' orbita ed il ſuo ſeno verſo. Eſſendo adunque tal ſeno lo ſpazio della caduta dentro il dato tempo, di eſſa verremo in cognizione dividendo il quadrato della corda per il diametro dell' orbita. Ma non avendo noi frazioni così minute nelle Tavole aſtronomiche, nè nei logaritmi, corriſpondenti, e dall' altra parte non potendo aſſumere la caduta di un tempo più lungo, per non inciampare in nuove difficoltà, io colla lunghezza de' calcoli mi ſono avveduto, che il metodo più preciſo ſi è quello di aſſumere come uguale alla corda l' archetto, che la luna percorre in 1″ di tempo. E così mi è riuſcito di determinare con ſottigliezza la caduta lunare dentro 1″ di tempo, ed ancora dentro un ſemplice minuto come ſi paleſerà col calcolo.

16. Eſſendo adunque l' arco percorſo in 1″ dal centro lunare di teſe	513. 75 cent.
Sarà il ſuo logaritmo	2. 7107518
Volendo l' arco percorſo in 60″, ſarà il ſuo logaritmo	1. 7781512
La ſomma ſarà	4. 4889030
E raddoppiando tal logaritmo per il quadrato di detto arco ſarà	8. 9778060
Eſſendo la diſtanza lunare di leghe	84515,
Avremo il ſuo logaritmo di	4. 9269338
Or dovendoſi raddoppiare tal diſtanza, e poi ridurla in teſe parigine, delle quali la lega ne contiene 2283, raddoppiandola ſaranno teſe 4566	
Il ſuo logaritmo ſarà	3. 6595359
Ed aggiungendovi il logaritmo	4. 9269338

Avremo la ſomma di 8. 5864697
La qual ſomma detraggaſi dal logaritmo dell' arco, e così reſterà il logaritmo 0. 3913363
Al qual logaritmo debbonſi teſe parigine 2. 4624,
che ſi riducono a piedi 14. 7744,
i quali eſſendo la caduta lunare alla ſua media diſtanza in 1' indi è, che la caduta in 1'' ſi avrà dividendo per 3600, che è il quadrato di 60'', e ſarà di piedi . . 0. 004104.

I ſopraddetti piedi 14. 7744 ſono lontani dalla caduta de' gravi ſulla ſuperficie terreſtre, che ſi fa di piedi 15. $\frac{1}{12}$. cioè 15. 08.

Che ſe dalla lunghezza de' pendoli attuali, da' quali deduceſi la caduta, voleſſe conteggiarſi un' altra caduta libera dalle forze centrifughe della terra, allora la caduta primitiva de' gravi, cioè quella, che non è affetta alle forze centrifughe, ſarebbe alquanto maggiore. La caduta lunare nulla dipende dal moto della terreſtre rivoluzione attorno al ſuo aſſe, come ne dipendono i corpi gravi, che ſon traſportati dal moto diurno. E perciò la vera regola ſarebbe di prevalerſi della caduta libera da detto moto, per fare il ſuo paragone colla caduta lunare. Ben però è vero, che queſta frazione additiva non altera ſenſibilmente tutta la ſerie del calcolo, e perciò ſarà da me adoperata la caduta de' gravi ſulla terreſtre ſuperficie di piedi 15. 08.

Diſtanza lunare in quel punto, nel quale la ſua caduta in un minuto ſia uguale alla caduta terreſtre in un ſecondo.

17. Sarà ben ora determinare qual ſia quel punto della diſtanza lunare dalla terra, nel quale la ſua caduta in un minuto ſia preciſamente di piedi 15. 08, quale ſi oſſerva nel moto de' gravi ſulla noſtra ſuperficie. Riſolveſi un tal Problema col noto Teorema, che le cadute de' gravi a diverſe diſtanze da un pianeta, o dal Sole medeſimo, ſiano ſecondo la ragione reciproca duplicata delle reſpettive diſtanze. Sarà pertanto, come la caduta di piedi 15. 080 milleſime alla caduta di piedi 14. 775, così il quadrato della diſtanza media al quadrato della diſtanza domandata.

Il

Il logaritmo del quadrato della diſtanza media in leghe ſarà 9. 8538676

Il logaritmo di 14. 775 . . . . . . 4. 1696744

Somma de' due logaritmi 14. 0235420

Logaritmo di 15. 080 . . . . . . 4. 1784013

Che detratto laſcia il reſiduo di . . 9. 8451407.

La cui metà, cioè la radice della nuova diſtanza ſarà 4. 9225703,

a cui corriſpondono leghe . . . . . 83671.

Eſſendo adunque la media diſtanza lunare di leghe 84515

La differenza ſarà di leghe 844,

che ſarà il punto inferiore alla diſtanza media lunare, dove la ſua caduta in 1′ uguaglia la caduta terreſtre in 1″.

Or dividendo le dette leghe 83671 per 60; ne verrà il ſemidiametro ridotto della terra di leghe 1394. 51 cent.

Eſſendo il ſemidiametro attuale di . . 1432. 50,

La differenza ſarà di leghe franceſi . . 37. 99,

e può farſi di leghe 38 ſenza divario ſenſibile.

Queſte leghe formano la groſſezza di quello ſtrato terreſtre per giugnere al ſemidiametro ridotto. E ſiccome le leghe 38 moltiplicate in ſe medeſime fanno aſſai proſſimamente la grandezza dell' attual ſemidiametro di 1432. 50; così immaginando, che tal ſemidiametro reſti diviſo in 38 parti uguali, ciaſcuna di queſte parti agguaglierà proſſimamente le dette leghe 38. E da queſto poi naſce la proporzione del ſemidiametro attuale al ſemidiametro ridotto, come il 38 al 37.

18. Col vocabolo di *ſemidiametro ridotto* io intendo quello che moltiplicato 60 volte giugne a quel punto della diſtanza lunare, dove la caduta di queſto pianeta rieſce di piedi parigini 15. 08 in un minuto, quanta è in 1″ la caduta de' gravi ſulla terreſtre ſuperficie. Tal riduzione però rieſce indiſpenſabile, non ſolamente per queſto titolo, in cui la legge dell' univerſal gravità viene a corriſpondere con preciſione alle cadute lunari, ma eziandio per altre ragioni, le quali ſoggiugnerò.

19. Prima però di produrre tali ragioni, mi conviene avvertire, che vi è un altro metodo molto più breve per

ridurre detto ſemidiametro terreſtre. Poichè noi ſappiamo la caduta de' gravi alla diſtanza media lunare, ſecondo il calcolo fatto. Sappiamo quella della terreſtre ſuperficie, e la media diſtanza lunare dalla terra. Onde ſecondo il Problema III. inſerito nella mia Diſſertazione ſtampata a Livorno nel 1776 alla pag. 119, potremo immediatamente determinare il ſemidiametro terreſtre ridotto, il quale, ſecondo l' anneſſa nota (*a*), tornerà di leghe 1394. 30 cent. come nel primo calcolo, colla tenue differenza di 31 centeſimo.

Ma il ſemidiametro attuale è di leghe . .	1432. 50.
Onde la differenza ſarà di leghe	38. 20.

Ed ancor queſto confronta col primo calcolo.

Non faccia maraviglia, che nella ſoluzione di detto III. Problema la differenza ſia di $\frac{1}{64}$, e qui torni di $\frac{1}{38}$. Poichè ivi la caduta lunare in 1′ ſi fa di piedi 14. *966* parti milleſime, ma in realtà eſſa è di 14. 774 milleſime. Eſſendo adunque verificata la differenza di leghe 38, di eſſa mi ſervirò ne' calcoli di queſta materia.

Della riduzione del ſemidiametro, e dello sferoide terreſtre, e ſue ragioni.

20. A quanto è ſtato accennato nell' introduzione aggiungerò, che conſiderando la noſtra terra non ſolamente ſulla ſua ſuperficie, ma ancora nelle ſue viſcere findove può giugnere l' umano intendimento, rileveremo primieramente le

---

(*a*) Logaritmo della diſtanza lunare in leghe di 2283 teſe, la qual diſtanza

è di leghe 84515	4. 9269338
Suo doppio	9. 8538676
Per ridurre la caduta lunare in ſecondi ſi detragga il log. di 3600, cioè	3. 5563029
Reſiduo	6. 2975647
Logaritmo additivo	1. 1694981
Somma	7. 4670628
Log. ſottrattivo del 15. 08	1. 1784015
Reſiduo	6. 2886613
Metà	3. 1443306,

A cui ſi devono leghe 1394. 30 cent. Ma il ſemidiametro attuale è di leghe . . . . 1432. 50; Onde la loro differenza ſarà di leghe . . . . 38. 20, come nel primo calcolo.

vaſtiſſime caverne, che da pertutto ſi trovano, e che pur ſi argomentano dal frequente ſenomeno di tanti terremoti. Le vaſte eruzioni de' vulcani, che da tempo immemorabile vanno minando i profondi ſtrati della terra, ci fanno ben comprendere le immenſe caverne ſotterranee, dalle quali è ſtata rapita la materia combuſtibile, formandone de' monti altiſſimi, e di ben ampia circonferenza. Il ſolo monte Etna nella Sicilia ce ne porge una qualche idea. Poichè eſſo ſorge ad altezza prodigioſa, che diceſi eſſer di miglia 3 ſopra la ſuperficie del mare. La ſua baſe oltrepaſſa notabilmente le 20 miglia, e queſto grandiſſimo cono talmente poſa ſopra una vaſta pianura, che ci fa congetturare eſſer compoſto della ſteſſa materia ſcavata nelle ſottopoſte viſcere della terra. Ed ecco così indicata una delle più grandi caverne, che ſono ſparſe nel corpo terreſtre a più, e diverſe diſtanze, e profondità. Altre caverne poi ſono indicate dalle acque, che da eſſe ſgorgano, come ſuccede nel territorio Modaneſe. E non mancheranno pure altre caverne ripiene di pura aria, e collocate qua e là a diverſe profondità dello sferoide terreſtre. Or queſti ſpazj cavernoſi ingrandiſcono il volume terreſtre più, che non richieggono i ſuoi peſanti foſſili, e minerali, i quali, ſe doveſſero tutti addenſarſi, ſenza frapporre tanti ſpazj vacui diſſeminati qua e là nelle viſcere della terra, certa coſa è, che detta terra diventerebbe più piccola, e ſe eſſa ſi concepiſſe di una denſità uniforme in tutte le ſue parti uguale alla maſſa preſente, ma ſenza le interpoſte caverne, tanto più ſcemerebbe il terreſtre ſemidiametro ridotto. Dall' altra parte finora i fenomeni celeſti, e ſpecialmente i moti lunari ſono ſtati tacitamente conſiderati, come originati da una terra di coſtante ed uniforme denſità. Onde pare indiſpenſabile, che ſia ideata un' altra terra ſenza parti cavernoſe, e tutta manipolata con materia uniformemente denſa dalla ſuperficie ſino al centro.

21. Oltre a queſta prima ragione delle parti cavernoſe, una ſeconda può rilevarſi dal ſentimento di alcuni moderni Filoſofi, che alla terra attribuiſcono un fuoco centrale, vale a dire un nucleo concentrico alla ſuperficie terreſtre, che ſomminiſtri alla terra il ſuo calore, il quale non può eſſere certamente prodotto in quelle inſigni profondità di centina-

ja di piedi dalla luce, e riſcaldamento ſolare, e dall' altra parte ſi oſſerva il calor profondo ſotterraneo di 10, e più gradi da M. *Reaumur*. Una cagione certamente va deſtinata a queſto general fenomeno ſotterraneo, il quale ſecondo alcune ſperienze nelle maggiori profondità ſi oſſerva maggiore, e non vi è cagione più naturale di quella del fuoco centrale. Qualunque ſiaſi quel vaſto nucleo, non può dubitarſi, che quando ſi concepiſce riempito colle materie ſuperiori della terra, eſſo ne minorerebbe il ſemidiametro.

22. Altri poi potrebbono ricorrere a que' grandi abiſſi di acque, nominati nella Sacra Geneſi, nella quale ſi dice in occaſione del diluvio, che ſi aprirono le cateratte del grande abiſſo della terra. Le acque ancora ſono di piccola ſpecifica gravità riſpetto a' foſſili terreſtri, e perciò ancora in queſta ipoteſi la total pienezza della terra, e la uniforme denſità de' ſuoi ſtrati eſiggerebbe un minor diametro. Tutto queſto è ſtato indicato nell' Introduzione, ma biſognava provarlo, come ora ſi è fatto.

23. Non deve inoltre ometterſi una nuova conſiderazione ſulla teoria della terra. Quando ancora non vi foſſero nè le vaſte caverne, nè il fuoco centrale, nè gli abiſſi delle acque, è coſa aſſai naturale a credere, che gli ſtrati terreſtri concentrici alla ſuperficie, e conſiderati a diverſe profondità ſino al centro, non ſiano di una coſtante denſità, ma che eſſendo i punti inferiori tanto più aggravati dalle colonne ſuperiori, quanto i primi più ſi accoſtano al centro terreſtre, la loro denſità vada gradatamente creſcendo, non eſſendovi tra' noſtri ſolidi alcuno, che non abbia elaſticità, e compreſſibilità.

In tal conſiderazione vi ſarà una ſcala di denſità, in qualunque modo eſſa poſſa idearſi, nella quale le denſità vadano creſcendo dalla ſuperficie terreſtre ſino al ſuo centro. E le ſemiordinate alla detta curva, benchè variabili, poſſono però avere una tal ſemiordinata, che ſia media, e ragguagliata tra le altre infinite. E così l'area di quella curva ſarebbe uguale al rettangolo compoſto della media ſemiordinata, e del terreſtre ſemidiametro. Non altrimenti accade in queſta materia, che in molti altri caſi della Fiſica, ne' quali ha luogo la preſente teoria. Se per modo di eſempio un corpo elaſtico, qualunque eſſo ſiaſi, reſti aggravato da' peſi ſuperiori, ſempre maggiori all' infinito, non vi è dubbio, che le inferiori denſità del corpo elaſtico debbano eſſere rappreſentate da ſemiordinate maggiori, che poi vadano decreſcendo ne' punti di minor carico, e perciò di minor compreſſione. Se il corpo ſia di perſetta elaſticità, allora la linea delle compreſſioni, o ſiano denſità ſarebbe eſpreſſa da una ſerie di ſemiordinate triangolari, e così potremo concepire le compreſſioni della noſtra aria atmosferica, che è di grande elaſticità. Ed in fatti così lo perſuadono le ſperienze, riſtringendoſi l' aria in uno ſpazio reciprocamente proporzionale al peſo, che le ſovraſta.

24. Quando però detta elaſticità, e compreſſibilità ſia del tutto imperfetta, come nelle materie terreſtri, allora la curva delle denſità ſarà differentiſſima dalla ſcala triangolare. Sempre però ſarà vero, che di qualunque natura, e proprietà rieſca detta curva, eſſa avrà una media ſemiordinata, la quale ſia inferiore alla ſuperficie terreſtre, o che poſſa bene rappreſentarci l' uniforme denſità di una terra fittizia, la quale abbia la medeſima maſſa diverſamente diſpoſta nel noſtro sferoide.

Ma ſe tutto lo sferoide voleſſe immaginarſi della ſteſſa denſità del ſuo centro, che è la maſſima, allora non deve queſta ricerca regolarſi colla media denſità, ma deve di tanto ſcemarſi il primo ſtrato della ſuperficie ſino ad una certa profondità, che con eſſo ſtrato addenſandoſi le maſſe meno denſe, venga a formarſi una uniforme denſità. E queſto è il caſo preſente. Per adoperare la media denſità verrebbe ad accreſcerſi la denſità degli ſtrati ſuperiori, e diminuirſi quella degl' inferiori. Ma laſciando tali ſtrati inferiori nella loro maggior denſità, che diminuiſce il volume dello sferoide, e quel volume, che ſi toglie nel primo ſtrato di un trenteſimo ottavo del raggio, ſia immaginato, come diſtribuito per il reſiduo della materia meno denſa, allora la maſſa terreſtre ſarà ridotta a quella coſtante denſità, che ſi deſidera.

25. Ora le cadute lunari appunto ci accennano, che diminuendo il volume terreſtre collo ſtrato ſuperiore di profondità di leghe 38, e diſtribuendo la materia di tal volume per gli altri ſtrati meno denſi, poſſa concepirſi una ter-

ra fittizia di denſità coſtante di ſemidiametro minore di dette leghe 38, la qual corriſponda alla caduta lunare.

Ritornando ora all' ipoteſi de' nuclei centrali, la quale non ſenza motivo piace a' moderni Filoſofi, potrebbe determinarſi il loro ſemidiametro nella maniera ſeguente.

Dimenſione del nucleo centrale vacuo ſecondo le predette ipoteſi.

26. E' ſtato adunque dimoſtrato, che per far concordare inſieme le cadute lunari colla preciſa legge dell' univerſal gravità, potrebbe idearſi una terra fittizia, il cui ſemidiametro foſſe minore del ſemidiametro attuale di una parte trentotteſima del medeſimo. E perciò, come è ſtato detto, ſarebbe 'l primo ſemidiametro al ſecondo, come il 38 al 37. Si ſa dall' altra parte, che tutti i ſolidi ſomiglianti, come ſono gli sferoidi del nucleo, e della ſuperficie terreſtre, ſono in ragion triplicata de' loro ſemidiametri, o generalmente de' lati omologhi. Sarà pertanto il cubo delle

parti 38. di 54872

E il cubo del 37 50653

Sarà la loro differenza di parti . . . . 4219.

E tal differenza ci eſprime la ricubatura di quello ſtrato terreſtre della groſſezza di leghe 38, il qual ricuopre tutto il ſolido della terra ridotta. Ma queſto ſolido deve eſſere uguale al volume del nucleo centrale. Onde, calcolando la radice cubica del medeſimo, eſſa rappreſenterà il ſuo ſemidiametro. Eſſendo pertanto tal radice cubica di parti 16. 16 cent., avremo così rinvenuto il ſemidiametro del nucleo paragonabile al ſemidiametro della terra preſente, che qui è rappreſentato dalle parti 38. 00

Perciò ſaranno dette parti 38. 00 alle parti 16. 16, come il ſemidiametro del noſtro sferoide a quello del nucleo.

Se ora ſi deſideraſſe lo ſteſſo nucleo in parti milleſime, ſi calcoli l' analogia, come il 38. 00 al 16. 16, così il 1000 al quarto proporzionale, che ſarà di parti . . . 425.

27. Rieſce adunque di gran vaſtità il detto nucleo centrale, il cui ſemidiametro è di parti milleſime 425, cioè proſſimamente $\frac{2}{5}$ del ſemidiametro attuale della terra.

Se il fuoco centrale foſſe racchiuſo in queſto vaſtiſſimo nucleo, non ſolamente potrebbe tramandare quel calore, che ſi ſperimenta nelle parti ſuperiori della terra nelle grandi profondità, ma ancora potrebbe ſervire per la ſpiegazione di altri più inſigni fenomeni, che non appartengono al preſente argomento. Ma comunque ſiaſi, o queſto nucleo ſia una figura reale, o eſſo ſia una figura ideale, per racchiudervi coll' immaginazione tutte le cavità della terra, ſarà ſempre vero, che la terra attuale ſarà di volume maggiore di quella, che è neceſſaria per la ſpiegazione de' celeſti fenomeni della gravità.

Ma nell' altra ipoteſi della denſità variabile degli ſtrati terreſtri ſenza alcun nucleo potrà beniſſimo rappreſentarſi la terra ridotta ad una coſtante denſità, la qual coſtanza faccia impiccolire il terreſtre ſemidiametro nella già riferita proporzione del 38 al 37.

Deve ancora rilevarſi, che ſecondo i numeri già deſcritti la media diſtanza del centro lunare dalla terra ſta alla diſtanza di 60 ſemidiametri ridotti aſſai proſſimamente, come il 100 al 99. Poichè paragonando la differenza delle due diſtanze, che è di leghe 844 colla diſtanza media lunare, tal differenza rieſce molto vicina ad una parte centeſima della media diſtanza. E perciò ſarà la diſtanza media lunare alla diſtanza ridotta, come il 100 al 99.

28. Concluderemo adunque, che tal ſemidiametro terreſtre ridotto non ſolamente corriſponde alle cadute lunari, ſecondo il ſiſtema dell' univerſal gravità, ma corriſponde ancora alle fiſiche conſiderazioni della terra medeſima, cioè alle ſue concavità, a' ſuoi nuclei, alle ſue variabili denſità.

Curioſo ſarebbe il riſultato, ſe quanto è ſtato detto, e provato finqui ſu i fenomeni terreſtri, e ſulla riduzione del ſuo attual diametro, ſi trovaſſe ancora verificato nelle cadute de' ſatelliti di Giove, e di Saturno, come pure ne' nuclei de' detti pianeti, ovvero nelle variabili denſità degli ſtrati concentrici, o al centro di Giove, o di Saturno. Converrà adunque premettere il calcolo delle cadute de' detti ſatelliti, converrà paragonare i riſultati di un ſatellite con quegli di un altro, per oſſervare, ſe eſſi ſiano omogenei, o eterogenei. Converrà finalmente dedurre, che una riduzione di ſemidiametro di que' pianeti competa aſſai bene ad eſſi, come alla terra. Il primo oggetto è ſtato quello di fiſſare con preciſione la denſità di detti pianeti. Il ſecondo di eſplorare la caduta de' gravi alla lor ſuperficie. Non meno però è intereſſante la terza ricerca di rinvenire all' incirca qual ſia la teſſitura interiore di detti pianeti, che potrà eſſere indicata da' moti de' loro ſatelliti.

Il penſiero, col quale ſi entra in detti calcoli, ſi è ſempre quello di ritrovare la ſteſſa denſità, la ſteſſa caduta de' gravi per mezzo de' quattro ſatelliti di Giove, e de' cinque di Saturno. Ma a' primi paſſi di queſto ſentiero mi ſono accorto, che co' moti periodici, e diſtanze di diverſi ſatelliti, diverſa ſi conteggiava la denſità del pianeta principale, come pure la caduta de' gravi alla ſua ſuperficie. A queſti primi paſſi dubitai da principio, che l' inugualtà naſceſſe dalle frazioni traſcurate. Onde incominciai ad introdurre ne' calcoli le più ſottili frazioni, che molto più mi dimoſtravano l' inugualtà de' riſultati. Diverſi pure ſono ſtati i metodi di calcolare, ed in ogni metodo paleſavaſi la ſopraddetta varietà de' fenomeni. Alla fine mi è caduto in penſiero, che potevanſi ridurre i ſemidiametri di que' pianeti all' incirca, come ſi è fatto nel terreſtre ſemidiametro, ed allora apparve tutta l' uniformità, benchè i riſultati ſiano diſcordi tra di loro. Tutto ciò ſi renderà paleſe nella parte II., III., e IV. della ſeconda Memoria.

DI VARIE MINERE

Di metalli, e d' altre ſpecie di foſſili delle montane provincie Venete di Feltre, di Belluno, di Cadore, e della Carnia, e Friuli; e ſpecialmente del ſale catartico amaro a baſe di magneſia ſcoperto recentemente in quelle montagne.

MEMORIA MINERALOGICA E CHIMICA

Del Sig. GIOVANNI ARDUINO Profeſſore di Mineralogia, e di Chimica metallurgica, e Pubblico ſopraintendente alle coſe Agrarie dello Stato Veneto.

LE minere di metalli, e d' altri foſſili che ſervono agli uſi umani, prodotti dalla natura nelle parti interne dei monti, ſono il ſuggetto d' un ramo molto eſteſo ed utile dell' induſtria e commercio di moltiſſimi paeſi d' Europa e d' altre regioni. Grande e perenne profitto ſe ne trae nel vaſtiſſimo Impero di Ruſſia, particolarmente nella Siberia; e e nei Regni di Svezia, di Danimarca, nella Novergia, di Pruſſia, di Polonia, Boemia, e Ungaria: e così pure nell' Annovereſe, nella Saſſonia, nel Bannato di Temiſvar, nella Tranſilvania, e nella Stiria, Carniola, Carintia, Tirolo, Saliſburgheſe, e nell' Auſtria; ed in altri molti Stati della Germania, e nell' Inghilterra.

Non trovandoſi la Metallurgia molto coltivata nelle vaſte provincie del Regno di Francia, quell' illuminato Regio Governo, contemplando i vantaggi di quegli Stati, ne' quali tal arte con ben inteſa pratica proſperamente ſi eſercita, ha con Reale Decreto del Conſiglio di Stato del dì 16 Marzo 1783 fondato un Collegio minerale per l' iſtruzione di parecchi Giovani nelle Scienze e Arti biſognevoli a poter divenire abili Metallurgi. Dopo che delle medeſime trovanſi a ſufficienza inſtruiti, vengono inviati ad apprendere la pratica delle arti *Montaniſtica* (*a*), e *Metallurgica* (*b*) ne' luoghi della Germania, dell' Ungaria, e d' altre provincie, dove le arti ſteſſe da gran tempo con iſquiſita eſperienza lucroſamente ſi eſercitano. Di quel Regio Inſtituto, già dettagliatamente riferito nel Tomo ſettimo del nuovo Giornale d' Italia, che qui ſtampavaſi dal fu Librajo *Benedetto Milocco* (pag. 407 e 408), io n' ebbi informazione nell' autunno di detto anno 1783 dal Sig. Capitano *Stoutz* di Naſſau, Ingegnere delle Minere di S. M. Criſtianiſſima, mentr' egli, inviato dal prefato Collegio con altri due Alunni dello ſteſſo, *Lefebre*, e *Haſſefratz*, alle Minere di Carintia, Stiria, Ungaria ecc., venne a vedere i Minerali da me raccolti.

La fondazione di tale Collegio ha il provvido oggetto d'avere nel Regno ſoggetti inſtrutti e pratici di quanto abbiſogna alla buona condotta delle impreſe minerali, ſenza uopo di Mineriſti foreſtieri, troppo diſpendioſi, e non di rado mancanti di probità, o di quelle cognizioni, che al buon eſito delle montaniſtiche e metallurgiche operazioni ſono neceſſarie. Affinchè però gli Alunni, inviati ad apprendere la pratica delle arti dianzi nominate in eſteri paeſi, non poſſano abuſare del tempo, e del danaro, che loro ſi dà, viene a' medeſimi limitato il periodo della loro dimora in ciaſcuno dei luoghi a' quali vengono diretti; e debbono in capo a ciaſcun meſe dar conto a' Preſidenti del Reale Collegio minerale del da loro oſſervato, delineato, ed appreſo; traſmettendo anche a' medeſimi li da loro rilevati diſegni delle fabbriche, macchine e ſtrumenti, sì dei lavori ſotterranei, ed aggiacenze eſteriori, che dei forni, e delle altre coſe appartenenti alle ſcavazioni, ed ai preparamenti, fuſioni, e purificazioni dei minerali.

Tali ſono le provvidenze, ch' io inteſi dal prefato Capitano *Stoutz* eſſere ſtate inſtituite dal Regio Conſiglio di Sta-

---

(*a*) L' arte montaniſtica comprende nel ſuo ſignificato tutto ciò che concerne ai lavori che ſannoſi nei monti per lo ſcavamento delle Minere.

(*b*) Metallurgia, o ſivvero arte Metallurgica abbraccia nella ſua ſignificazione tutto ciò che appartiene al preparamento dei minerali eſcavati, ed alla ſeparazione dei metalli, o d' altre utili ſoſtanze, che contengono, dalle parti eterogenee.

to, e poſteſi in pratica, onde per l' avvenire avere nel Regno dei ſoggetti abili, per ſcienza e pratica, a promovere e dirigere fruttuoſamente lavori minerali in quelle provincie, dove parecchie vene metallifere ſono note, e di moltiſſime vi appariſcono gl' indizj; come rilevaſi da varie Opere pubblicate.

Lo Stato Veneto non manca certamente di produzioni del Regno foſſile, sì metalliche, che d' altre diverſiſſime ſpecie e qualità. Le ſue provincie, dette di Terraferma, confinanti verſo il nord con le alpi del Dominio Auſtriaco, e con altri Stati, hanno tutte a quella parte vaſta eſtenſione di montagne, molte delle quali ſono metallifere. Per tali ſono note alcune di quelle del Friuli, e della Carnia, di Cadóre, e dei Capitanati di Zoldo, e d' Agordo nella provincia Belluneſe; e quelle del Feltrino limitrofe coll' eſtero diſtretto di Primiero. Metallifero è anche quel tratto di monti proſſimi alla Terra di Schio nel Territorio di Vicenza, ſituati tra il monte Summano e le alpi d' Arſiero, di Poſena, e di Recoáro. Gran porzione delle montagne Salodiane, Breſciane, e Bergamaſche è pure della medeſima qualità; cioè la ſerie d' eſſe montagne la più ſettentrionale, terminata al nord dalle alpi del Principato Veſcovile di Trento, e da quelle de' Grigioni. Tra le parti montuoſe della terra io diſtinguo coll' aggiunto di metallifere quelle ſole, che coſtano di quei generi di pietroſi e terrei materiali, tra li quali, oltre al ferro, ſogliono trovarſi le minere di altri metalli. Il ferro, o ſia il di lui principio terreo, è ſi generalmente ſparſo, ſótto diverſiſſime forme e modificazioni, nel Regno foſſile, anche dove l' altre ſoſtanze metalliche non s' incontrano mai, che ſe dar ſi voleſſe l' epiteto di metalliferi a tutti i monti che ne contengono, ſvanirebbe ogn' idea di conveniente diſtinzione. Nelle prefate metallifere montagne, che da me talvolta diconſi anche minerali, veggonſi ancora in più luoghi gli ſcavamenti in molto numero di minere (*a*) metalliche, e d' altri foſſili, fattivi ne' traſcorſi ſecoli con lavori di lunga durata e di grande diſpendio: ſegni non dubbj che profittevolmente ſi conducevano. Ora giacciono però, per la maſſima parte, da gran tempo abbandonati; nè vi ſono in attuale eſercizio di lavoro che varie cave qua e là ſparſe di marmi e d' altre pietre, di ſabbie per varj uſi, e di coti e di mole da arrotare ferramenti, di macine per mulini, di terre colorate per Pittori, di antraci bituminoſi, detti carboni foſſili, e d' argille figuline comuni, e bianche porcellaniche. Quanto a' metalli: numeroſe fodine di ferriferi minerali, come ne' paſſati tempi, anche oggidì ſi lavorano nelle montagne dei Territorj Breſciano e Bergamaſco; grande minera di rame ſi eſcava nel Belluneſe; una di argento vivo ſi è riaperta, non ha guari, nel Feltrino, e nelle montagne di Cadóre eſtraggeſi in più luoghi gran copia di pietra calaminare, che diciamo giallamina, e con eſſa anche della galena, o ſivvero minera di piombo ſulfurea.

Oltre alle cave e ſegni degli antichi lavori minerali, ancora riconoſcibili nelle teſtè mentovate montagne, ne fanno pure teſtimonianza parecchj monumenti ſtorici, e d'altri generi. Io diverſi ne ho già raccolti, maſſimamente circa le antiche fodine dell' argento, e d'altri metalli delle Vicentine montane ſituazioni; ma perciocchè non è mia intenzione di parlare per ora, che di alcune di quelle, sì de' paſſati ſecoli, che de' noſtri tempi, delle alpi Carniche, Cadorine, Belluneſi, Feltrine, e Friulane; e ſpecialmente delle recenti ſcoperte fatteſi in quelle parti d'un ſale ſimile a quello d'Epſom, detto ſale d' Inghilterra; così non farò che riportare que' ſoli di tali monumenti, che alle medeſime alpine provincie ſono relativi.

Il dottiſſimo *Giorgio Agricola*, Mineralogo ſommo del ſuo

(*a*) Mi ſi perdoni ſe a me piace di ſcrivere minera e minere, non miniera e miniere, benchè così ſia l'uſo di parlare e di ſcrivere. Minera, a mio parere, ſarebbe termine proprio e ſpecifico per dinotare una vena o fodina di cinnabro, ſe minio, ſecondo gli Antichi, ancora ſi chiamaſſe; come diciamo argentiera, ramiera, ferriera ecc. Siccome non ſi dice minierale, nè minierali, ma minerale e minerali; così credo lecito il termine minera ecc. uſato da alcuni vecchj Scrittori, eſſendo già ugualmente inteſo.

tempo, e grande maeſtro delle arti Montaniſtica e Metallurgica, nel libro terzo *de natura Foſſilium*, dove indica i luoghi ne' quali trovavanſi minere di allume, dice che dello ſteſſo erane nel Norico *ad Julium Carnicum*, il qual luogo aſſicura *Cluverio* eſſere l'odierno Zulio della Carnia (*a*) che in antichi tempi fu con altre parti del Norico abitata da' Tauriſci.

Quei Barbari poſſedevano nelle alpi Noriche minere d'oro molto ricche, le quali da ciò che ſe ne legge parmi rilevarſi ch' erano, ſe non tutte, parte almeno nei monti del Friuli, ed anche forſe della Carnia. Il ſopraccitato *Agricola*, nel ſuo ſecondo libro *de veteribus & novis metallis* dove delle minere aurifere fa menzione, dice avere *Polibio* laſciato ſcritto che i Tauriſci nel Norico eſcavavano l'oro, il quale, ſcavata la terra alla profondità di due piedi, toſto vi ſi trovava, parte così puro che di sè non perdeva che un ottavo del ſuo peſo nella purgazione al fuoco, e parte era biſognoſo di più forte purgamento nelle fornaci. Dalli di lui sì brevi cenni però non ſi ha verun indizio delle Noriche ſituazioni di tali minere: ma bensì da ciò che ſe ne legge in *Strabone* ſcrittore moltiſſimo più antico (*b*).

Præterea Polybius auctor eſt (così ivi leggeſi tradotto) *ſua ætate apud Aquilejam, & in Tauriſcis, præcipue in Noricis, auri ſolum ita ferax fuiſſe repertum, ut exhauſta duum pedum altitudine terra, ſtatim occurreret aurum foſſile, foſſum autem XV. pedes non exceſſiſſe, fabæ aut lupini quantitate, octava tantum parte decocta: aliud majori quidem diffuſione indiguiſſe, ſed ea admodum utili.... Nunc omnia iſta auri metalla Romani poſſident*. Ed in altro luogo dice eſſo *Strabone* (*c*) *Extra Venetiæ fines Aquileja eſt, flumine vero ab alpibus deſcendente diſterminatur, per quod ſurſum navigatur ad urbem uſque Norejam..... Habet hic locus auri lavacra & ſecturas ferri præclaras*.

(*a*) *Philipp. Cluverii introduct. ad univerſam Geographiam &c. Lib. III. Cap. XXIV.*

(*b*) *Strabon. Rerum Geographicarum. Tom. prim. Lib. IV. Amſtelodami apud Joannem Wolters MDCCVII.*

(*c*) *Strab. de ſitu orbis &c. Tom. primo Lib. V. Lugduni apud Cabrielem Coterium. MDLVII.*

Cluverio , parlando dei Norici , aſſeriſce (*a*) che *Noreja*, dalla quale traſſero il nome , ſopra Aquileja era ſituata; e dichiara poi ch' era deſſa nelle vicinanze di Venzone , *circa Venzonum Noreja fuit, Tauriſcorum urbs, qui inde poſtea Norici trans alpeis dicti* (*b*).

Venzone , caſtello ſituato tra le alpi Giulie, è alla Carnia vicino; e s' è vero che ivi eſiſteſſe detta città dei Tauriſci , ed i Lavacri dell' oro , convien credere ch' eſſo metallo da' luoghi di là non molto diſtanti ſi eſcavaſſe; e quanto al ferro, di cui fa pur cenno *Strabone*, è noto eſſerne in più ſiti di quelle montagne, e che molto n' è ſtato eſcavato nei monti tra la Pontebba e Venzone , alla parte deſtra del torrente Fella , che paſſando dalle alpi ſuperiori tra le due Pontebbe, Auſtriaca, e Veneta, ſcende a ſcaricarſi nel fiume Tagliamento.

L' aſſerzione di *Cluverio* però, che Noreja foſſe proſſima a Venzone, non ſi uniforma punto al teſto di *Strabone*, da cui ſi fa diſtante mille e dugento ſtadj da Aquileja. Ma *Giovanni Candido* ne' ſuoi Commentarj Aquilejeſi (*c*), dimoſtrando eſſervi manifeſto errore di fatto dove leggeſi in detto teſto Straboniano *extra Venetiæ fines Aquileja eſt &c.*, rende credibile eſſere lo ſteſſo *mendoſo* anche riſpetto alla prefata diſtanza, come tale egli lo giudica in più altri luoghi. Lo ſteſſo *Candido*, facendo cenno delle minere, che al dominio d' Aquileja appartenevano, ci ha laſciato ſcritto: *Sunt & abſtruſorum metallorum felices divitiæ. In Hydria namque apud Tulminum ætate noſtra argentum vivum, quod alibi parce inveniri ajunt, abunde adeo efluit, ut &c..... argenti & ferri inexhauſtæ venæ e monte Primerio ſupra Juliam ſubfodiuntur : æriſque e monte Crucis, ubi arx Turonis, nunc ſolo æquata, impendebat* (*d*): *& plumbi vis ingens ex Ebrontio* (*e*), cioè Auronzo di Cadore.

Vannuccio Biringuccio, gentiluomo Saneſe viſſuto nel ſecolo XVI. , ſoggetto nelle coſe metallurgiche molto verſato,

---

(*a*) *Cluver. Lib. III. Cap. VI.*

(*b*) *Cluver. Lib. III. Cap. XXIV.*

(*c*) *Joannis Candidi , Commentariorum Aquilejenſium, Lib. primo.*

(*d*) Monte Primerio o Primoſio, e monte Croce ſono nella Carnia.

(*e*) *Joann. Candid.* loco citato.

nel libro da lui intitolato *Pyrotechnia*, dove parla delle minere d' argento, e lauda ſopra tutte le da lui viſitate nel Tirolo ed in altri luoghi, quelle che allora cavavanſi dai monti di Schio nel Vicentino (*a*), fa anche menzione di quelle della Carnia, dove una aveane coltivata nel monte, cui dà egli il nome di *Avanzo*, che dovette poi abbandonare per la guerra dell' Imperatore Maſſimiliano contro la Veneta Repubblica, la quale reſe quei paeſi inabitabili. Ci ha pure laſciata memoria delle minere del medeſimo prezioſo metallo delle Carniche montagne anche *Vincenzio Scamozzi* nel Libro VII. Cap. XXXIII. del ſuo Trattato d' Architettura.

Il Sig. Canonico *Niccolò Graſſi*, Parroco di Cercivento in eſſa provincia della Carnia, dove nelle ſue *Notizie Storiche*

(*a*) Le minere dei monti vicini a Schio, che ſi ſa eſſere ſtate ne' paſſati ſecoli le più doviziofe di argento, ſi eſcavavano dai colli del Tretto, ſopra a' quali giace l'alta montagna di Lovegno. Molte di quelle antiche Cave ſonoſi turate nelle loro bocche con le terre e pietre cadutevi, ed alcune reſtano ançora aperte e permeabili. Le più vaſte e profonde, e per ogni verſo in mille guiſe diramate, ſono quelle che nomanſi il Pozzo di San Patrizio, nelle quali io ſceſi nell' autunno dell' anno 1741, accompagnato da quattro di quei Canopi, che cavano dai medeſimi colli l'argilla bianca ad uſo di Porcellane, e d'altri figulini lavori; e mi vi trattenni alquanto più di quaranta ore oſſervando, e andando in cerca di qualche rimaſuglio dell' argenteo minerale, di cui non mi riuſcì trovare che qualche particella qua e là ſparſa nel duro macigno: tanta fu la diligenza degli antichi cavatori nel raccoglierlo ovunque ne ſcoprivano. Il *Biringuccio*, nella ſua Pyrotechnia, dice che ſapeva eſſerſene trovato di così ricco, che conteneva il quarto, e talvolta la metà per cento d' argento. Io di quello, che allora, ed in altre poſteriori indagini ho potuto proccurarmi, ho fatto ſaggio docimaſtico, d' onde avere qualche certa idea di ſua ricchezza in detto metallo; e benchè foſſervi commiſte delle pietroſe inſeparabili eterogeneità, m' ha reſo argento in ragione di cento trentadue oncie, o ſivvero di marche ſedici e mezzo per ogni libbre cento d' eſſo minerale; il quale è di colore quaſi nero, pochiſſimo ſulfureo, e miſto di rame, e di zinco, con eruggine verde ed azzurra, in matrice di ſelce nericcia, ed anche di ſpato ponderoſo bianco: vi è anche tal volta congiunta della galena di minuta criſtallizzazione ed oſcura. Galena ſimile vedeſi in più ſiti di quei colli ſcarſamente ſparſa in matrici di ſpato ponderoſo bianco; ma non ha, oltre al piombo, che circa un' oncia d'argento per ogni cento libbre; e di queſta non fecero gli Antichi verun conto. Fatto da me conoſcere quale ſi foſſe il ricco minerale, che colà da' medeſimi eſcavavaſi, ad uno di que' Canopi, detto *Marco Pozzan*, ne ha egli rinvenute traccie in una di quelle vecchie Cave; e s' è già incominciato ad inſeguirne la vena. Vi ha anche ritrovate belliſſime concrezioni ſtalattitiche, dette impropriamente Flos Ferri, venuſtamente ramificate, e di nivea bianchezza.

della medeſima, ſtampate in Udine nell' anno 1782 per li *Fratelli Gallici*, fa menzione delle minere di quelle montagne, così ne parla. “ Non va priva queſta provincia di miniere.
„ Nel monte Primoſio, in vicinanza alla villa di Timavo,
„ come ancor in Agrons, villa del Canale di Gorto, ſi
„ veggono oggidì i buchi delle Cave, onde eſtraevanſi i minerali
„ d' argento. Nelle pertinenze altresì di Cercivento,
„ in un boſco detto d' Agalt, già anni ſono, fu ſcoperta
„ una miniera d' argento.... Parimenti nel contorno di Forno
„ Avoltri già due ſecoli ſi eſtraevano miniere, che purgate
„ davano diverſi metalli, ed avea di eſſe la inveſtitura
„ un Nobile Molin Patrizio Veneto: vedeſi tuttora una parte
„ di edifizio diroccato, ove chiamaſi Cà Molin. Vi ſi trovano
„ anche marmi di un bel miſchio in molti luoghi della
„ Carnia, de' quali ſe ne fanno varj uſi, ſiccome ſervir
„ poſſono alle fabbriche al pari di molti altri d' Italia. Nel
„ Canale di San Pietro in vicinanza al villaggio di Rivalpa
„ v' è una miniera di pietra viva di color piombino, la
„ quale è molto atta per le fabbriche del paeſe. Viene ſcavata,
„ indi in varie guiſe colà lavorata da que' Rivalpeſi,
„ artefici aſſai pratici in tal meſtiere. In oltre dal monte
„ di San Pietro ſcaturiſcono certe acque, chiamate in noſtra
„ lingua *Pudie*, calde d' inverno, e fredde d' eſtate, e che
„ conſervano colore ed odore ſulfureo. „

Nei monti del diſtretto di Cadóre, ſituato al ponente della Carnia, e alla ſteſſa contiguo, ſonoſi coltivate minere di ferro, e di piombo, fino circa alla metà del corrente ſecolo. Quelle del ferro eſcavavanſi in *Chierſiè* di Cibiana, in *Crot*, e *nel Col di Santa Lucia*; e per la loro fuſione vi furono tre forni: uno in *Cavril*, uno nel comun di *Borca*, ed il terzo nel diſtretto di *Zoldo* nel Belluneſe. In queſto medeſimo diſtretto ſi è anche ſcavata, per lungo tempo, una minera di ottima galena (*a*) nella valle *Inferna*, da cui eſ-

---

(*a*) *Plumbum ſulphure mineraliſatum Galena*. Waller. *Syſtema mineralogicum*.

traevaſi piombo così puro e buono quanto quello tanto pregiato di *Bleyberg* della Carintia (*a*).

Fodine di piombo ſuſſiſtono ancora oggidì in attualità di lavoro utile nei monti Cadorini della Comunità di Auronzo (*Ebrontium*) cioè nei luoghi denominati *Argentiera*, *Pian di Barco*, *e Grinia*. Il minerale piombifero è galena, o ſia piombo dallo zolfo mineralizzato; e vi ſi trova congiunta in copia grande giallamina (*lapis calaminaris*), la quale è il principale movente dei lavori che vi ſi fanno, dovizioſa eſſendo del terreo principio, o ſia calce dello zinco, o zingo; e quindi ottima e molto utile per la converſione del rame in oricàlco, che diciamo ottone, e meno impropriamente latone: e ciò con inſigne aumento del di lui peſo.

Gl' imprenditori ſono Tedeſchi: le fodine di *Pian di Barco*, e di *Grinia* appartengono, in affitto, agli Eredi *Kopſgutter*, e la loro giallamina conduceſi alla fabbrica di latone a *Schwatz* nel Tirolo. Quelle dell' *Argentiera* ſono affittate al Sig. *Giuſeppe Kaltner* di Salisburgo, e la giallamina delle di lui cave traſportaſi alla ſua fabbrica di latone da eſſa città poco diſtante. Egli, trovandoſi qui in Venezia, mi diſſe che ogni condotta di detta ſua giallamina, col mezzo di muli, dall' Argentiera alla di lui fabbrica nel Salisburgheſe, viaggio pel quale impieganſi tredici giorni, viengli a coſtare quattro fiorini il centinajo di libbre: prova evidente della molta importanza di ſiffatto minerale, di cui abbondiamo ſenza che qui uſo alcuno ſe ne faccia. Un mio Amico pratico di quelle montagne m' ha recati ſaggi di giallamine da lui trovate in più luoghi delle medeſime, e particolarmente nelle appartenenti al Capitanato di Zoldo. Trovanſene pure, benchè per lo più ſotto altre forme, cioè di *blendi* (*b*), nei

---

(*a*) Eſſa, ora abbandonata, piombifera fodina del Zoldeſe, appartenente a S. E. Sig. *Gio. Carlo Grimani* Veneto Patrizio, è proſſima al villaggio di Arſiera del Comune di Fornaſiga. Ne ceſsò il lavoro per eſterne vicende, non per mancanza di continuazione della materia metallica; la quale, a parere d' intendenti, potrebbe ſcavarſi ancora con utilità, ma la grave ſpeſa neceſſaria per dare ſcolo all' acqua di quelle cave a pozzo, ora ſommerſe, è la cauſa che da niuno abbiaſi poi avuto coraggio di ripigliarne l' impreſa.

(*b*) *Zincum ſulphure & ferro mineraliſatum. Pſeudo galena, &c.* Waller. *Syſtema mineralogicum*.

monti minerali Vicentini, e nelle metallifere montagne Breſciane e Bergamaſche.

Una vena di galena ricchiſſima di piombo coltivavaſi da' Tedeſchi, già molti anni, nel monte *Giao* della Comunità di San Vito, dove il diſtretto di Cadóre confina col Tirolo: e nei monti dell' Agordino Capitanato altra vena piombifera è ſtata, non ha guari, ſcoperta la quale è una galena di minuta, granuloſa, ed oſcura criſtallizzazione, con meſcolanza di minera di ferro di forma arenoſa, molto foſca e retrattoria.

Nello ſteſſo Agordino Capitanato è la *Valle Imperina*, in cui ſono le profonde e vaſte fodine, e le fonderíe del rame, note col nome di Minere di Agordo. Il minerale che vi ſi eſcava, e da cui traggeſi zolfo, vetriuolo, e rame, è pirite ferreo-cupreo-ſulfurea, generataſi in copia grandiſſima, e veramente maravaglioſa ſotto eſſa valle, tra le ſotterranee parti di monti di diverſa natura; uno al ſud della ſteſſa, di ſaſſo calcario rozzo *calcareus rudis*, l' altro al nord, di ſchiſto corneo *fiſſilis corneus*, *Horn ſchieffer* de' Tedeſchi (Waller. *Syſtem. mineralogicum*). Anticamente, oltre ai minerali che ſomminiſtravano ſolamente del rame, ſe ne ſcavavano anche di quelli che unito al rame davano argento, ed avevanvi le loro proprie vene; come rilevaſi con indubitabile certezza dalle Memorie eſiſtenti nell' Officio del *Magiſtrato Eccellentiſſimo ſopra le Minere*, e ſpecialmente dal Libro, o ſia Proceſſo ſegnato A. e N.° 16. in cui ſono ſcritti gli accordi, le controverſie, litigi, e atti corſi nell' Officio Minerale di Agordo, tra li diverſi poſſeſſori di quelle antiche Cave, dalli 9 Febbrajo dell' anno 1568 fino alli 20 pur Febbrajo del 1570. Nella carta che porta il numero 1218 ſi legge in una ſcrittura del Magnifico *Jacopo di Priuli* contro il Magnifico *Angelo Molin*, che avanti la grande inondazione e ruina accaduta nell' anno 1567 erano ſtate cavate e cernite vene di argento dalla buca di San *Fioriam*, la quale nel ſuſſeguente anno 1568 chiamavaſi di Sant' *Agneſe*. Nelle carte ſegnate 1226 e 1227 ſta regiſtrato un Proclama del Vicario Generale delle Minere per l' *Eccellentiſſimo Magiſtrato ſopra le Acque*, pubblicato in Agordo li 28 Dicembre di detto anno 1568, col quale, oltre alle regole e diſcipline ordinate pel ſiſtema generale di quei lavori minerali , e dei boſchi ecc., vi ſi comanda che tutto l' argento debba paſſare alla Zecca, con queſte preciſe parole. " In eſecuzione delle leze et parte ſopra ciò diſponente, inerendoſi a più Proclami in queſto fatto , ſi notifica a cadauna perſona ſia chi ſi vogli „ che debbano portar , o ver mandar tutti li arzenti che „ trazerano dalle minere imediate quelli affinati in Venezia „ in Zecca; ſiccome ſono per ogni debito e raſon obbligati „ in la bolletta del Spet. Vicario ſotto tutte le pene etiam „ di contrabando in dette leze et parte contenute „.

In una ſcrittura poi, regiſtrata nelle carte 1244, e 1245, del Magnifico *Antonio da Molino* , Poſſeſſore di alcune di quelle Cave, contro una domanda di M. *Andrea Barpo*, tra varie altre particolarità, gli dice " quanto alla ſeconda parte di eſſo Mandato circa corer delle vene ſeparatamente „ li dico che le vene che ſi cavano nella buſa di S. Feliſe „ ſono vene d' arzento, et quelle che ſi cavano nella buſa di „ Sant' Agneſe ſono da rame, le qual a niun partido ſe dieno meſcedar, ne confonder inſieme, ecc. „.

Da' Capitoli propoſti li 6 e 8 Febbrajo dell' anno 1570 nel Vicariato Minerale di Agordo da *Pietro Buono* ed *Emiliano* fratelli *de' Pietroboni* dello ſteſſo paeſe; e dalle depoſizioni con giuramento ſopra li medeſimi di quattordici teſtimonj a tale oggetto legalmente citati, riſulta, come leggeſi nel ſopraddetto Proceſſo dalla carta 1362 fino alla ſegnata 1370, ch' eſſi *Pietroboni* poſſedevano molti carati dei minerali che ſi eſtraevano dalle Cave nominate *S. Bartolomeo*, *S. Silveſtro*, *S. Marco*, *S. Felice*, *S. Agneſe*, *S. Rocco* , *S. Sebaſtiano*, *S. Anna*, *e S. Maria*; dalle quali fu ſtimato poterſene eſtrarre annualmente circa ſettantaduemila miſure formanti, a un di preſſo, centoquarantaquattro mila centinari, ciaſcuno de' quali dava in quel tempo ſolitamente dalle tre fino alle cinque libbre di rame raffinato . Vi ſi legge pure che nella cava *S. Marco* , ed in altre diverſe delle prenominate eranvi filoni di minere di rame e argento da poterſene cavar annualmente diciottomila miſure; cioè da trentaſei mila centinaja di libbre all' incirca.

Tanto numero di fodine , e sì copioſe di minerali , dove di ſolo rame, dove di rame e di argento, ſotto la predetta valle, e monte dell'Imperina, e montagna di Gona, ed anche nel canale del Mis, coltivate in que' tempi da molti particolari nominati nel prefato Proceſſo, col decorſo di anni reſtarono, non ſo per quali ſtrane viciſſitudini, onninamente abbandonate, e ſe n' è perduta la traccia, riſpetto a quelle di argento, in modo tale, che i tentativi ſattivi in queſto ſecolo per rinvenirne le vene ſono riuſciti vani e di pura perdita.

Quanto al minerale piritoſo, da cui anche oggidì traeſi zolfo, vetriuolo e rame, per le notizie ſtatemi comunicate da chi vi ha ingerenza, fu un *Franceſco Crotta*, dal quale deriva l' Eccellentiſſima Famiglia patrizia dell' iſteſſo nome, che nell' anno 1615, per ceſſione avuta da certo *Angeli*, ne intrapreſe l' indagine; e continuati li ſotterranei lavori inutilmente, anzi con graviſſime perdite, fino circa al 1629; ebbe allora la feliciſſima ſorte di ſcoprirne grandiſſima e doviziosa vena, d' onde ſe ne ſono tratti in ſeguito rilevantiſſimi profitti per lui, pe' ſuoi ſucceſſori, per il pubblico, e per altri, che v' inſtituirono in progreſſo particolari lavori; ed a beneficio non lieve di quelle montane popolazioni. Preſentemente però non vi ſi eſercita la metallurgia che a conto pubblico, e dell' Eccellentiſſima Famiglia *Brandolini*, trovandoviſi le cave Crotta, e degli altri inveſtiti di quei ſotterranei lavori, parte pericoloſe, parte altamente ſommerſe dalle acque di detta valle Imperina, per li ſubiſſamenti e rovine accadute in varj tempi di alcune delle caverne, che dicono Zecche, ridotte di troppo enorme vaſtità a forza di trarne la metallifera materia, ſenza la neceſſaria cautela di laſciarvi li biſognevoli ſoſtegni.

Delle minere di rame di Agort, o Agordo, trovaſi fatta menzione dal celebre *Emanuele Swedemborgio* nel ſuo Trattato che ha per titolo *Regnum ſubterraneum ſive minerale de Cupro & Orichalco &c. Paragraf. XIII.* Ne ha pure ſcritto dottamente e con pratica conoſcenza il Nob. U. Sig. *Agoſtino Soderini*, patrizio Veneto, in tre Lettere ſopra l' Arte metallica, pubblicate l' anno 1716 nelli Tomi 26. 27. e 28 del Giornale de' Letterati d' Italia, ſtampato in Venezia da *Gio. Gabriello Ertz.* Tra l' altre varie particolarità mineralogiche, egli vi ſpiega come di quei minerali ſi formino le *roſte* per torrefarli, e ſcacciarne così molto dello zolfo che contengono; e come dello ſteſſo non poco vi ſi raccolga: come, dopo torrefatti, ſe ne ſcelgano le porzioni utili da fonderſi, dette *tazzoni*, e ſe ne cavi il rame; e come dalla rimanente calcinata materia, non fuſibile con utilità, ſi eſtragga per liſciviazione e confetti il vetriuolo, e ſe ne precipiti il rame che vi ſi trova diſciolto, col mezzo del ferro poſto nelle caldaje di piombo, mentre nelle medeſime ſi fa bollire e ſvaporare il liſcivo vetriuolico fino al grado eſpediente per la criſtallizzazione di tale ſpecie di ſale metallico.

La materia metallifera, di cui coſtano quelle grandiſſime vene di detta valle Imperina, è tutta pirite, ma non però omogenea, varia eſſendo, riſpetto ſpecialmente al rame, che unito al ferro, ed a terra non metallica, vi ſi trova dallo zolfo mineralizzato. La migliore, cioè la più ricca di rame, che là col nome di *vena* dall'altra ſi diſtingue, è d'un giallo analogo a quello dell'ottone, tale che ci viene dalle fabbriche dove ſi forma; ma quella che poco ne contiene, nomata *Chiſſo*, dal Tedeſco *Kiess*, è d' un pallido cinericcio, imitante il colore del miſto metallico detto *bronzo*. Queſto *Chiſſo* forma il maſſimo corpo di quei cumuli, o grandiſſimi filoni che ſieno, e la *vena* teſtè mentovata vi è dentro ſparſa, dove molta, dove poca, e dove ſcarſiſſima e rara. Vi ſi è trovata qualche volta framiſchiata anche della galena di minuta grana come d' acciaro, molto compatta, aſſai ſulfuroſa, e contenente col piombo dell' argento. Io conſervo tra li miei minerali alcuni pezzi di quella, che incontravaſi non di rado negli ſcavi minerali dell' Eccellentiſſima Caſa Crotta, la quale via ſi gettava come materia inutile, anzi dannoſa molto alla riduzione del rame; e davaſele il nome improprio d' antimonio.

Avvegnachè de' ſopraddetti piritoſi minerali, dopo che ſtati calcinati, o come dicono, arroſtiti, molto vetriuolo ſi ottenga con la liſciviazione, ſvaporamento, e criſtallizzazione; nondimeno ſarebbe inconveniente il dar loro il nome improprio di *piriti vetriuoliche*, conſiderate nello ſtato originale, e prima ch' abbian ſofferta alterazione. Imperocchè nelle piriti non eſiſte nativamente il vetriuolo, ma bensì lo zolfo, dalla ſcompoſizione del quale eſſo deriva. L' etiologia della vitriolizzazione delle piriti trovaſi già sì dottamente deſcritta in parecchie delle Opere di celebratiſſimi Chimici, ch' io non iſtarò a farne qui ſuperfluamente repetizione. Agiugnerò ſolo a queſto propoſito che lo zolſo entra eſſenzialmente nelle piritiche concrezioni, una eſſendo delle loro ſoſtanze coſtituenti, anzi quella per cui piriti ſi nomano. Lo ſteſſo può eſtrarſene a piacere, sì con appropriati diſſolventi, che col mezzo della diſtillazione; ma non così il vetriuolo, ſe non ſe dopo che, per ſopravvenuta alterazione, e nuova modificazione del combinamento de' loro principj atti a produrlo, non ſiaviſi generato: lo chè è parimente vero riſpetto alla formazione dell' allume, quando la di lui terra ſpecifica trovaſi miſta nel naturale piritoſo compoſto.

Ora ritornando a favellare della valle Imperina, la quale diſcendendo dalla montagna di Gona (così chiamata nel ſecolo XVI.) ſcorre verſo oriente a ſcaricare le ſue acque nel Cordevole, uno dei formidabili influenti del fiume Piave, le minere, delle quali ho ſopra parlato, ſecondano con la ſotterranea loro eſtenſione in lunghezza l' andamento della medeſima valle; come appare da' diſegni rappreſentanti diverſe delle fattevi eſcavazioni, eſiſtenti nell' Officio degli Eccellentiſſimi Signori *Deputati* dall' *Eccelſo Conſiglio di Dieci ſopra le minere*.

Partendoſi dall' Imperina, e valicato il monte di Gona, ſcendeſi, progredendo verſo occidente, nella valle delle Monache, detta anche valle alta, la quale divide il diſtretto di Agordo, provincia Belluneſe, dal Territorio di Feltre; e più in alto, dove nomaſi valle Pezzea, confina il Feltrino con l' eſtere Pertinenze di Sagron della Contea di Primiero.

Proſſime all' alveo d' eſſa valle delle Monache, dalla quale deriva il torrente *Mis*, diſcendente tra rupeſtri ſcoſceſe montagne a ſcaricarſi nel fiume Piave, io viſitando quei luoghi nell' autunno dell' anno 1744 vidi grande quantità di ſcorie delle minere che colà eſcavavanſi. Le medeſime minere, e gli edificj fuſorj, che ivi furono, nell' anno 1570 appartenevano alli ſopraddetti fratelli *Pietroboni* d' Agordo, come rilevaſi dal precitato Proceſſo, dal quale appare che il metallo eſtratto dai minerali di quella valle, detta allora canale del *Mis*, era il rame.

Nei monti appartenenti al territorio Feltrino, che coſteggiano la prefata valle nel deſtro ſuo lato, ſi è, non ha guari, eſcavata minera cinerea di rame molto ricca di argento, ſparſa a filoncini, a ſpruzzi, e maſſette, per entro groſſo filone di minerale ferreo ſpatiforme di colore caſtagno. Ne ha ceſſato il lavoro perchè a certa profondità l' argentifera materia, per quanto ho inteſo da chi ne aveva la direzione, troppo ſcarſa s' incontrava, e la ſpeſa di andarne in traccia riuſciva troppo gravoſa, e l' eſito incerto.

Nella medeſima catena de' monti Feltrini, dov' eſſi confinano con quelli della Contea di Primiero, mediante la dianzi nominata valle *Pezzea*, ſonovi delle vene di argento vivo mineralizzato, o come da altri vuol dirſi, maſcherato dallo zolfo ſotto la conſueta forma cinnabrina. Vi è diſpoſto a piccioli filoncini in matrice argilloſa d' un cinereo nericcio, tra pietre calcarie; ed il cinnabro, entro ſparſo in eſſa matrice, è ſovente miſto con piriti ferreo-ſulfuree, che ſtando eſpoſte all' aria non tardano molto a cadere in ſatiſcenza e vitriolizzarſi: come ho veduto nei ſaggi che ancora ne conſervo.

Nel ſuddetto anno 1744 io vidi le cave che allora vi ſi facevano a conto Pubblico; e dopo qualche tempo fui preſente a parecchie diſtillazioni dell' argento vivo dalle materie minerali colà raccolte: operazioni che ſi effettuavano nell' Officina detta di *Partioro* del fu Sig. *Antonio Caſon* in queſt' inclita Capitale. Ne ceſsò poi il lavoro, forſe per non bene diretta economia; e quelle mercuriali ſodine rimaſero lungo tempo totalmente abbandonate. Ora però ſonoſi nuovamente aperte a ſpeſe di particolari inveſtiti, ma i minerali che ſe ne raccolgono non più qua ſi traſportano; eſſendoſi conoſciuto aſſai più economico il farne diſtillare nel luogo iſteſſo, d' onde ſi cavano, il mercurio: lo che ſi eſeguiſce con ſtorte di ferro fuſo, come ſi pratica nel Ducato di Dueponti ed in altri vicini paeſi per le minere di ſimil fatta.

Ho da più Soggetti inteſo dirſi, che in quei contorni, ed in qualche altro luogo delle montane provincie, che ho già anteriormente nominate, ſienſi trovati indizj di vene mercuriali; ma non ne è però ſtato ancora intrapreſo alcun lavoro, pochiſſimi eſſendo quelli che vogliano impegnarſi in impreſe sì diſpendioſe, e di troppo rara utile riuſcita. Trattandoſi nondimeno di argento vivo, ora molto accreſciuto di prezzo, e così facile da eſtrarſi per diſtillazione da' ſuoi minerali, non ſolo con vaſi, ma anche con gran forni, come ſi fa nelle famoſe grandiſſime minere mercuriali di Almaden della Spagna, e d' Idria nella Carniola; e ſenza biſogno di quei vaſti diſpendioſi edificj, che pel trattamento dell' altre minere metalliche ſono neceſſarj; eſſo ſembrami meritevole di accurate indagini, e di ben inteſi e diretti tentativi dove trovaſi dare di sè chiari ſegni.

Agli ſtudioſi della Fiſica del regno foſſile mi luſingo poſſa eſſer gradevole il rifleſſo che le vene metallifere ſtate finora ſcoperte nelle ſuddette valli, Imperina, delle Monache, Pezzea, ſonoſi trovate o tramezzo, o vicine al congiugnimento delle montagne calcarie, dette anche cretoſe, con quelle di ſchiſti cornei, e quarzoſo-micacei, detti *Eneuss* dai Saſſoni Mineriſti, e d'altre varie ſorti d'analoga vitreſcente, o non calcinabile natura (*a*).

Le

(*a*) Calcarie io nomino le montagne e l' altre parti della terra, che coſtano di pietroſi, o terrei materiali riducibili dal fuoco in calcina cauſtica, chiamate marnoſe dal Celebre Sig. *Guettard* (*Parallele entre le Canadà & la Suiſſe*). Il Celebre Sig. *Fourcroy* (*Leçons elementaires d' Hiſtoire naturelle & de Chymic.*) dà il nome di creta alla pietra calcaria cruda, e d' acido cretoſo a quello nella ſteſſa contenuto, detto da altri aria fiſſa, e acido aereo dal Cavalier *Bergman* (*Opuſc. phyſic. & chemica*), dal quale la calcaria cruda è detta *calx aerata*, e *calx pura* quella ſpogliata, per calcinamento, da tale acido, e reſa cauſtica.

Quanto poi alli pietroſi materiali componenti li monti, che ho nomati ſchiſtoſi, non ſi creda già che ſieno di quel genere di ſchiſti formatiſi per acquee depoſizioni di limo, e d' altre terroſe materie, come ſi conoſce dal paralleliſmo dei loro ſtrati e delle loro sfoglie, e dai reſti, ne' medeſimi non rari, di animali e di vegetabili, per lo più marini. Quelli, de' quali ho qui parlato, molto, a mio parere, ne differiſcono e per origine, e per varj altri riſpetti. Eſſi ſono di quel genere di pietre cornee ſchiſtoſe, che in alcune Memorie, e nel mio Saggio chimico-mineralogico particolarmente, furono da me conſiderate appartenere alle parti viſibili del noſtro Globo di primeva antichità. Il Celebre Sig. Cavaliere *Wallerius*, nelle ſue Oſſervazioni ſopra le pietre cornee (*Syſtem. mineralogic.*) ſtima che ſieno riferibili alle primogenie, dicendo: *In quantum huc uſque notum, nulla in hoc genere petrificata adhuc ſunt obſervata: credibile itaque hos lapides ad primogenios eſſe referendos, quum & non raro compoſitionem ſaxorum ingrediantur*. Io pure mi manifeſtai di ſimile parere fino dall' anno 1759, per quelle oſſervazioni e ragioni da me allora addotte nella ſeconda di dette due Memorie epiſtolari inſerite nella nuova Raccolta d' Opuſcoli Calogeriana, e più diffuſamente ancora nel Saggio qui ſopra accennato.

Le vaſtiſſime congerie di monti, che dalle noſtre piane campagne ergendoſi gradatamente, s' eſtendono ſino alle valli teſtè nominate, ſono, generalmente parlando, e preſcindendo dai prodotti vulcanici, d' indole marnoſa, e calcaria a ſtrati, ne' quali trovanſi non di rado immerſi e petrificati i guſcj di marini teſtacei. Alle medeſime valli veggonſi terminare tali vaſtiſſime e molto alte calcinoſe moli, ma non più ſtratoſe, nelli ſuaccennati monti ſchiſtoſi ecc., che alle medeſime ſuccedono. La linea ſeparatoria, o ſia di confine tra così differenti qualità di lapidoſe materie può oſſervarſi continuata per tratti lunghiſſimi attraverſo il Tirolo, e per altre provincie; com' io indicai nella ſeconda di due Memorie Epiſtolari, dirette al Chiariſſimo Cavalier *Antonio Valliſneri*, Pubblico Profeſſore d' Iſtoria Naturale nell' Univerſità di Padova, nel 1759, da lui fatte inſerire nel Tomo ſeſto della nuova Raccolta d' Opuſcoli ecc., dell' Ab. *Calogerà* qui ſtampata dal Sig. *Simon Occhi*.

Quanto poi alle diverſità d' origine, di materie, e di fenomeni, che coſtituiſcono la reale viſibile differenza tra li prefati due ordini di montuoſe parti della terra, ne ho ivi trattato, ed ancora più diffuſamente nel mio *Saggio fiſico-mineralogico di Lythogonia e Orognoſia*, pubblicato nel Tomo quinto degli Atti della R. *Accademia delle Scienze di Siena*, e poi anche, aumentato ecc., nel Tomo XI. del *Giornale* d' Italia per l' anno 1775, ſtampato dal fu Sig. *Benedetto Milocco*, ed in una Raccolta da lui pubblicata d' alcune delle mie Memorie, e di miei amici, riſtampata poi in Lipſia tradotta in Tedeſco.

Dalle minere metalliche delle ſoprannomate montagnoſe provincie paſſo ora, come ſonomi propoſto anteriormente di voler fare, a dare contezza delle recenti ſcoperte fattevi del Sale catartico amaro a baſe di magneſia, non punto diverſo dai più pregiati ſali di tal fatta, de' quali fa uſo la Medicina. La terra, cui ſi dà il nome di *Leuco-magneſia*, o di *Magneſia bianca*, o ſemplicemente di *Magneſia*, e che totalmente è diverſa da quella impiegata nell' Arte Vetraria, conoſciuta ſotto il nome volgare di Manganeſe, è uno degl' ingredienti conſtitutivi di varie terre e lapidoſi foſſili di quelle montagne; come ne ho argomento, non ſolo da dette ſcoperte, ma anche dagli ſperimenti che ſopra parecchj de' medeſimi ho in più tempi inſtituiti: e quindi ha origine il ſale ſuddetto, dove l' acido vetriuolico abbonda, e con tale ſpecie di terra viene a congiugnerſi.

Il chiariſſimo Sig. *Franceſco Dembſher*, Direttore dei pubblici lavori minerali della valle Imperina d' Agordo, de' quali ho già parlato, mi recò, ſono alcuni anni, certe pietroſe materie da lui colà trovate, che molto eran ſimili alla pietra calaminare. Fattene però ſperienze, nel modo che la calaminare, o ſivvero giallamina s' impiega per convertire il rame in oricalco, che diciamo ottone, o lattone, non vi produſſero mutazione alcuna, nè di colore, nè di peſo, come fanno le vere giallamine, che, aumentandolo molto, gli comunicano colore giallo imitante quello dell' oro. Fatti poi altri tentativi, non ne ebbi verun ſegno che conteneſſero punto del terreo principio dello zinco, ſempre preſente nelle giallamine, e dal quale deriva detta converſione del rame in ottone, mentre nella fuſione ignea, metallizzato dal flogiſto carbonoſo, vi ſi meſce, e lo aumenta, ed in giallo lo tinge. Trattate però quelle materie foſſili con l' acido vetriuolico, col mezzo di appropriata chimica *Encheireſi*, le trovai di magneſia molto abbondanti; poichè ne riſultò copia di quel ſale amariccio compoſto di tali due principj, detto volgarmente ſale d' Epſom, oppure d' Inghilterra; e dall' inſigne Chimico Cavalier *Bergman*, di non mai peribile onoratiſſima memoria, *magneſia vitriolata*.

Eſperimentate in ſimil modo varie pietre, in apparenza non diſſimili dalle calcarie comuni, l' acido vetriuolico vi ha manifeſtata la magneſia colla produzione del ſale predetto, e con eſſo anche molta ſelenite, formata dallo ſteſſo acido combinatoſi, come fa ſempre, con la terra calcinabile di tali pietre, e di qualunque altra ſorte di materiali che della medeſima in sè contengono. L' acido predetto m' ha pur dato a conoſcere la preſenza della magneſia in certa marna d' un bianco ſudiccio, ed in certi foſſili vulcanici dei monti di Fonzaſo, nel territorio di Feltre, ne' quali trovaſene qualche pezzo con zeoliti entro ſparſevi.

Anche dalle montagne di Cadore, e del Capitanato di Zoldo ho avuto da un dilettante di Mineralogia dei pezzi di materie foſſili, che all' aſpetto ſembran eſſere giallamina, ma che non ne hanno le proprietà, e non coſtano che di magneſia, di terra marziale e calcaria, e di argilla e terra ſelcioſa. Nella Carnia trovaſi grande quantità di certa terra calcaria alquanto indurita, ma imbrattante, detta *Crayon* da' Franceſi, da me *Cretone*, e volgarmente *Geſſo* da' ſarti e da' pittori, perchè di tal ſorte di foſſile ſi ſervono per diſegnare; e queſta pure, oltre alla creta, ed a pochiſſima argilla, e ocra marziale, ha in sè non poca magneſia, e quindi forma con l' acido di vetriuolo il ſale ſopraddetto.

In vicinanza alla città di Belluno il fu Dottor *Jacopo Odoardi*, Medico primario della medeſima, degno di perpetua onorevole memoria pe' ſuoi coſtumi, pel ſuo ſapere, e per le Opere ſue pubblicate, ſcoprì varie picciole ſcaturiggini d'acqua carica del ſale prenominato. L' amicizia, che per me egli avea, lo determinò a ſpedirmi alquanto del ſale eſtrattone, affinchè, eſaminatolo, glie ne ſcriveſſi il mio ſentimento. Così feci; e la di lui lettera, e ciò che gliene ſcriſſi fu pubblicato dal Sig. *Alviſe Milocco* nell' ottavo Tomo del *Nuovo Giornale d' Italia*, per l' anno 1784 di cui era egli allora il continuatore.

Di tal ſorte di acque ſalſugginoſe ho poi inteſo trovarſene in altri luoghi delle ſopra enunciate provincie; ed anche varj foſſili, da' quali il vetriuolo di magneſia mai non ceſſa di rifiorire. Le capre ſelvatiche, dette *Camozze*, che colà vivono, tre le alpi più ſcoſceſe ed erme, hanno dapprima fatto conoſcere a que' monticoli alcuni dei ſiti, ne' quali ſiffatto ſale abbonda; perciocchè, eſſendone avidiſſime, ſovente portanſi a leccare di quelli il ſalſugginoſo ſuolo. Ciò è già a baſtanza noto, e ne fa fede il ſopraddetto *Parroco di Cercivento* nelle citate ſue Memorie Iſtoriche della Carnia. Ecco com' egli ne parla alle pag. 28 e 29.

„ La caccia de' cavrioli è la più utile, e la più ordina-
„ ria che ſi faccia nelle noſtre alpi; ma quella delle capre
„ ſelvatiche è altresì la più pericoloſa; perchè a' cacciatori
„ convien perſeguitar queſti animali attraverſo le rupi, e i
„ precipizj. I luoghi, dove d' ordinario ſi trovano queſti
„ animali, ſono certe rocche di pietra viva, ſalata, ed areno-
„ ſa, di cui molto ſi compiacciono leccandola, e fregando-

,, vi la lingua, ſia per aguzzarſi l' appetito, ſia per ajutare
,, la digeſtione, ſia per nettarſi la lingua, sbarazzandola
,, così dal viſcidume. Queſta ſorta di capre marciano quaſi
,, ſempre in truppa, e con ordine: una di eſſe fa la guida,
,, e un' altra la ſentinella, quando le altre paſcolano, e al
,, primo movimento che vede, o al primo romore che ſente,
,, fa un grido, ovvero un fiſchio chiaro ed acuto, che
,, ſerve alle altre per ſalvarſi con la fuga. Quando poi anche
,, la guida paſcola, ſempre qualche altra camozza fa la
,, ſentinella, con la teſta in alto, e con le orecchie teſe ,,.

I primi che appreſero da' detti alpini animali a conoſcere alcune delle ſalſe ſituazioni di quelle montagne è credibiliſſimo che ſtati ſieno i cacciatori; perciocchè i medeſimi anche oggidì ne approfittano, là attendendoli in aguato per ammazzarne, ſenza eſporſi alle fatiche e pericoli d' andarne in traccia per orridi dirupi. Da queſto però non aveaſi che l' idea confuſa di ſalſugginoſità, ſenza conoſcenza ſpecifica del ſale colà eſiſtente, prima che nell' anno 1784 il Sig. *Franceſco Antonio Tavelli*, Ingegnere Trentino, ſollecito indagatore di minerali produzioni, foſſeſi in quelle parti traſferito a farvi ricerche di foſſili di qualche utilità.

Nel giro da lui fatto allora per le montagne della Carnia vide in più luoghi (così m' ha egli riferito) delle anzidette ſaline fioriture, ſimili a quelle del nitro ſopra quelle muraglie che ne producono; dalle quali reſa era bianca, per molto eſteſi tratti, la ſuperficie di parecchj monti di tre delli quattro *Quartieri*, o *Canali*, ſecondo i quali è diviſo quel diſtretto *(a)*; cioè del Canale d' *Incarojo*, e dei canali di *San Pietro*, e di *Gorto*. Ne raccolſe; e del ſale trattone, come pure delle materie, dalle quali, ſtando eſpoſte all' aria,

---

(*a*) Come la Carnia ſi conſideri diviſa in quattro quartieri, o canali, può leggerſi nelle anteriormente citate Notizie Storiche del Sig. Canonico *Graſſi*, Parroco di Cercivento, dove anche l' eſtenſione, i confini, i prodotti e gli animali ſelvatici d' eſſa provincia, ed altre particolarità, oltre all' Iſtoria Civile, vi ſi leggono. Se ne può anche vedere la Topografia nella Carta delle Contee di Gorizia, di Gradiſca, del diſtretto di Trieſte, e del Friuli Veneto dell' Ingegnere Ceſareo Gianantonio Capellaris impreſſa in Gorizia l' anno 1782. Spicca anche dalla Carta Topografica del Friuli dei Pubblici Ingegneri *Maironi*, *e Capellaris* ſtampata in queſta Capitale per P. Santini nell' anno 1778.

ſi ſviluppa in rifioriture ſaline, diedemi, ritornato che fu in queſta Capitale, dei piccoli ſaggi: e dall' eſame dei medeſimi conobbi eſſere il ſale ſuddetto un vero vetriuolo di Magneſia; come il genuino ſale d' *Epſom*, di *Seidlitz*, di *Seidſchutz*, e d' alcuni altri paeſi.

Il prenominato ſoggetto, che con iſperanza di poter trarre qualche profitto dallo ſteſſo ſale, e da alcuni minerali d'argento e rame colà rinvenuti, aveaſene proccurate, ed anche ottenute pubbliche inveſtiture; vi ritornò nello ſcorſo anno 1785, e diede principio in più ſiti alle ſcavazioni di quei foſſili ſalſugginoſi, ed all' erezione degli abituri neceſſari per l' eſtrazione e confezione del ſale ſummentovato. Alleſtito che n' ebbe in qualche quantità, me ne ſpedì con ſua lettera, data da Paluzza il dì 16 di Novembre, e poi anche con altre poſteriori, inſieme con le varie ſorti di terre e di lapidoſe materie dalle quali avevalo eſtratto; chiedendomi quei lumi confaccenti alla di lui impreſa che ſomminiſtrare io gli poteſſi.

Deſideroſo di giovargli in qualche modo, e di corriſpondere quanto mi foſſe poſſibile alla di lui aſpettazione, come in parecchie occaſioni ho fatto lealmente e ſenza proprio intereſſe con tutti quelli che me n' hanno richieſto; mi poſi a far accurati eſami delle coſe da eſſo traſmeſſemi. Quindi ho rilevato che tutte le da me ricevute materie ſomminiſtranti del predetto ſale, benchè tra sè varie per alcuni rapporti, convengono però nei principj da' quali la ſalifica loro proprietà dipende. Sono eſſe un naturale compoſto di argilla, di magneſia, di terra calcaria, del terreo principio del ferro, di flogiſto, e d' acido vetriuolico. Vi è anche miſta una terra dagli acidi minerali indiſſolubile, ſenza apparenza d'eſſere di natura ſilicea: ma ſopra l' indole ſua non ho inſtituite ricerche deciſive, niente intereſſando l' oggetto che mi ſono propoſto.

Le differenze oſſervabili tra le menzionate ſaliſere materie conſiſtono nell' eſſere alcune di ſciolta terroſa mollezza; altre più o meno compatte e dure; altre diſtinte da copioſa meſcolanza di geſſo; ed altre da ſchiſtoſa ſtruttura a sfoglie, con infezione d'ocra ſuperficiale. Variano pure nei loro colori, alcune eſſendo molto nere; altre meno, e per gradi ſvariate fino al piombino, ed al cinericcio aſſai pallido: e così ancora nelle doſi de' preaccennati loro ingredienti, le differenti proporzioni de' quali diverſificano le proprietà riſpettive di tali foſſili.

Quindi deriva che non tutti danno la medeſima quantità del ſale ſopraddetto; il quale, mentre ſtando eſpoſti all'azione atmosferica fatiſcono, vi ſi va lentamente formando a miſura che l' acido vetriuolico, ſvincolandoſi dal principio flogiſtico, può eſercitare la ſpecifica ſua forza ſopra li terrei principj aſſorbenti. Eſſo acido vetriuolico, congiunto al flogiſto ſotto forma ſulfurea ſommamente tenue, eſiſte intimamente commiſto in quelle foſſili materie, ſenza che all' occhio, neppure armato di acuta lente, appariſca, e ſenza che vi ſi ſcorgano piritoſe concrezioni; nè rendeſi manifeſto ſe non ſe per le ſoſtanze ſaline che vi produce, oppure col mezzo del fuoco che ne lo ſcaccia in ſoffocanti eſalazioni d' acido ſulfureo, o per via d'altri appropriati Chimici proceſſi. Quando tali materie ſono eſtratte di freſco dall'interno dei monti, non imprimono ſulla lingua verun ſapore ſalino, nè all' acqua ne comunicano. Ma tocche che ſieno lungamente dalla forza alterante del calor ſolare, dei diaccj, e dell' altre meteore, ſi vanno aprendo e diſgregando; il flogiſto, aſſorto dall'aer puro (*a*), poco a poco ſvaniſce; e quella porzione d' acido che da' di lui vincoli va reſtando libera, poſta in azione dal calore, e dall' attratta umidità, reagiſce ſopra quelli dei terrei principj ſolubili, co' quali ha più d' affinità, o ſia d' attrazione. Combinandoſi con la magneſia coſtituiſce il vetriuolo magneſico; con la terra calcaria forma il geſſo, o ſia ſelenite; e con la terra del ferro un vetriuolo di marte, imperfetto però, non criſtallizzabile, di colore rugginoſo, e che nello ſvaporamento dell' acqua, in cui ſiane di diſciolto, ſi va in parte ſcomponendo con precipitazione della calce marziale.

Nell' eſtrazione con acqua da' prefati foſſili delle ſoſtanze ſaline teſtè ſpecificate, mai non ho potuto ſcorgervi neppure menomiſſimo indizio di allume, quantunque il principio ter-

---

(18) Fourcroy Memoires & Obſervations de Chimie. Dove ſpiega i fenomeni della combuſtione ecc.

reo che ne' medeſimi predomina ſia l' argilloſo. Riflettendo ſopra queſto inſolito ſenomeno, io ſoſpetto che, non ſoprabbondando l' acido vetriuolico, troppo lentamente ſviluppanteſi dall' infiammabile, e dal terroſo miſto in cui giace intimamente ſepolto; e la di lui affinità con le terre, magneſia, calcaria, e marziale, eſſendo maggiore che con quella ſpecifica dell' allume eſſenziale alle argille; quindi avvenga che di queſto ſale non vi ſi formi. Non è già da crederſi che allume non vi appariſca perchè manchi in quei foſſili argilloſi la terra che dello ſteſſo è la baſe (*a*); perciocchè trattati convenientemente con dell' acido vetriuolico diſtillato, indi a forza di fuoco eſtrattone il non combinatoſi, m' hanno dato un vero allume.

Tra li minerali e foſſili, che il Sig. *Tavelli* diemmi da ſperimentare, evvi un pezzo di certa pirite molto compatta e ponderoſa, d' un bianco livido leggiermente gialliccio, in matrice miſta di quarzo e di terra argilloſa cinerea, di cui egli mi diſſe avere veduta groſſa vena. Queſta pirite è marziale e molto ſulſurea; e tenuta da me per molto tempo eſpoſta all' aria, ma non alla pioggia, ſi è tutta coperta di rifiorimenti ſalini minutiſſimamente criſtallizzati, di jalina traſparenza, e di ſapore vetriuolico marziale, ma di acuta non ordinaria acidità. Eſtrattane con acqua pura la rifioritavi ſalſugginoſità: filtrata la ſoluzione, e fatta ſvaporare al fuoco con moderato bollimento, nella luſinga d' ottenerne vetriuolo criſtallizzato, mi s' è preſentato un fenomeno da me non più veduto nel trattamento d' altre molte ſimili piriti. Il diſcioltovi principio terreo del ferro ſi è nello ſvaporamento dell' acqua totalmente precipitato in ocra, e continuando il fuoco vi è anche apparſa poca ſelenite, da cui, e dall' ocra liberato il reſtante licore con iterata filtrazione, e poſtolo a criſtallizzarſi all' aer libero, altro ſale non vi è apparſo che pretto vetriuolo di magneſia in priſmetti tetraedri, con apici cuneiformi, jalini, e di ſapore mediocremen-

---

(*a*) E' ſentimento di molti celebri Chimici che la terra dell' Allume ſia argilla; ma l' inſigne Sig. Cavalier *Wallerius* (*Syſtema mineralogicum Tom.* II. *pag.* 39, 41. *Viennæ* 1778) rende dubbia con forti ragioni queſta opinione.

te amaro. Nel bollimento è ſvanito l' acido ſuperfluo alla ſaturazione della magneſia in vetriuolo magneſico, della terra calcaria in ſelenite, e quello dal quale la ferrea ſoſtanza era tenuta prima nell' acqua perfettamente diſciolta.

Quinci io penſo che ne' prefati ſalini fiorimenti foſſevi combinato con l' acido vetriuolico anche molto di quello, cui ſi è dato il nome d' aria fiſſa, e d' acido cretoſo da *Bucquet*, *Lavoiſier*, e *Fourcroy*; di acido mefitico da *Bewly*; di gas mefitico da *Macquer*, e d' acido aereo dal Cavalier *Bergman* (*a*), poichè, ſecondo lo ſteſſo Bergman, queſta ſpecie d' acido nel bollimento abbandona il ferro tenuto da eſſo nell' acqua diſciolto. *Ferrum* (ha egli ſcritto) *acido aereo unice ſolutum, ebullitione totum quantum ſeparatur* (*b*). Se trovato non vi ſi foſſe che il ſolo vetriuolico, il ſoprabbondante alle accennate ſaturazioni non ſarebbe sì di leggieri con gli aquei vapori eſalato. Eſſo reſtato ſarebbe nella, così detta, acqua madre; cioè con la porzione di ranno incriſtallizzabile, ſolito reſiduo delle confezioni dei vetriuoli, e degli allumi, in cui, com' è noto a' pratici, la vetriuolica acidità ſoverchiamente predomina.

Diſſi già che il Sig. *Tavelli* fecemi recare ſaggi anche del vetriuolo di magneſia ch' egli avea eſtratto dai foſſili ſopra mentovati, ad oggetto che eſaminatane la natura gliene ſcriveſſi il riſultato. La novità, riſpetto a' noſtri paeſi, della ſcoperta di minere di tale ſpecie di ſale; il mio genio ſtato ſempre affezionato allo ſtudio, alle oſſervazioni, ed alle eſperienze delle coſe minerali; ed il deſiderio di poter contribuire all' introduzione in uſo e commercio dei nazionali prodotti foſſili, troppo veramente negletti, m' hanno reſo ſollecito nell' aderire alle iſtanze del nominato ſcopritore.

Le moſtre di detto ſale da lui mandatemi dalla Carnia, e che poi m' ha anche egli ſteſſo recate in maggior copia, furono eſtratte, per di lui aſſerzione, da' foſſili di tre diverſe e tra sè lontane ſituazioni; cioè dai monti detti Paularo nelle

---

(*a*) Leçons elementaires d' Hiſtoire naturelle & de Chimie, par M. de *Fourcroy*. Tom. premier.

(*b*) Opuſc-phiſic. & Chimic. Vol. I. de Fonte Danemarkenſi.

le vicinanze della villa di Siajo, ſopra a Paluzza, nel Quartiero di San Pietro, ed in quelli del canale di Gorto, e del canale d' Incarojo. Il vetriuolo di magneſia indicatomi per nativo dei monti di Siajo, e di Gorto, lo ho trovato dello ſteſſo ſapore amaro, e dopo ripurgato, della medeſima purità, e jalina bianchezza dei veri ſali d' Epſom, di Seydlitz, e d' altri luoghi, uſati in Medicina, che coſtano di magneſia e d' acido vetriuolico. Ma quello d' Incarojo, generatoſi dentro le materie ſchiſtoſe a sfoglie con ocra ferrea ſuperficiale, delle quali ho dianzi fatta menzione, lo ho trovato d'un ſapor miſto di amaro e di vetriuolico marziale; e quindi biſognoſo d'eſſere liberato dalla ſoſtanza ferrea, di cui partecipa: lo che ho già fatto come dirò poi.

Egli è ormai notiſſimo in Chimica, e fuore d' ogni dubbio, che il genuino ſale d' Epſom, e quelli dell' iſteſſa ſpecie d' altri paeſi, a' quali il celeberrimo Cavalier *Bergman* ha dato il nome di *Magneſia vitriolata* (*a*), e pe' quali io credo dicevoli, come ſinonimi, anche quelli di *vetriuolo di magneſia*, e di *vetriuolo magneſico*, tutti ſono il riſultato naturale della combinazione dell'acido vetriuolico con quella particolar terra conoſciuta col nome di *leucomagneſia*, o di *magneſia bianca officinale*, o ſemplicemente di *magneſia*.

Col mezzo d'accurati eſperimenti chimici ho rilevato che dell' iſteſſa ſpecie ſono certamente anche li ſopraddetti ſali della Carnia. Tutti coſtano dei medeſimi identici principj cioè di magneſia combinata intimamente con l'acido vetriuolico in vero ſal medio (*b*). Ciò dimoſtra ad evidenza di fatto la precipitazione della loro magneſia, operata col mezzo di ſali alcali; la formazione del ſale neutro, che nell'atto di tale precipitazione riſulta dall' intimo congiungimento dell'alcali precipitante con l'acido vetriuolico, che dalla magneſia eſſo diſgiugne in vigor di maggiore affinità con lo ſteſſo acido; la ſpecie di tale ſalino riſultato, cioè di tartaro vitriolato, ſe il precipitante ſia l' alcali fiſſo vegetabile, e di ſale mirabile Glauberiano, ſe l'alcali minerale, o ſia mu-

---

(*a*) Bergman. *Opuſc. phyſic. & Chemic. Vol. I. de Magneſia.*

(*b*) Bergman. *Opuſc. phyſic. & Chemic. Vol. I. de analyſi aquarum.*

riatico vi s' impiega, ecc. finalmente la riproduzione dello ſteſſo vetriuolo magneſico con la magneſia ottenutaſi per precipitazione con qualſivoglia dei ſali alcali, ricombinandola per ſinteſi chimica con l' acido ſopraddetto.

Quanto alla magneſia vitriolata impura dei monti del canale d' Incarojo, della quale ho dianzi fatta menzione, la ferrea ſoſtanza, di cui è infetta, vi ſi trova commiſta nello ſtato ſalino, ma sì debilmente all' acido unita, che, diſciolto ſiffatto ſale in copioſa acqua, e laſciando eſpoſta la ſoluzione all' aria, diviene gradatamente d' un torbido rugginoſo, ed in pochi giorni la terra marziale ſotto forma d' ocra in buona parte al fondo ſi precipita: lo che ſuccede tanto più preſto, quanto più caldo è l' ambiente, in cui ſi trova.

Queſto dunque eſſer potrebbe un modo per minorarne d' aſſai il marziale inquinamento, onde detto ſale diveniſſe più adattato al commercio per gli uſi medici. Parmi però che anche miſto, com' è, di ſalina ferrugginoſità riuſcir potrebbe in alcuni morbi molto utile come tonico e diſoſtruente, oltre alla virtù catartica; perciocchè la marziale ſoſtanza vi ſi trova commiſta nello ſtato medeſimo di ſalina forma nel quale eſiſte in molte delle ſalutifere ſorgenti minerali, che ſovente anche della magneſia vitriuolata contengono. Le acque minerali di tal ſorte potrebbero pure con queſto ſale, a giuſte doſi, eſſere artificialmente imitate, con molto comodo e profitto di chi ne abbiſogna; e particolarmente della gente povera, impotente di portarſi alle fonti medicinali, e di ſupplire alla grave ſpeſa occorrente per uſare tali acque che ci vengono da paeſi lontani. Le artefatte acque minerali ſono già lodate molto, e raccomandate da celebratiſſimi Autori, e particolarmente dal Cavalier *Bergman*, il quale inſegna con chiara eſattezza i modi d' imitare tutte le ſpecie di quelle naturali, nel Volume primo de' ſuoi Opuſcoli fiſici e Chimici, dove tratta *de aquis medicatis frigidis, & calidis arte parandis*.

Il predetto ſale dei monti d' Incarojo, per gli analitici eſperimenti che ne ho fatti, non contiene già troppa ſoſtanza marziale; poichè, precipitata in ocra dalla di lui ſoluzione in acqua, liberata da ogni ſalſedine e ben ſecca, non la ho trovata in maggior proporzione di circa una libbra per ogni cento d' eſſo ſale. Per ſepararne tutta la ferrugginoſità io mi ſono ſervito, oltre ad altri precipitanti, anche d' un alcali flogiſticato, in cui, tentato con gli acidi di varie ſpecie, niente di azzurro detto di Berlino, o di Pruſſia, ſi forma, nè vi appariſce ſegno alcuno di effervescenza. Per prepararlo tale ho, cercando, trovato d' ottima riuſcita il farne eſtrazione da' crogiuoli di Molibdena d' *Haffnerſzell* preſſo Paſſavia, nei quali furono da me fatti ſaggi docimaſtici di minera di piombo galenica di Provaglio appreſſo Veſtone di Valſabbia, e d' altre ſimili, ed anche d' altri metalli del Bergamaſco, del Belluneſe, del Tirolo, rotti a pezzi, infuſi in acqua, e formatone ranno; il quale così rieſce perchè io mi ſervo d' un fondente reduttivo, compoſto di tartaro, di nitro, di muria fuſa, di vetro, e di ſangue buino: materie tutte inſieme bruciate prima a nerezza carbonoſa.

L' effetto prodotto da queſto ranno alcalino-flogiſtico nel precipitare con eſſo la calce ferrea dalla ſoluzione in acqua del ſale, di cui favello, ſi fu di non precipitarla in azzurro di Berlino, com' egli fa con qualunque diſſoluzione acida del ferro. Eſſo la fece ſubitamente apparire e precipitare in ocra, cioè ſotto il ſolito colore aranciato, e laſciando inalterata la magneſia nello ſtato del primiero ſuo perfetto ſcioglimento. Meſcolato però con detta ſalina diſſoluzione, oppure con lo ſteſſo ranno alcalino-flogiſtico, alquanto di qualcheduno degli acidi minerali, o dell' aceto diſtillato, allora eſſo ha precipitata momentaneamente in belliſſimo azzurro la terra marziale: e quindi ho rilevato che ſenza la preſenza di qualche acido mai il detto color azzurro non appariſce.

Spogliata interamente dal ferreo elemento la prefata diſſoluzione ſalina, sì nell' uno che nell' altro dei modi teſtè accennati, ne ho anche precipitata la magneſia, tanto con l' alcali fiſſo vegetabile, che col minerale, la quale bene dolcificata con acqua bollente, e poi diſſeccata, è riuſcita in ragione di libbre ventiſei circa per ogni cento di vetriuolo magneſico (*a*).

Le accennate mie oſſervazioni e ſperienze altro non ſarebbero che indagini di fiſica curioſità, ſe ſtate non foſſero dirette allo ſcopo di dedurne dei lumi conferenti agli oggetti contemplati dal prenominato ſcopritore delle ſaliſere minere dianzi mentovate. Informandolo dei modi, e delle riſultanze delle da me inſtituite chimiche operazioni, lo ho avvertito particolarmente di due principali biſogni, e de' mezzi per provvedervi.

Il primo, e di tutta importanza, conſiſte nel dover egli purificare quello del ſuo vetriuolo di magneſia, che ha vetriolico-marziale infezione, ſicchè rieſca della candidezza e ſapore del genuino ſale Epſomeſe, onde nel proccurarne l' eſito non incontri l' oſtacolo del comune pregiudizio, non avvezzo a ſcorgere nel genere degli uſati ſali catartici amari ſiffatta eterogeneità.

Il ſecondo concerne all' eſtrazione della magneſia officinale dal ſale medeſimo, la quale non è da luſingarſi di poterla introdurre nella Farmacia Medica ſe non ſi prepari dell' iſteſſa bianchezza di quella uſata nella noſtra Italia, cavata dalle acque madri del nitro. Quando il vetriuolo magneſico

---

(*a*) Ho detto circa, perchè, quantunque io abbia uſata in operando la più diligente eſattezza, ſo non pertanto che in ſimili proceſſi ſempre qualche piccola porzione ſi perde delle materie che ſi analizzano. Il dottiſſimo Chimico Sig. *Fourcroy* in più d' un luogo delle ſue Memorie, e Oſſervazioni di Chimica, confeſſa candidamente queſta verità: e particolarmente nella Memoria ſopra l' arte di fare delle ricerche Chimiche, a queſto propoſito così ſi eſprime: "Je ſuis toujours étonné de voir dans des travaux particuliers de quelques Chimiſtes une préciſion preſque mathématique ſur les produits de leurs opérations, une certitude dans les expériences, qui ne leur laiſſe nul doute pour leurs inductions. J' avoue qu' il ne m' eſt jamais arrivé de parvenir à cette facilité de travail, & à ces heureux reſultats„. E poco dopo continua dicendo. " Je ne vois pas ſans étonnement que dans une analyſe, même la plus facile, telle que celle d' une ſubſtance minérale, dont nous avons des moyens aſſez ſûrs de ſeparer les différens principes, quelques Chimiſtes retroúvent exactement & juſqu' aux ſractions de grains les matiéres qu' ils en retirent. Quelque préciſion, quelque adreſſe qu' il mettent dans leur travail, il eſt impoſſible que la chaleur, les leſſives, les filtrations, &c. n' occaſionnent pas toujours quelque perte, & j' avoue, je le répete, que j' n' ai jamais été aſſez heureux pour avoir des reſultats auſſi ſatisſaiſans que ceux que pluſieurs Chimiſtes modernes diſent avoir obtenus.

partecipa del marziale, la magneſia che ſe ne deduce rieſce d' una bianchezza degradata dal colore rugginoſo dell' ocra ferrea: e però rendeſi neceſſario d' ovviare a tale difetto con anteriore purificamento.

Non eſſendo le magneſie, tratte dalle acque madri del nitro, e del ſale muriatico, mai affatto pure, ma miſte con altre terre; Medici valentiſſimi d' eſtere nazioni hanno introdotto nella pratica medicale l' uſo di quella precipitata con ſali alcali dal ſale d' Epſom, o dagli altri che coſtano degli ſteſſi principj. Il celebre *Retzius* Profeſſore e Segretario della Reale Società Fiſiografica di Lund nella Scannia mi ſcriſſe, ſono più anni, che in quelle parti d' altra magneſia non ſervonſi che di quella tratta da tal genere di ſali. Ma ecco come ne parla il ſoprallodato Cavaliere *Torberno Bergman*: *Maxima quæ hodie uſurpatur magneſiæ pars in officinis pharmaceuticis e ſale Anglico paratur* (*a*). Dà egli poi un utile avvertimento per la preparazione di eſſa terra nel precipitarla con ſali alcali, dicendo: *Si vero alkali adhibetur probe aeratum, parum dejicitur, præſertim in aqua copioſa, etenim aer fixus acido vitriolico connubio expulſus, derelictam adgreditur magneſiam, eamque ſolvit: aſt ebullitionis calore ſuperfluum volatilis menſtrui fugatur, magneſia ad ſaturationem redigitur, & omnis fere ſubſidet.*

Venendo ora a parlare de' ſuccennati due principali biſogni; ho io indicati al prefato *Tavelli* due modi da render puro dalla vetriuolico-marziale partecipazione quello del ſuo ſale Carnico, che ne abbiſogna. Il primo ſi è quello inſegnato da *Bergman* qui ſopra citato, nel Volume primo de' ſuoi Opuſcoli ſiſici e chimici, dove tratta della confezione dell' allume, alla pagina 334. La terra calcaria cruda, cui il celeberrimo Autore dà il nome di *calce aerata*, ha la proprietà di ſcomporre il vetriuolo marziale e l' allume, ma non già la magneſia vitriuolata. A queſto propoſito egli dice: *Hoc optime pulvere calcareo peragitur, non tamen uſto, quod etiam magneſiam vitriolatam decomponit, ſed aerato. Hic ſenſim ad-*

(*a*) *Opuſc. phyſic. & Chemic. Vol. I. de Acido aereo.*

datur, ne mediante efferveſcentia ultra vaſis latera intumeſcat maſſa. Juſta doſis, adjuvante motu & calore, ſales removendos deſtruit. Alkali phlogiſticato facile innoteſcit ſi quid reſtat martialis.

Queſto è uno dei ſuggerimenti che ho dati al medeſimo *Tavelli*, avviſandolo che può egli nella Carnia comodamente ſervirſi di quella creta che vi abbonda, detta *geſſo* da' Sarti di cui ho già anteriormente fatta menzione. Eſſendo la ſteſſa una terra calcaria che in sè contiene della magneſia, e facile a ridurſi in polvere per la mediocriſſima ſua durezza, potrebbe impiegarla con profitto mentre opera, col bollimento nelle caldaje, la confezione de' ſuoi ſali; o molto meglio facendovi paſſare, e ripaſſare attraverſo per filtrazione le acque d' eſſi ſali impregnate, tante volte, e a freddo, quante trovaſſe d' uopo al poſſibile loro purificamento dalla marziale infezione. Queſto ſecondo modo mi è meglio del primo riuſcito con dell' iſteſſa creta, della quale conſervo ſaggi da molto tempo tra miei minerali e foſſili col nome di Cretone (*Crayon*) della Carnia. Ho anche fatti ſimili eſperimenti con polve di marmo ſtatuario Carrareſe, ch'è pure calcario, ma ſenza lo ſperato ſucceſſo.

Il ſecondo modo, che ho al *Tavelli* comunicato per ridurre liberi totalmente dal ferro i ſali ſuddetti, conſiſte nel torrefarli a fiamma fortiſſima fino che ſieno divenuti candentiſſimi, ſicchè la porzione marziale perda col flogiſto il combinatovi acido vetriuolico, e reſti perfettamente calcinata. Facendone allora ſoluzione in acqua bollente; indi laſciata in ripoſo che divenga fredda, poi filtrata; la calce ferrea rimane tutta ſul filtro in forma di colcotar d' un bel roſſo ſervibile alla Pittura. Riducendo poſcia il vetriuolo magneſico, ſecondo l' Arte, a criſtallizzamento, s' ottiene puriſſimo, in belli criſtalli priſmatici tetraedri, terminati or da piramidi di quattro lati, or da apici cuneiformi, li meglio formati; e tutti di jalina bianchezza. Io ho eſcogitato queſto proceſſo, aſſicurato da numeroſe ſperienze che la magneſia ritiene tenaciſſimamente il combinatovi acido vetriuolico nel fuoco, purchè non ſia deſſa in contatto di materie di flogiſto doviziose. Fatte prove di tale mio penſamento ſopra li ſali Carnici, anche dei più infetti di vetriuolo marziale, ne ho avuto il più deſiderabile ſucceſſo: talmente ch' io non ho punto eſitato a prenderne più volte, come altri hanno fatto, a doſe conveniente; ed ha eſercitata la catartica ſua virtù ſenza apportare moleſtia alcuna.

Quanto poi al modo di eſtrarre dal vetriuolo magneſico avente in sè ferrugginea ſoſtanza una magneſia di perfetta purità e candidezza, ho trovato eſſere il più facile ed eſpedito quello di precipitarne tutta la parte marziale col mezzo dell' alcali flogiſticato. In ſiffatta operazione ſe n'ottiene un bell' azzurro di Berlino; ſe però ſi affonda o nella diſſoluzione aquea d' eſſo ſale, o nel licore alcali-flogiſtico precipitante tanto di qualche acido puro, quanto, operando, veggaſi baſtare a far apparire prontamente di belliſſimo color azzurro tutto il liquido. Se il ranno alcalino non è ſaturatamente flogiſticato, eſſo precipita inſieme con la divenuta azzurra calce marziale anche della magneſia, in proporzione dell' alcali libero che nello ſteſſo ritrovaſi; la quale però con addizione di nuovo acido ſufficiente toſto ſi ridiſcioglie, e dalla viſta ſpariſce. In far queſto io impiego ſolitamente il così detto olio di vetriuolo d' Olanda, di aquea chiarezza, trovandolo più adattato al mio intento che qualunque degli altri acidi.

Separato l' azzurro per filtrazione dal licore, e quando queſto ſiaſi ridotto ben chiaro, ſe ne può allora precipitare la magneſia con l'alcali fiſſo vegetabile, o minerale, diſciolto in acqua, che così ottienſi pura, e della deſiderata bianchezza. Impiegandovi l' alcali non cauſtico, cioè di quello detto aerato dal Cavalier *Bergman*, non tutta eſſa magneſia cade al fondo del liquido, ſe queſto non facciaſi bollire; com' egli medeſimo avverte con le già qui ſopra riportate ſue parole. Siffatta magneſia beniſſimo dolcificata con acqua pura da ogni ſalſedine, e diſſeccata, non laſcia da deſiderare veruna delle ſpecifiche proprietà di tal ſorta di terra medicinale condotta allo ſtato di ſua perfezione.

I metodi, e tutte le avvertenze opportune per eſeguir le ſopraccennate operazioni ſonoſi da me dettagliatamente ſpiegate al ſunnomato *Tavelli*: e perciocchè la preparazione, non ſolo della magneſia, ma anche dell' azzurro Pruſſiano, potrebbe forſe eſſergli di qualche vantaggio; ſe pure ſi avvererà ch' egli poſſa proſeguire con baſtevole profitto nell' intrapreſo lavoro delle ſuddette ſaliſere Carniche minere; così gli ho reſo noto anche il modo da me, non ha guari, trovato di formare dell' alcali flogiſticato con facilità e tenue ſpeſa.

Queſto conſiſte nel meſchiare inſieme a doſe uguale del ſangue bovino ben ſecco con di quel tartaro comune, che qui chiamaſi *greppola*, e può averſi a prezzo vile in que' luoghi che abbondano di vino, quando raſchianſi e nettanſi le botti. Io ho confuſi queſti due ingredienti groſſamente peſti, e poſti dentro vaſi di terra atti a reſiſtere baſtevolmente al fuoco, con coperchio dell' iſteſſa terra, e ſenza lutarne la congiunzione, ond' abbia uſcita il fumo; gli ho collocati in fornello a grata; circondati e coperti d' acceſi carboni. Continuato il fuoco fino a candidezza d' eſſi vaſi, e così intrattenuto fino che più non uſciva da' medeſimi fumo denſo, e fetido, ma certa fiammetta azzurrina come di fosforo; ho laſciato che il fuoco, conſumati li carboni, ſi eſtingueſſe. Indi, freddatiſi detti vaſi, ne ho eſtratta la materia, perfettiſſimamente incarbonita, aſſai nera, e macchiata in molte parti d' un azzurro foſco ſuperficiale, con diminuzione di poco meno d' un quarto del primo ſuo peſo. Per un vaſo, in cui eranſi poſte diciotto marche del prefato meſcuglio, s' è continuato il fuoco forte per ogni ſuo lato quaſi tre ore.

Il ranno eſtratto da ſiffatta materia carbonoſa, sì con acqua fredda, che calda, oppur anche bollente, reſo chiaro per depoſizione, o per filtramento, ſerve ottimamente per la confezione del così detto azzurro di Pruſſia, o di Berlino, precipitando eſſo il ferro ſotto tale modificazione da qualunque delle ſue acide diſſoluzioni; e così pure da quello del ſopraddetto vetriuolo di magneſia che è miſto di ſoſtanza vetriuolico-marziale: mediante però l' aggiunta d' alquanto acido di vetriuolo, o d' altra ſpecie, da me trovata neceſſaria anche negli altri caſi, ne' quali, per deficienza d' acidità ſoprabbondante, l' azzurro non appariſce, o ſi fa vedere lurido, bianchiccio, o d' un atto verde, oppur giallo rugginoſo, o foſco. L' inſigne Chimico Cavalier *Bergman* avverte egli pure dell' importanza che l' acido abbondi anche nel vetriuolo marziale, ſe ottener ſe ne voglia prontamente un ſedimento azzurro bello, e copioſo. *Vitriolum martis* (egli dice)

dice) *exacte ſaturatum ſegnius & parcius præbet genuinum ſedimentum cæruleum, quam acido abundans ; illud enim, quod in priori caſu dejicitur, initio vel nigreſcit, vel albeſcit, in poſteriori autem mox eximie cæruleſcit* (*a*)

Ciò che fin ora ho detto d'alcune delle metallifere minere, e d' altri ſotterranei prodotti delle ſummentovate montagnoſe provincie, avvegnachè poco ſia, e forſe non ſoddisfacente ai dotti ed agli ſtudioſi delle arti metallurgiche, e della mineralogia, potrà per avventura riuſcire nondimeno d'eccitamento e ſtimolo ad alcuni de' medeſimi di trasferirſi a riſcontrar ocularmente, non ſolo le coſe da me enunciate, ma anche per far accurati eſami di quelle montagne, onde oſſervare, e deſcrivere poi le loro riſpettive ſtrutture e poſizioni; i materiali de' quali coſtano; i varj loro fenomeni, e le diverſe loro foſſili produzioni che al giorno appariſcono, sì metalliche, fulferee e ſaline, che di marmi, di criſtalli, d' agate e diaſpri, che vi eſiſtono; e d'ogn'altra materia ch' eſſer poſſa intereſſante per l' Iſtoria naturale, ed utile per le Arti, e per altri uſi e biſogni (*b*).

(*a*) Torber Bergman. *Opuſc. phyſic. & chemica. Vol. I. ubi de Fonte Danemarchenſi.*

(*b*) Il Sig. ***Tavelli***, già più volte anteriormente nominato, mi recò dalle alpi Carniche li ſeguenti ſaggi di minerali e foſſili, oltre a quelli delle terre e pietre ſomminiſtranti il ſale catartico di magneſia da lui colà ſcoperto.

1. Di minera cinerea di rame ed argento in ſpato ponderoſo bianco.

2. D'altra ſimile minera entro ſparſa in ſpato ponderoſo bianco, e tinto in alcune ſue parti d' eruggine verde ed azzurra.

3. D' altra ſimile minera in mattice di ſpato ferreo d'un bianco leggiermente livido, e che nel fuoco diviene nero e retrattorio.

4. Di varie ſorti di piriti ſulfureo-marziali, sferiche, sferoidali, ed amorfe.

5. Di zolfo nativo puro e diafano, in matrice d'alabaſtro geſſoſo di molta candidezza.

6. Di Schoerl verdiccio molto nitido, in priſmi ſottili, lunghi, ed inſieme compattamente uniti e paralleli.

7. Di pietre arenarie miſte d'ocra verde, o ſia eruggine di rame.

8. Di minera di ferro ſquamoſa, molto nitente, e di colore del proprio metallo, in matrice di quarzo bianco.

9. Di marmi variegati di diverſi colori, uno de' quali neriſſimo.

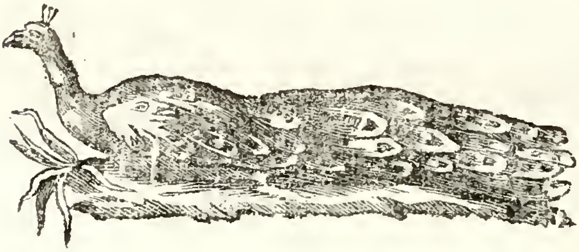
10. Di geſſo criſtallizzato, jalino e diafano (*glacies mariæ*), e di geſſi d' altre ſorti.

11. Di agate jaline, e di diaſpri d' un roſſo cinnabrino fiorato di ſcuro da minera di ferro diaſprina entro ſparſavi; e di diaſpro neriſſimo.

12. Di criſtalli quarzoſi tinti d' ocra marziale.

13. Di terra pittoria neriſſima, e di ſchiſti dello ſteſſo colore.

Se avvenga mai che queſta Memoria abbia qualche influenza all' effettuazione d' un sì lodevole imprendimento, molto da me deſiderato per onor nazionale, e per le utilità che potrebbero ridondarne, perduto non ſarà vanamente il tempo nel formarla impiegato.



---

14. Di belliſſimo talco ſquamoſo, verdiccio, lubrico, e nitido unito a ſpato calcario.

15. Di ſchiſto talcoſo, ſquamoſo, friabile e nitido, di bel color d' oro, atto ad eſſere ridotto in nobile polverino ſcrittorio.

16. Di diaſpro variegato di roſſo cinnabrino, di roſſo ſcuro e di gialliccio, con lineamenti quarzoſi bianchi, e piccioli grani di pirite gialla criſtallizzata entro ſparſavi.

17. Di minera di piombo di grana minutiſſima come d' acciaro (*galena textura calybea*. *Waller*. *Syſtem. mineralog.*).

18. Di minera di piombo ſpatoſa bianca, peſantiſſima, e minutamente criſtallizzata (*minera plumbi alba ſpathoſa*. *Waller*. *ſyſt. mineralogicum*). Li predetti due ſaggi 17. e 18. ſono dei monti Cadorini di Auronzo.

SAGGIO ANALITICO (*)

DI ALCUNE LUCIDE METEORE.

Del P. Carlo Barletti delle Scuole Pie Profeſſore di Fiſica Generale nell' Univerſità di Pavia.

La meteora lucida, o volante fiamma, che ſul far della ſera degli 11. di ſettembre del 1784. corſe alta per l' aria dal Vicentino ne' contorni de' colli Euganei fino alle alpi Cozzie verſo il colle di Tenda, mi porge argomento de' primi tre Capi del preſente Saggio Analitico; proponendomi nel primo di eſporre diſtintamente l' oſſervazione; e di rintracciar nel ſecondo qualche teorica dichiarazione di alcune ſingolarità, e illuſioni occorſe nella ſteſſa oſſervazione; e di confrontare nel terzo le oſſervazioni diverſe, e i metodi per miſurare l' altezza, e la lunghezza del ſuo corſo per l' atmosferica regione. La ſomiglianza de' fenomeni mi porterà nel Capo quarto a parlare delle *Stelle cadenti;* e riſtringerò nel quinto ed ultimo Capo alcune oſſervazioni dirette a far meglio conoſcere la natura di que' lampi eſtivi a ciel ſereno, che volgarmente ſi dicono *Lampi di caldo*.

(*) Queſta memoria è ſtata pubblicata dall' Autore nel T. II. della ſua Fiſica particolare e generale con intelligenza della Società. *L' Ab. Vivorio.*

CAPO I.

Oſſervazione diſtinta della fiamma, o del globo lucido, che corſe lungo tratto per l' atmosfera.

PRætervolantes globi, ut animadvertantur, non ſtudium, ſed caſus facit. Tamen ſi quem phyſici viderint, ſtudium in eo cum praetervolaverit ponunt, eumque cum nullus jam eſt, contemplantur: così l' illuſtre Segretario dell' Accademia Bologneſe comincia il ſuo diſcorſo di ſomiglianti meteore (*In Comment. Bonon. Tom. 2. pag.* 464).

ARTICOLO I.

Tempo, e luogo della oſſervazione col previo, e ſeguente ſtato dell' atmosfera.

Agli 11. di ſettembre del 1784. circa 25. minuti dopo il tramontar del ſole, mentre già comparivano chiare le prime ſtelle in Tortona a trecento paſſi circa fuori della nuova Porta, io ritornava in città in compagnia di D. *Garmagnano* Profeſſore di Rettorica, e di mio Fratello Agoſtiniano; e ſiccome ſono eſſi perſpicaci di mente, e di occhio non alieno dalle oſſervazioni, mi giovarono aſſai per accertare di queſta molte circoſtanze. Ci comparve adunque nella direzione più propria per eſſere oſſervato a ſiniſtra alto per l' aria un globo di fuoco, che procedeva da greco, e traversò innanzi a noi paſſando pel noſtro meridiano, e proſeguì fino a perdita di viſta verſo ponente.

L' aria era ſerena, e tranquilla, ſe non che ſi ſtendeva un leggero velo di nubi roſſeggianti aſſai baſſe a ponente, le quali furono opportune per limitarmi più certo e l' orizzonte, e il corſo di quel fuoco, che più alto, e apparentemente al di qua di quelle nubi ſcomparve. Già da cinque giorni continuava il tempo bello e ſereno dopo molta pioggia, e tempo vario precedente. Il caldo relativamente alla ſtagione, e al freddo precedente rientrava ſtraordinario, e ſi mantenne in ſeguito lungamente il termometro di *Reaumur* tra i 18. e 16. gradi ſopra lo *zero*.

Non vi fu nè prima, nè inſieme, nè dopo verun moto d' aria con particolar direzione relativa a quella del globo luminoſo. Non ſentii, che le ſolite aurette in direzioni, e ſituazioni ordinarie dopo il tramontar del ſole.

ARTICOLO II.

Direzione, e inclinazione del ſentiero, altezza maſſima, apparente velocità, e durazione di queſto fenomeno.

Oltre la direzione ſicura da greco a ponente oſſervai pure la progreſſione di quel fuoco uniforme in linea retta, come ne faceva prova una lunga ſtriſcia rovente, che laſciava in retta linea dopo di sè, della quale dirò in ſeguito.

La pendenza del ſuo corſo dall' alto al baſſo non fu molto notabile, nè mi comparve, che faceſſe col piano dell' orizzonte da greco a ponente un angolo maggiore di quindici gradi.

Per ciò, che riguarda l' angolo della ſua altezza dall' orizzonte nel più alto punto, in cui paſsò pel mio meridiano, non lo giudicai, nè lo conobbi maggiore di quaranta gradi verſo auſtro.

L' apparente ſua velocità non fu punto rapida come quella del folgore, che anzi comparve all' occhio minore di quella d' un razzo ordinario; e durò in viſta per quella parte della ſua via, che fu viſibile da Tortona, in circa un mezzo minuto primo.

ARTICOLO III.

Grandezza, e qualità, ed altri accidenti della ſua luce.

La ſua luce era candida, e ſplendidiſſima, come quella della canfora, priva però di ſcintillazione, e di ardore; talchè la fiſſai di continuo ſenza eſſerne punto affaticato, non che abbagliato nella viſta. Nulla comparve in tutto il ſuo corſo, che poteſſe darmi idea di ſumo; nulla parimente, che ſomiglaiſſe a ſcoppio nè intorno, nè entro il corpo di quel globo. Il centro dello ſplendore era nella teſta, oſſia nella parte anteriore del ſuo corpo. La ſua figura compariva anteriormente rotonda, del diametro in circa d' un piede, e ſi allungava in forma di fiamma non in alto verticale, come ſogliono le altre fiamme, ma indietro ſecondo la traccia, ſulla quale ſcorreva. Tale lunghezza era varia, e come ondeggiante; e queſta ſpecie di ondeggiamento ſembrava procedere dalla progreſſione ſteſſa del ſuo moto, piuttoſto che da interna projezione; come appunto ſi vede correre una piccola fiammella lungo un filo intinto d' acqua ragia, che laſcia dopo di sè quel filo abbruciato.

Laſciava inoltre in ſimil guiſa indietro a sè una ſtriſcia ben lunga non più luminoſa, ma ſolo infuocata, come un ferro rovente, e con varietà di colori foſchi.

Nel momento, che mi paſsò in faccia, ſi diviſe tutta la ſua maſſa lucida in due, cioè reſtò il corpo lucido innanzi ſtaccato con intervallo apparente di uno de' ſuoi diametri da un altro piccolo reſiduo lucido, da cui procedeva indietro la ſtriſcia, o coda infuocata; e ſubito con una ſpecie di agitazione ſi riunirono quelle due parti nuovamente inſieme in grandezza minore di prima, e con luce più ſplendida. Nell' intervallo di quella diviſione comparvero degradazioni di colori fino al purpureo, e violetto.

ARTICOLO IV.

Niuno ſtrepito nel ſuo paſſaggio, e circoſtanze del ſuo termine.

Nell' ondeggiamento, e agitazione procedente da tale ſeparazione ci volle tutta la forza della rifleſſione per non laſciarmi ſedurre dalla conſueta aſſociazione di fremito e ſtridore, che pur mi ſi affacciò alla mente, ma non nacque altrimenti dalla ſenſazione dell' udito.

Parve che a quando a quando, e maſſimamente verſo il fine, tramandaſſe inferiormente intorno a sè alcune faville in forma di lumicini cadenti, che preſto ſparivano.

Tutto però andava ſucceſſivamente ſcemando finchè finì alto ſull' orizzonte in aria aperta, non laſciando per ultimo che la ſtriſcia, e una ſpecie di vapor luminoſo, in cui ſvanì ſenz' altro veſtigio.

Niuno di noi udì veruno ſtrepito, nè ſtridore, nè ſcoppio procedente da quel fuoco. Altri diſſero di averne ſentito; ma oltre che non ſono eſenti dal ſenſo d' illuſione, e non ſi accordano punto fra di loro nel tempo, è probabile che alcuno faceſſe un cambio, poichè intorno a tal tempo ſcoppiarono le mine per lo ſcavamento dei foſſi del Caſtello.

ARTICOLO V.

Singolarità, e illuſioni di vicinanza, di moltiplicità, e di caduta di quel lucido globo.

Nelle molte relazioni, che in ſeguito mi procurai di queſta meteora, riſcontrai la ſingolarità, che fu eſſa da tutti creduta viciniſſima, e più d' uno diſſe, che avrebbe potuto toccarla con mano; e s' immaginò ciaſcuno di averla veduta cadere in terra poco lungi da sè. Indi nacque l' altra immaginazione, di cui più d' uno fu perſuaſo, che molte foſſero, e non una ſola, queſte meteore correnti per l' aria.

Sembrerà ancor più ſingolare, ſe aggiungerò, che quanti furono in luogo baſſo, e in orizzonte riſtretto, la credettero più vicina, che non quelli, che furon in alto, e in aperto orizzonte. Ma queſta medeſima ſingolarità indica la cauſa dell' abbaglio, per cui fu comunemente confuſa la viſuale colla ſoſtanza ſteſſa della meteora. Come ſomiglianti abbagli pur troppo frequenti s' incontrano in altre ſtorie di ſimili meteore, e ſegnatamente delle *ſtelle cadenti*, così ſtimo pregio dell' opera di trattarne alquanto diffuſamente ne' capi ſeguenti.

CAPO II.

Teoria delle ſingolarità, e illuſioni comunemente occorſe nella oſſervazione di queſta lucida meteora.

TRa molte relazioni, che gli eruditi miei corriſpondenti mi favorirono di queſto ſenomeno, niuno toccò meglio il punto delle ſue ſingolarità, che un illuſtre Cittadino Genoveſe dilettante di Fiſica (il Sig. *Gio. Stefano Peſſagno*) nella ſeguente lettera del 21. ottobre 1784. data da Genova.

ARTICOLO I.

Eſpoſizione diſtinta delle ſteſſe ſingolarità.

Dalla noſtra villeggiatura di Rapallo alle ore 23 $\frac{1}{2}$ Italiane vidimo un groſſo globo acceſoſi in aria dalla parte di Greco diretto a ponente con luce sì viva, che ſembrava la Luna piena di mezza notte, indi cadere a' piedi della montagna detta *Ruta*, che circonda a ponente la valle, e gli orti di quel luogo. Io giudicai toſto, che foſſero vapori acceſi nell' aria, come i fuochi fatui, e ſimili. Ma molto mi ſorpreſe il ſentire alla ſera, che tutti lo avevano veduto paſſare direttamente ſopra di loro, e cadere quaſi a' loro piedi, in maniera che avrebbero potuto raccoglierlo nel loro cappello. Lo ſteſſo diſſero alcuni venuti da Chiavari diſtante cinque miglia, altri da Zoaglj diſtante tre miglia, in ſomma tutto il golfo diceva lo ſteſſo. Di più ſi è veduto in Genova diſtante 18. miglia da tutti in diverſe piazze, e caſe paſſare ſopra di loro cadendo ſulla città. Lo ſteſſo è ſeguito in Campomorone diſtante da Genova 10. miglia colle ſteſſe particolarità... In ſomma tutto il fenomeno ſi riduce a queſto, che molte perſone diſtanti fra loro di uno ſpazio non indifferente hanno veduto nella ſteſſa ora un ſolo globo naſcere dalla ſteſſa parte, ſeguire la ſteſſa direzione, e cadere lo ſteſſo in tante diverſe parti, e luoghi particolari, quante furono le perſone, che lo hanno veduto.

Se io ſteſſo non foſſi ſtato ſpettatore di queſto ſenomeno, non

non crederei certamente, che molti poteſſero vedere uno ſteſſo globo cadere in diverſi luoghi così diſtanti fra loro. Dico *uno ſteſſo*, poichè ſe foſſero ſtati più d' uno, certamente io, che era in una elevazione molto alta, ne avrei veduto più d' uno, ſiccome tutti gli altri.

Infine io non ſaprei come combinare queſta coſa. Poichè ſe ſi dice, che ſiano vapori acceſi nell' aria, e che nel loro corſo ne abbiano acceſi degli altri, come ſuccede nelle ſtelle cadenti, e così ſi voglia provare la diverſità de' luoghi, dove ſono caduti; ecco che queſto contraſta colla particolarità di non eſſerſene veduto che uno ſolo da tutti. Se ſi dice poi, che uno ſolo abbia fatto queſto corſo facendoſi da tutti vedere forſe per la ſua elevazione, come mai ſi ſpiegherà la particolarità di cadere in tanti diverſi luoghi diviſi dalle montagne non apparentemente, ma realmente? Queſto è quello, che mi ſembra il più ſorprendente.

ARTICOLO II.

Dimoſtrazione diretta della illuſione di tali ſingolarità.

Sì bella, e giudizioſa eſpoſizione mi moſſe a penſar di propoſito alla ſoluzione d' un problema quanto nuovo, altrettanto importante nella meteorologica ſtoria; e come ciò feci in riſpoſta alla precedente, così ritengo in tutto il ſeguito di queſto capo l' epiſtolare ſtile riſponſivo. Ciò che ella riſcontrò da Chiavari fino a Campomorone per lo ſpazio di circa 40. miglia di là dall' Appennino ſulle riviere di Genova, io lo riſcontrai ſimilmente ripetuto ove più, ove meno da Lucca, e Verona fino a Pavia, e di qua fino a Torino, e Mondovì, e più oltre nelle alpi Cozzie; cioè per più di dugento miglia al di qua, e lungo le coſte dello ſteſſo Appennino.

Primieramente la ſua oſſervazione fatta in luogo alto, come ella era nella ſua villeggiatura di Rapallo, è una prova dimoſtrativa della unità di quel globo lucido, che fu viſto da tante perſone, e in tante parti diverſe. Ne ho io pure un' altra di confronto fatta da gente abile dal Caſtello di Tortona, e dai più alti monti del Tortoneſe, mentre io l' oſſervai dal piano ſottopoſto. Tanto a me, che era ſull' aperta pianura, quanto agli altri, che erano ſull' alto, ſembrò quel fuoco del pari vicino; e ſi giudicò quindi vicino del pari il luogo della ſuppoſta ſua caduta in coerenza del previo giudizio della ſua vicinanza.

Io però nol vidi cadere altrimenti; e trovo ſcritto nel mio giornale la ſera ſteſſa queſte eſpreſſioni, che ſono qui ſopra inſerite nel capo primo, articolo quarto: *tutto però andava ſucceſſivamente ſcemando, finchè finì alto ſull' orizzonte in aria aperta* ecc., le quali eſpreſſioni indicano piuttoſto la ſcomparſa di quel fuoco per ſucceſſiva diſtanza e tenuità di luce, che non la caduta. Inoltre a me non paſsò punto sopra la teſta, ma bensì pel mio meridiano aſſai baſſo verſo auſtro. Fra tutti gli oſſervatori, coi quali mi avvenni a parlare di queſto fenomeno, neppur uno vi fu, che rivenuto dal primo ſenſo di ſorpreſa, e ridotto a rettificare i ſuoi giudizj colle eſterne circoſtanze della ſua poſitura, non abbia in fine riconoſciuto, che il crederſi quel globo ſopra la teſta non fu ſe non l' effetto della improvviſa comparſa di luce sì grande, e viva; come il giudizio della vicina ſua caduta non fu ſe non conſeguenza della pronta, e inaſpettata ſua eſtinzione, o ſcomparſa poco diverſa da quella d'un razzo, che ſappiamo cadere poco lungi. L' uomo d' ordinario non eſamina, ma ripoſa di buon grado ſui giudizj ſuoi più facili, e familiari, quantunque ſtorte ſieno le vie, d'onde eſſi provengono. Lo ſpirito di rifleſſione e di eſame è una malattia, che non fu mai epidemica nella ſpecie umana.

La copia delle perſone, che ſi trovarono in aperta campagna nel tempo di queſto fenomeno, ci ſomminiſtrò mezzi di confrontarne in più luoghi le principali circoſtanze: la più prezioſa fra queſte fu la precedente apparizione delle prime ſtelle, che ſerve d' incontro ſolenne, e ſicuro per tutta la ſucceſſione dei luoghi fra loro dal primo fino all' ultimo termine del ſuo trapaſſo pei ſucceſſivi meridiani. Riſtringendone gli eſtremi fra i colli Euganei e le alpi Cozzie, e ſcegliendo per indizio di queſti eſtremi Verona, e Mondovì abbiamo la diſtanza non minore di tre gradi in longitudine; la quale per la differenza di quattro minuti per grado nel tramontar del ſole, e nella corriſpondente apparizione delle prime ſtelle eſige dodici minuti di ritardo da Verona a Mondovì. Dai riſcontri, che ho cercato più eſatti, non trovo fra que' luoghi relativa diverſità fra il previo apparir delle ſtelle e il tempo del fenomeno, che anzi parrebbe a Mondovì comparſo il crepuſcolo più inoltrato. Comunque però ſi vogliano dilatare que' termini, e prenderſi anche a tutto ſvantaggio, ſe riflettiamo ai dodici minuti di aſſoluto ritardo, che in eſſi naſce dall' occidentale longitudine di tre gradi maggiore in Mondovì, non potremo far a meno di non riconoſcere, che quel lucido globo ha ſpeſi certamente parecchj minuti primi di tempo a farſi ſucceſſivamente vedere ſempre lo ſteſſo, e toglierſi infine per ſoverchia diſtanza fuori di viſta in tanti luoghi diverſi per tutta la ſua via da greco a ponente.

In ciaſcun luogo diſtinto comunque alto, e di aperto orizzonte, a niuno comparve quel ſenomeno per la durata di quaranta ſecondi, e non fu queſta d' ordinario, che di quindici in trenta ſecondi, nel qual tempo ſi accoſtò ſucceſſivamente, e paſsò oltre al meridiano dello ſteſſo luogo. Niuno adunque potè vederlo per l' intero ſuo corſo; ma ciaſcuno ſoltanto ne vide quel tratto, che fu a certe diſtanze corriſpondente al meridiano del luogo. Nè ciò nacque punto per difetto di altezza di quel lucido globo, del che più opportunamente diremo nel capo terzo, ma per tenuità della ſua luce, come nel ſeguente articolo VI. andremo dichiarando.

Ora l' unità del globo qui da bel principio dimoſtrata, e queſta ſucceſſione di tempo, che ella ben vede neceſſaria conſeguenza delle immediate, ed aſſolute oſſervazioni, che riguardano la mera eſiſtenza del fatto, formano una prova incontraſtabile, che l' altra parte della oſſervazione, per cui tutti credettero di averlo veduto cadere vicino a sè, non può eſſer vera; e che perciò anzi che immediata, ed aſſoluta oſſervazione, è neceſſariamente una illuſione, ed un fallace giudizio.

Da ciò s' impari quanto poco poſſiam fidarci della teſtimonianza degli uomini comunque probi, e veridici, e perfino de' noſtri proprj ſenſi, quando ſi tratta non dell' aſſoluta eſiſtenza, ma del modo di qualſivoglia fatto ſtraordinario, ed improvviſo, come lo è queſto, di cui trattiamo.

ARTICOLO III.

Introduzione alla teoria di queſte illuſioni.

Ma per quanto ſia convincente la prova, che ci sforza a riconoſcere illuſoria la ſuppoſta, benchè da tutti confermata, caduta di quel globo; ella ſarebbe pur vaglioſa di ſentirne qualche dichiarazione, che rendeſſe tanto piana, e intelligibile, quanto è certa, e neceſſaria la ragione di sì univerſale abbaglio.

E' più ardua impreſa di ſradicare un errore, maſſimamente quando ſia già entrato in perſuaſione degli uomini, che di piantare cento verità. Poichè baſta di queſte porgerne una facile e chiara teoria, acciò ſieno da tutti inteſe: per oppoſto quando ſi ha da combattere una perſuaſione per quanto ſia falſa, anche le più evidenti teorie ſi oſcurano dalla contraria prevenzione, e dall' amor proprio, che ſono d' ordinario nojoſi, e ſofiſtici ragionatori. La teoria delle ſenſazioni è in ſe ſteſſa piana, e ſempliciſſima, quando ſi propone ſchietta, e fedelmente. Ma da *Platone* fino a *Mallebranche* hanno ſtudiato i Metafiſici di renderla ſublime, e l'hanno reſa inintelligibile, ed aſſurda: e per quanto dopo *Loke* ſiaſi queſta perfezionata, rimane tuttavia aſſai comunemente in contraſto con cento avanzi, e mille traſformazioni d' innate idee.

Non le ſaprei abbaſtanza eſprimere quanto grande ſia l'influenza delle metafiſiche prevenzioni ſulla comprenſione degli uomini, e nelle Fiſiche, e Morali opinioni, che per ſiffatto modo di comprendere entrano nella comune perſuaſione: e non mi azzarderei di limitare fino a qual ſegno poteſſe ſpingere queſta perſuaſione chi inſieme ai volgari pregiudizj, e agli abiti, nei quali in buona fede ripoſiamo nell' uſo delle ſenſazioni, ſapeſſe accortamente combinare inſolite, e improvviſe impreſſioni di fatti ben concertati. Ne abbiamo eſempj da *Apollonio Tianeo* fino a *Meſmer* a' dì noſtri e in Parigi popolare Taumaturgo del chimerico *Magnetiſmo animale*. Gioverà pertanto ridurre le nuove, e lucide teorie delle ſenſazioni al caſo preſente per dare un ſaggio della loro influenza nelle Fiſiche oſſervazioni e per far ſovvenire a' Fiſici qual caſo debba farſi delle maravglioſe circoſtanze di ſomiglianti fenomeni deſcritti d' ordinario da pregiudicati oſſervatori.

Le idee delle diſtanze, e delle grandezze, che per la via degli occhi acquiſtiamo, benchè in virtù degli abiti precedenti ci ſi preſentino all' animo con tanta facilità, e prontezza, come ſe foſſero immediate impreſſioni della viſta, e mere ſenſazioni, ciò non oſtante ſono giudizj, e deduzioni talvolta ben complicate da altre previe ſenſazioni, e da principj coſtanti, che ci ſiamo reſi familiariſſimi coll' uſo degli occhi, e col confronto loro con altri ſenſi, e ſegnatamente col tatto, che è il vero maeſtro, e duce degli altri ſenſi; quantunque eſſi toſto che ſono eruditi, e franchi ſogliano traſcurarlo, ed erigerſi per ſe ſteſſi in autori, e padroni di quelle operazioni, che da lui primieramente appreſero.

Quindi è, che *le impreſſioni inſolite, ed improvviſe ſi giudicano, e indi fermamente ſi credono ſimili alle familiari, e conſuete, benchè ſieno talvolta affatto oppoſte.*

ARTICOLO IV.

Si dichiara l' illuſione della viſta coll' eſempio dell' udito.

Ne abbiamo l' eſempio nel preſente fenomeno. Siccome all' idea di fuoco vibrato, e di globo che ſembra lanciarſi, e ſcoppiar per l' aria ſi uniſce d' ordinario il ſibilo, lo ſtridore, e lo ſcoppio; così non manca la maggior parte degli ſpettatori di atteſtare, che ne hanno udito il ſibilo, ed il fiſchio, e infine un orrendo ſcoppio, con cui ſvanì; altri dicono di averne ſentito lo ſcoppio previamente, quaſichè con eſſo ſi foſſe lanciato in aria. Io però non ho ſentito nulla di tutto ciò. E quando pur taluno aveſſe potuto ſentirne il ſibilo, atteſa la grande diſtanza, non lo avrebbe ſentito altrimenti nè previo, nè contemporaneo, ma tanto tempo dopo la ſcomparſa del fuoco, quanto lo eſige l' immenſa differenza di celerità fra la propagazione della luce e quella del ſuono, della quale diremo in fine del capo terzo.

ARTICOLO V.

Si dichiara l' illuſione con altri familiari eſempj della ſteſſa viſta.

A queſta illuſione di ſibilo, e di ſtrepito nata per intruſa aſſociazione degli orecchi è affatto ſomigliante l' altra degli occhi ſteſſi per la ſuppoſta caduta. I corpi lucidi, e quei, che tali ſtimiamo, ci ſembrano tutti egualmente vicini, o lontani; come in un comune concavo emisfero o nella ſteſſa volta celeſte impiantate ci ſembrano tutte le ſtelle, e anche i pianeti nel ciel ſereno di notte. Chi dal fondo d' un pozzo vedeſſe per la prima volta a trapaſſarſi ſopra il ſole, o la luna, crederebbe que' corpi nati, e ſpenti intorno alla bocca di quel medeſimo pozzo. Al preſente per diverſe rifleſſioni, e per varie ragioni, molte delle quali ſono falſe, e tutte adattate al modo di penſare proprio di ciaſcuno, ſiamo prevenuti, che il ſole, e la luna ſono lontaniſſimi da noi, e perciò ci crediamo di vederli ben lontani.

ARTICOLO VI.

Si dimoſtrano i principj dell' illuſione nel preſente fenomeno per chi ne oſſervò lungo tratto del ſuo corſo.

Se quell' ardente globo l' aveſſimo creduto celeſte, ci ſarebbe comparſo lontaniſſimo, come in vero per la ſteſſa cauſa nell' atto della loro partenza ce lo pajono le *ſtelle cadenti*; ma a motivo del ſuo ſplendore ſembrava troppo grande per farſi giudicare celeſte. Onde ſe lo abbiamo raſſomigliato alla piena luna nella grandezza, lo abbiamo però giudicato ſimile ad un grande razzo, o fuoco d' artifizio nello ſplendore, nel moto, e nella vicinanza. Quindi in coerenza di queſt' ultimo giudizio ciaſcuno ſi è creduto di vederſelo ſpegnere, e cader vicino chi più, chi meno ſecondo le particolari premeſſe, e circoſtanze, alle quali ſenz' avvederſene per mero abito, e di buona fede l' ha riferito.

L' apparente inclinazione di quel fuoco dall' alto al baſſo non ſu dunque ſe non un effetto del ſucceſſivo ſuo ingrandimento alla viſta noſtra in ragione che più ſi accoſtava verſo di noi paſſando pel noſtro meridiano: talchè quanto creſceva in relativa grandezza, tanto ſi giudicava più vicino, e perciò più baſſo, e diretto ſopra di noi. Scoſtandoſi poi dal noſtro meridiano, e proſeguendo oltre andò ſucceſſivamente ſcemando di ſplendore, e di relativa grandezza a ſolo motivo della ſucceſſiva diſtanza maggiore. Ma ritenendo noi la previa idea della ſua direzione dall' alto al baſſo verſo di noi, e ſupponendolo in conſeguenza tuttora più a noi vicino; non potemmo riferire la ſua diminuzione, che a rapida mancanza di luce, e infine ad una immaginaria caduta, ed eſtinzione, piuttoſto che alla ſua diſtanza, della quale in quel punto non avemmo veruna idea, ed anzi ne ritenevamo la contraria prevenzione.

Si debbe pertanto concepire quell' ardente meteora diretta in un piano, ovvero, ſe più piace, in un arco poco, o nulla inclinato all' orizzonte, ma altiſſimo, come compariſcono i corpi celeſti, e come s' intende da chi ha qualche tintura delle sferiche dottrine aſtronomiche. Scoſtarſi dalla verticale, o dal piano del meridiano, come ſi accoſta all' orizzonte, ſembra lo ſteſſo che abbaſſarſi, comunque proceda nella ſteſſa retta parallela all' orizzonte; e ſcemare di ſplendore, e di relativa grandezza per ſucceſſiva diſtanza maggiore non avvertita è lo ſteſſo che andarſi eſtinguendo.

E per porgere più giuſta idea del ſucceſſivo aumento, e decremento dello ſplendore, e della corriſpondente grandezza di queſta lucida meteora, avvertirò che all' occhio ſteſſo, che può fiſſarla quantunque più vicina francamente, ſi manifeſta l' intenſità della ſua luce d' un genere medio fra la *ſcintillante*, *e fosforica*. Che in vero tal fuoco aveſſe tutte le ſembianze di *fatuo*, cioè di ſemplice ſplendore privo di ſcintillazione, e d' ardore, ce ne rendono vie più probabile incontro e il paragone, che comunemente ſe ne fece collo ſplendore della luna, e la ſomiglianza ſua alle ſtelle cadenti, e la ſicurezza, con cui più d' uno ſe lo immaginò tanto dappreſſo fino a penſar di toccarlo con mano, e infine il non aver altrimenti fatto ſovvenire il timore di abbruciamento, o di calore neppure nella mente delle ſemmine più timoroſe.

Come la fosforica luce diviene inſenſibile a corta diſtanza; così queſta, di cui parlo, ſcema notabilmente, e anche ſvaniſce a tale diſtanza, in cui la ſcintillante appena comincerebbe ad abbagliare alquanto meno. Io ſoglio porre fra i corpi lucidi ſcintillanti, oſſia vibranti, e queſti che appartengono alla claſſe dei fatui, differenza conſimile a quella, che paſſa tra il ſuono di uno ſtromento libero, e dello ſteſſo fornito di ſordina.

Nè ſi creda queſta diſtinzione d'intenſità di luce ſcintillante immaginata all' opportunità del caſo preſente, che anzi poſſo confermarla direttamente colle nobiliſſime ſperienze degli *Accademici Parigini* in fine della Memoria *ſulla propagazione del ſuono* (an. 1738). La grandezza, e vivacità della luce della polvere da cannone acceſa al chiuſo, o all'aperto non diminuiſce, come altre fiamme ſogliono meno vibranti, in ragione delle diſtanze. Poichè oſſervarono eſſi. 1. che ſi vede egualmente viva la ſteſſa luce anche a diſtanza quadrupla. 2. ſi vede a diſtanze eguali egualmente vivo e grande il lampo d' una libbra, che di due libbre di polvere acceſa. 3. il tempo piovoſo, che impediſce di giorno la viſta di oggetti lontani illuminati, non impediſce la viſta della luce di quella polvere acceſa; anzi talvolta compariſce eſſa più vivace attraverſo la pioggia, che non in pari diſtanza per l'aria ſerena. Si aggiunga a tutto ciò, che la luce di molti, e grandi lumi d'olio, che ſi uſa nei Fanali alla bocca dei porti di mare, che pur è luce aſſai viva, non ſi vede con aria nuvoloſa, e piovoſa, che a piccola diſtanza, e deboliſſima.

Infine che quel lucido globo ſiaſi tolto di viſta per difetto d' intenſità di luce, e pel rapido ſuo traſporto a grande diſtanza, e non per ragioni geografiche, e ottiche della viſuale, che dallo ſpettatore non arrivaſſe ſotto la ſua altezza verticale, io lo inferiſco da queſta rifleſſione; che tutti a ſeconda della ſua direzione lo hanno viſto alto dai limiti dell' orizzonte, benchè nel progreſſo del ſuo corſo lo abbiano poi giudicato caduto vicino. Ora quei, che ſi foſſero trovati verſo i confini della viſuale per tangente dal loro ſito al ſito dell' altezza del globo, lo avrebbero per neceſſità veduto lontaniſſimo, e baſſo aſſai, e infine a radere per lungo il limite dell' orizzonte; il che in tanti riſcontri non ſento eſſere

ſere accaduto a niuno in niuno de' termini di ſua apparizione. Pertanto la ſola celerità del ſuo moto, e la rarità della ſua luce lo reſero per ſoverchia diſtanza inviſibile non altrimenti, che lo avrebbe fatto l' improvviſa ſua caduta, o eſtinzione.

ARTICOLO VII.

Si dimoſtrano ſimili principj d' illuſione per chi non oſſervò il fenomeno, ſe non incidentemente in qualſivoglia tratto del ſuo corſo.

Quindi è che trattando dell' altezza, del moto, e dello ſplendore di ſiffatte meteore, quando anche riſultaſſero pel calcolo oltre i confini della noſtra ſenſibile atmosfera, vogliono con limitazione, e diſcrezione riferirſi a termini aſtronomici, e a ſomiglianti nomi di corpi celeſti (*a*). In fatti parlando di queſti fuochi con aſtronomica fraſe preſentano il paradoſſo di *tramontare di qua dai monti*, oſſia di ſcomparire ſenza oltrepaſſare i limiti dell' orizzonte ſenſibile, i quali limiti ſono nel contorno de' monti; come appunto ſi perde di viſta un uccello, che proſiegue il ſuo volo, ſenza che perciò debba dirſi tramontato. E ſembrerebbe un uccello al

---

(*a*) Per dare qualche idea delle ſtraordinarie conſeguenze, alle quali traſportano le facili applicazioni de' nomi, e de' termini aſtronomici in queſti meteorologici fenomeni, riferirò qui un paragrafo di lettera dell' Aſtronomo di *Greenwich Maſkelyne* all' Aſtronomo di Milano Ab. de *Ceſaris* in data dei 12. Decembre 1783. *Libenter accipias precor chartulam, quam nuper edidi ad excitanda hominum tam doctorum quam indoctorum ingenia ad acrius obſervanda meteora ignea dicta* (Fire-Balls, globi di fuoco). *Forte fortaſſe Cometae evaſura ſunt. Meteorum quod* 18. *Auguſti praeteriti emicuit ab Inſulis* Shetlandiceis *in latitudine* 60.° $\frac{1}{2}$ *uſq: ad* Nuys *in Burgundia in lat.* 47.° 7', *long.* 2.° 37' *ad orientem Lutetiæ per diſtantiam* 1000. *milliarium viſum eſt; neque dubito quin ultra verſus Borea-zephyrum, & Euronotum apparuerit. Secundum curſum ſuum tranſiiſſe debuit in* zenith *Urbis Nicææ, & ad diſtantiam* 2.° 20' *magni circuli ad noto-zephyrum veſtræ Urbis, poſtea ad auſtralem partem Inſulæ Corſicæ, & ad Borealem partem Inſulæ Sardiniæ, & in* zenith *apud Tunetum, & Tripolin... Operam veſtram in hac re, quæ mihi magni momenti videtur, impendere, Vir doctiſſime, ne dedigneris, utpote quæ ad philoſophiam naturalem ſaltem, forte etiam ad Aſtronomiam ipſam promovendam conducere poteſt.*

pari di quel globo cadere ai piedi del monte, ſe foſſe del pari lucido, e ſe aveſſe come queſto inſoliti, e rapidi termini di apparizione, e ſcomparſa. E queſt' inſolita foggia appunto d' un corpo lucido, che ad un tratto ci ſi preſenta, che ſomiglia ai celeſti, ed ha tutto inſieme lo ſplendore, e il moto rapido come i terreſtri più vicini, e che infine ci ſvaniſce di viſta, oſſia ci tramonta in certo modo ſugli occhi, fu la cagion principale, che confondendoci le idee lo fece comunemente credere caduto vicino. Ma di ſimili illuſioni ci occorrerà rintracciare vie più la cauſa nel Capo quarto in propoſito delle ſtelle cadenti.

Dalla grandezza in fuori, che fu aſſai maggiore, e dalla velocità, che compariva piuttoſto minore, fu quell' ardente meteora nel rimanente ben ſimile ad una ſtella cadente; e laſciò al pari delle ſtelle cadenti dopo di sè una ſtriſcia, o traccia rovente in proporzione più viva, e con varie degradazioni di colori, e tramandò talvolta intorno a sè alcune faville, che preſto diſparvero, come ſomiglianti faville in proporzione minori ho più d' una volta oſſervato intorno alle ſtelle cadenti, quando inclinano al loro termine.

Ella vede adunque, che non ſolo in Aſtronomia, ma anche in Fiſica crediamo talvolta, e ſiamo vanamente perſuaſi di vedere, e ſentire le coſe ben diverſe, e perfino all' oppoſto di ciò, che ſono in ſe ſteſſe.

CAPO III.

Confronto di oſſervazioni per calcolare l' altezza e il corſo della fiamma volante con alcune rifleſſioni.

QUelle avvertenze, e limitazioni, che nell' ultimo articolo precedente indicai per la conveniente applicazione di fraſi, e nomi aſtronomici a queſti meteorologici fenomeni, divengono tanto più neceſſarie qualora i metodi in Aſtronomia familiari, e ſicuri traſportare ſi vogliono a calcolare l' altezza, la diſtanza, e il corſo di ſimili meteore. Non ſono che troppo frequenti gli eſempj d' importuno ſfoggio di figure, e di calcoli, i quali debbono infine riconoſcerſi, per la realtà delle coſe, non ſolo inutili, ma ben piuttoſto idonei ad indurci in gravi errori, e fallaciſſime ſuppoſizioni.

I corpi celeſti ſono ſicuri nella particolare loro eſiſtenza, e ſicuramente ſituati, e circoſcritti in quella parte del celeſte emisfero, a cui da molti oſſervatori, e da diverſi punti della terra ſi riferiſcono, e ci preſentano così termini certi per calcolarne coi ſoliti metodi lo ſpazio, il tempo, la diſtanza, e ogni altro elemento della loro orbita.

Ne' meteorologici fenomeni nulla d' ordinario s' incontra di ſicuro, e coſtante nella identità de' limiti loro, nè del luogo, nè del tempo, a cui riferire ſi debbono. Ne' più eſteſi, come ſono le aurore Boreali, non vi è modo di fiſſare un ſol punto, che ſia certamente circoſcritto, e ſi preſenti lo ſteſſo a due oſſervatori l' uno dall' altro alquanto diſtanti. In queſti globi lucidi, che ſono più riſtretti, la rapidità del loro moto, l' improvviſa loro apparizione, e ſcomparſa non ci laſciano d' ordinario luogo a concertate oſſervazioni di confronto, e ci rendono il più delle volte incertiſſimi.

Avrò altrove occaſione di moſtrare, che proviene l' aurora Boreale da una effuſione, e moto di materie per l' atmosfera, le quali eſtendono per cento, e dugento leghe orizzontalmente certa ſomiglianza di fenomeni corriſpondenti a ſimili accidenti di quelle ſteſſe materie ſparſe per l' atmosfera. Si vedono quindi dagli oſſervatori diſtantiſſimi que' fenomeni, ne' quali però non vi è che la ſomiglianza, ma niſſuna unità, nè identità di luogo, nè di ſoggetto de' medeſimi. Sono diſtinte parti d' un lungo corpo conſimile in tutta la ſua ſucceſſione, ed eſtenſione; ciaſcuno ne vede la ſua ſezione, ma ciaſcuna ſezione è tanto diſtinta da tutte le altre, quanto è diverſo per ciaſcun oſſervatore il piano nell' orizzonte, e il ſegmento dell' atmosfera, che nell' orizzonte di ciaſcuno ſi comprende. Come una nebbia eſteſa ciaſcuno la vede conſimile intorno, e ſopra di sè; ma non è identica quella dell' uno con quella dell' altro; e mal ſi concerterebbero gli angoli, e la baſe per calcolarne l' altezza.

Sembra in oltre aſſai probabile, che la luce ſteſſa di una data parte, o ſezione dell' aurora Boreale non ſia viſibile a tale diſtanza, quanta il più delle volte ſuole aſſumerſi fra due oſſervatori, che s' immaginano di fiſſare di quella ſteſſa parte gli angoli della riſpettiva elevazione dall' orizzonte.

L' aſpetto infine di ſomiglianti meteore non dipende d'ordinario dalla loro propria figura, e grandezza; che anzi la figura ſteſſa, e grandezza è ſempre varia, e riſulta piuttoſto dalla diverſità delle diſtanze degli ſpettatori, e molto più dalla groſſezza, e dalla diverſa purità, o impurità degli ſtrati d' aria frappoſta. Onde le diſtanze tra gli oſſervatori neceſſarie per ſomminiſtrarci una baſe, e gli angoli pel calcolo ci cambiano la figura, la grandezza, e tutta in ſomma l' identità della meteora, che ci proponiamo di confrontare per ſoggettarla al calcolo.

E ciò baſti aver qui di paſſaggio accennato per eccitare la curioſità di confrontare i metodi più comunemente praticati nel calcolo dell' altezza, e delle diſtanze di ſomiglianti meteore coi modi, che a noi fortunatamente ſi preſentarono per determinare l'altezza del lucido globo, di cui trattiamo.

ARTICOLO I.

Confronto di oſſervazioni, e cognizione dell' altezza del lucido globo.

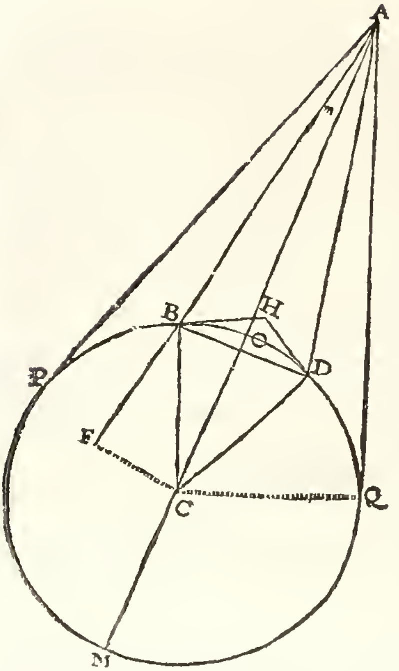
Ne aveva io fiſſato in Tortona, quando paſsò pel mio meridiano, l' altezza ſull' orizzonte *a gradi* 40 *verſo l' auſtro*. Ebbi felicemente riſcontro dall'accurato oſſervatore Genoveſe, che in Rapallo egli poteva accertarne l'altezza ſull' orizzonte nel punto, che paſsò pel ſuo meridiano *a gradi* 45 *verſo borea*; e ciò non per ſemplice giudizio dell'occhio, ma in oltre verificando queſto colle effettive miſure dell' altezza della ſua caſa, e dell' ombra, che ne laſciò ſul terreno, quando preſſo a poco trapaſsò il meridiano. Col prezioſo incontro di queſte due oſſervazioni per quanto in ſimili materie può ſperarſi eſatte, e ſicure, fui certo, che il lucido globo nel ſuo corſo paſsò verticale fra Tortona e Rapallo ſopra le creſte del frappoſto Appennino. Non mi reſtò dopo ciò, che di riconoſcere in una carta geografica abbaſtanza grande, ed eſatta la riſpettiva poſizione, e le diſtanze dei due luoghi per fiſſarne l' arco, oſſia la baſe frappoſta tra i due orizzonti.

E qui pure fu all'uopo mio opportuna l'ampia Carta Corografica degli Stati di S. M. Sarda pubblicata nel paſſato ſecolo dal *Borgonio*, e corretta, ed accreſciuta del 1772. Ivi è Rapallo aſſai più orientale di Tortona; onde conducendo una retta fra queſti due luoghi, e paragonandola con altra retta, che rappreſenti ſulla ſteſſa Carta la direzione del globo lucido da greco a ponente, queſta taglierà quella linea ad angolo tanto poco inclinato a greco, che ſenza grave errore potrebbe aſſumerſi in direzione verticale a quella prima linea. Non è inoltre tanta la differenza fra i due meridiani, che ci faccia temere di notabile divario di tempo fra le due oſſervazioni; tanto più che queſto divario ben poco, anzi nulla influirebbe nei riſultati del calcolo, atteſo che queſta meteora, come da principio notai, in tutto il ſuo corſo, per quanto cadde ſotto la oſſervazione, ſi mantenne coſtantemente aſſai alta, e non indicò per quel verſo che tenue inclinazione all' orizzonte.

Per la diſtanza cercata fra i due luoghi ſi trovano appunto ſulla ſteſſa carta 60 miglia Italiane da fuori di porta nuova di Tortona fino a Rapallo; onde la cognizione dell' altezza di queſta meteora ad altro non ſi riduce, che alla ſoluzione del ſeguente problema:

Data la baſe BD *di* 60 *miglia Italiane, e dato l' angolo di elevazione Boreale ſull' orizzonte* B *di gradi* 45, *e ſull' orizzonte* D *l' angolo di gradi* 40 *di elevazione Auſtrale, nella quale s' incontra il globo lucido* A, *determinare l' altezza verticale di queſto; e nella ſteſſa baſe* BD *ſegnare il punto* O, *ſu cui cade quella verticale.*

SOLUZIONE.



Aſſegnando 60 miglia Italiane per grado (*come accenna la Lande Aſtronom. Tom. 3. artic. 2639.*), ed eſſendo la diſtanza di 60 miglia, ſarà l' arco $BOD = 1^\circ$; onde menando la corda BD, i due angoli eguali riſultanti dalle due tangenti ai raggi della terra, che ſono le viſuali dei due orizzonti in B, e in D ſaranno di $30'$. Dunque nel triangolo ABD, ſarà $ABD = 45^\circ\ 30'$, $ADB = 40^\circ\ 30'$; onde $BAD = 94^\circ$

Avendo aſſegnato 60 miglia per grado, il raggio della terra ſarà 3440 miglia; e la differenza tra la corda BD, e l' arco BOD ſarà poca, o niuna; onde $BD = 60$.

Con queſti dati coſtruendo l' opportuna figura per compiere il calcolo trigonometrico, ſi trova l' altezza cercata $AO = 27.5$ miglia Italiane.

E i due ſegmenti della baſe in O ſono $BO = 27\frac{4}{6}$.
$OD = 32\frac{2}{6}$.

ARTICOLO II.

Calcolo della eſtenſione di terreſtre ſuperficie, da cui in virtù della ſua altezza dovette eſſer viſibile il lucido globo.

Poſta l' altezza ſua verticale AO meninſi dal punto A le tangenti AP, AQ ſopra un circolo, che rappreſenti la sferica figura della terra. Saranno queſte le viſuali del più lontano orizzonte, ſu cui poteſſe eſſer viſibile queſta meteora in *A*. Quindi per fiſſare la ricercata eſtenſione, da cui ſulla faccia della terra dovette eſſer viſibile quel lucido globo in virtù della ſua altezza, non ci reſterà, che di calcolare in miglia Italiane la miſura dell' arco $OP = OQ$, la quale riſulta di miglia 433.

Queſta meteora pertanto in ciaſcun punto di tutto il ſuo corſo da greco a ponente fu viſibile a ragione della ſua altezza per l' eſtenſione di 433 miglia per ogni verſo, ed egualmente dall' una, che dall' altra parte. E perciò l'eſtenſione cercata occuperebbe in latitudine un tratto di terreſtre ſuperficie di miglia 866, quando la ſua altezza foſſe ſtata coſtante.

Ma ſiccome oſſervai in eſſa l'inclinazione di circa 15 gradi; ſarà quindi l' eſtenſione ſteſſa alquanto maggiore verſo greco, ove comparve più alta; e in proporzione alquanto minore verſo ponente, ove andò ſucceſſivamente abbaſſandoſi.

In longitudine poi da greco a ponente dovrà aggiungerſi alle miglia 866 la miſura dell' intero corſo di queſta meteora. E benchè non abbia finqui potuto raccogliere tante oſſervazioni ſicure da ſtabilirne preciſamente i limiti, poſſono queſti per le notizie, che ho al preſente, eſtenderſi dal punto *O* fra Tortona e Rapallo per due gradi verſo greco, e per un grado e mezzo verſo ponente. Siccome la carta del *Borgonio* non ſi eſtende a greco abbaſtanza, ed in oltre non ha diſtinti i gradi, mi fu perciò neceſſario ricorrere ad un' altra carta, che è quella di *Le Rouge* per indicare in qualche modo la ſituazione di quel punto *O*. Corriſponde queſto ſulla carta ultima intorno al luogo detto *Saſſo*; ed è in longitudine 27.° 10'; e in latitudine 44.° 48'.

Dovranno dunque aggiungerſi 120 miglia alle miglia 433 verſo greco, e miglia 90 alle 433 verſo ponente. Onde riſulterà l' eſtenſione cercata in longitudine di miglia 1076, le quali partendo dal punto *O* ſaranno verſo greco miglia 533, e verſo ponente miglia 523.

Onde ſe ſulla baſe fiſſata tra Tortona e Rapallo dal punto *O* ad angoli indicati nel precedente articolo ſi prolunghi ſecondo la direzione della meteora una retta verſo greco di miglia 120, e la ſteſſa verſo ponente di miglia 90, ne riſulterà un diametro di miglia 210 compreſo tra il Vicentino verſo i colli Euganei fino alle alpi Cozzie verſo il colle di Tenda. Su queſto diametro potremo deſcrivere nella terreſtre ſuperficie lo ſpazio, per cui fu viſibile la meteora; e sarà quello ſpazio circoſcritto in una ſpecie di ovale, in cui eſſendo le ordinate in *O* di miglia 433, anderanno queſte in proporzione dell' altezza ſucceſſivamente creſcendo per 120 miglia verſo greco, e ſcemando per miglia 90 verſo ponente, che ſono gli ultimi termini, dai quali l'ultima ordinata dovrà, come da centro, farſi girare intorno per connettere inſieme i due archi ovali ſulle ordinate ſteſſe condotti. E ſiccome indicai da principio, l'inclinazione della meteora ſecondo la direzione ſua fu in circa di gradi 15 ſull' orizzonte di Tortona; così chi ama far eſercizio di calcolo potrà determinare la progreſſione di quelle ordinate, e compiere la deſcrizione dello ſpazio cercato.

ARTICOLO III.

Confronto de' luoghi, ne' quali fu effettivamente oſſervato il globo lucido con alcune ricerche ſulla ſua natura, e grandezza.

Le conſeguenze di calcolo non oltrepaſſano punto nè poco la sfera di mere poſſibilità in tutto ciò, che non è immediatamente compreſo nelle oſſervazioni, che ne porgono l' occaſione. Ora la baſe, e gli angoli di elevazione fiſſati ne' precedenti articoli non altro riguardano, che la preciſa altezza di quella fiamma nel punto, in cui fu oſſervata. La direzione, e l'inclinazione della ſteſſa a ſeconda del ſuo corſo furono nello ſteſſo luogo raccolte con altre, e diſtinte oſſervazioni. Affinchè poi ſuſſiſtano le deduzioni de' calcoli, che quella direzione, e inclinazione ſuppongono coſtanti in tutto il corſo della meteora, d' uopo è rivolgerſi ad altre oſſervazioni, che ce ne facciano fede nel precedente, e ſucceſſivo ſuo andamento.

Vero è che in quella altezza, e rarità di atmosfera non ſi ſaprebbe agevolmente immaginar una cauſa, che faceſſe deviare quella fiamma dalla prima ſua direzione. Ma oltre che il difetto di ragione è un fievole fondamento per ben conchiudere

chiudere nelle coſe di fatto, gioverà riflettere, che in quella ſteſſa rarità dell' aria ambiente non ſarebbe facile di trovare un punto d' appoggio, o riagente, che determinato abbia la projezione, e lo slancio di quella fiamma con sì ſorprendente rapidità: e quantunque non ſappiamo intenderne il modo, è pur coſtante, che fu lanciata, e corſe per tutto il ſuo ſentiero. E perchè dunque non potranno eſſervi modi, e cauſe, che ne cangino la direzione, e l'inclinazione, quantunque noi non ſapeſſimo riconoſcerle, nè immaginarle?

Che ſe per intendere quella rapidità del ſuo corſo preſcindere ci piaccia dalle meccaniche maniere di projezione, e ci rivolgiamo, come pur ſembra più plauſibile, ad interiore, e mutua azione di materie lentamente, e di lunga mano preparate, e diſpoſte per quello ſtrato d'aria, e per tutta l'eſtenſione, in cui ſucceſſivamente avvamparono; aſſomiglieremo con ciò queſta meteora ad un fulmine a ciel ſereno, di cui ſi trovano eſempj in qualſivoglia corſo di Fiſica; e ſoltanto avrà queſto la particolare condizione di eſſere aſſai più alto dei fulmini ordinarj. Quindi quella ſteſſa altezza ſua, e rarità dell' aria ambiente, che ci renderebbe ineſplicabile la ſua meccanica projezione, ci ſomminiſtrerà piana intelligenza della rapidità ſua grande bensì, ma aſſai minore di quella del fulmine, per la minore riazione, e pel minore addenſamento di materie, che ſoltanto può aver luogo in quell'aria rariſſima.

E per le medeſime cauſe riſulterà l' eſpanſione, e ampiezza di quella fiamma tanto maggiore di quella del fulmine, quanto è in proporzione minore la forza dell' aria intorno coercente, e comprimente.

Infine chi ha qualche idea dell' intenſità del ſuono non aſpetterà, che in tanta rarità d' aria, e in sì libera diffuſione di quelle materie, che avvampano, poſſa accadere sì grande percoſſa nell' aria ambiente da propagarne lo ſtrepito perfino alla ſuperficie della terra. Onde concepirà quel fuoco, ſiccome le più ſenſate oſſervazioni lo conſermano, tacito, e ſilenzioſo agli orecchi noſtri in tutto il ſuo più alto ſentiero; e non ci reſterà, che di averne udito lo ſtrepito nel termine ſuo, quando pur ſi producano oſſervazioni, che ne dimoſtrino l' abbaſſamento nelle ordinarie regioni de' fulmini, come pur ſi riſcontrano aſſai baſſi ſomiglianti eſempj di globi ardenti, che furono veramente ſtrepitoſi (*Mem. dell' Accad. delle Scienze di Parigi* 1725.); ſe pure non foſſero le teſtimonianze di ſtrepito tanto vane, quanto facili aſſociazioni d' idee, ſenza l' intervento dell' orecchio.

Nè in queſto propoſito traleſcerò di avvertire, che il rimbombo, e lo ſtrepito colla ragione della ſua propagazione di 1038 piedi parigini per ſecondo di tempo, come hanno fiſſato gli *Accademici Parigini* fin dall' anno 1738 (*a*), non indica punto l' altezza, ſe non nel caſo che ſia ben certo chi l' aſcolta di ritrovarſi ſotto il centro dello ſcoppio ſtrepitoſo. Altrimenti non indica ſe non la diſtanza dello ſcoppio ſteſſo, la quale ſi combina con qualſivoglia altezza altronde nota, e anche con niuna, come negli ſcoppj, che ſi fanno dalla terra.

In mezzo però a sì plauſibili idee non acquiſteremo verun diritto di preſumere la direzione, e inclinazione ſua coſtante piuttoſto, che varia; e saremo in queſta parte coſtretti a riportarci ſempre al confronto di altre oſſervazioni. Tutte coſpirano le più eſatte notizie, che da ogni parte ho riſcontrato, in riconoſcere, che quella fiamma procedeſſe coſtantemente da greco; poichè ciaſcuno dice d' averla veduta ve-

---

(*a*) Correſſero i *Parigini Accademici* l' antica loro eſtimazione della velocità del ſuono di 180 teſe per minuto ſecondo, e la riduſſero a teſe 173, che ſono appunto piedi 1038. Or queſta riduzione ſi trova affatto conforme a recentiſſime ſperienze fatte a Gottinga con un orologio ben ſingolare, di cui parla *Keſtner* Segretario perpetuo di quell' accademia in una lettera al P. *Gregorio Fontana* in data dei 19. Aprile 1779. ne' ſeguenti termini: *Aliud horologium poſſidemus portatile, ut quod ab elaſtro moveatur, tribus indicibus monſtrans minuta prima, ſecunda, tertia, horas nullas, motum* 29. *circiter minutis primis continuans. Motus ejus quovis minuto tertio cohiberi poteſt, dummodo voluntatem obſervatoris digitus velociter ſatis ſequatur. Ita notato poſitu indicum, ſcitur quantum promoti ſint* v. c. *tempore intra fulgur viſum & fragorem auditum elapſo; & ſic hoc tempus in minutis tertiis definitur. Confectum eſt horologium ab experto Horologiopoeo in noſtra Urbe degente, cui nomen* Klindworth.

Uſus illo ſum cum Mayero *ad experimenta circa ſoni velocitatem inſtituenda die* 15. *Octobris* 1777. *Utebamur tormento minore, cujus orificii diameter aequatur diametro globi ferrei duarum unciarum. Eo ab Obſervatorio* 3218, 8 *pedes pariſinos remoto, repetitis experimentis comperimus, tempus inter fulgur & ſonitum intra minuta ſecunda* 3, *tertia* 5 & 9 *coërceri. Ut ex his experimentis, & aliis in diſtantia minore inſtitutis viam ſoni minuto ſecundo* 1038 *pedum pariſinorum repererimus, cui probe cum aliorum experimentis convenit.*

nir verſo di sè da qualche punto tra levante e tramontana, indi proſeguir a ponente.

Per l' inclinazione poi d' uopo ſarebbe con oſſervazioni previe, e ſuſſeguenti a quelle di Tortona, e di Rapallo calcolarne ſimilmente l'altezza per dedurne le giuſte progreſſioni. Frattanto però niuna ragione ci vieta di prendere per congettura, e per uſo di calcolo quella inclinazione come coſtante.

Appariſce per oppoſto incredibile divario fra i riſultati del calcolo, e le effettive oſſervazioni in propoſito dello ſpazio, da cui fu ſulla terra viſibile quella meteora. Poichè eſtendendoſi queſto a 1076 miglia da greco a ponente, ed a miglia 433 per ogni verſo in latitudine, mi reca maraviglia di non riſcontrare chi abbia oſſervato quella meteora nemmeno oltre la diſtanza di 100 miglia da alcun punto di quel diametro, che indicai per determinarne lo ſpazio col calcolo.

Niuno parimente, per quanto abbia io rintracciato, vide ſorgere quella fiamma dai veri limiti dell' orizzonte, niuno la vide perderſi entro i medeſimi; ma chiunque s' incontrò in orizzonte libero, ed ebbe ſufficiente uſo di rifleſſione per non abbagliare ſe ſteſſo con eſtranee aſſociazioni d' idee, ſe la vide come piombare dall' alto verſo di sè, e ne ammirò poco meno che in un ſolo iſtante la grandezza, e lo ſplendore colla ſua apparizione, mentre era alta ſull' orizzonte incirca trenta gradi, nel che d' ordinario convengono in maggior numero gli oſſervatori. Queſti trenta gradi però non ſi debbono intendere nel punto, che paſsò pel meridiano, al che pochi hanno con attenzione riflettuto; ma nel punto, in cui ciaſcuno la vide or di fronte, or di traverſo ſecondo la particolare ſua poſizione.

E queſto divario ben lungi d' indurre veruna contraddizione tra le oſſervazioni e il calcolo ſembra anzi vie più confermare la tenue intenſità di luce, e la fatua indole di queſta meteora, ſiccome lo notai nell' articolo ſeſto del Capo precedente. Talchè dovrà dirſi, che reſtò eſſa inviſibile, oſſia tanto debole da non farſi con pompa, e novità diſtinguere non già per mancanza di grandezza, e di altezza, oſſia di raggio viſuale ſull' orizzonte, ma perchè la ſteſſa ſua grandezza, e altezza ne ha rarefatto, e diffuſo per tal modo l'incendio, e il centro della ſua luce, che oltre certa diſtanza fu tanto diſperſa ne' ſucceſſivi ſtrati d' aria frappoſta, e tanto debole da non far altra impreſſione alla viſta, ſe non quella, in cui realmente io la vidi finire, cioè in una sfumatura di vapor luminoſo, il quale perciò oltre certa diſtanza non fu in verun conto avvertito.

Che ſe infine ci piaccia di conoſcere la grandezza di queſta meteora, abbiamo nei triangoli già fiſſati ne' precedenti articoli gli elementi ſicuri per calcolarla, ſecondo le comuni ipoteſi della apparente, e reale grandezza de' corpi lucidi.

Mi baſterà di notare, che mal ſi concepirebbe la ſua grandezza in tutto il corſo uniforme, e coſtante. Due circoſtanze nel Capo primo deſcritte la indicano molto varia. Primieramente io la vidi in qualche punto ſtraordinariamente dilatata e allungata, e perſino diviſa in due; e nel ſeguente iſtante aſſai più concentrata, e in proporzione ancor più lucida di prima. In oltre quelle faville in forma di lumicini, che ne cadevano a quando a quando intorno, maſſime verſo il ſuo termine, dovettero eſſere di gran mole per eſſer viſibili a sì grande diſtanza, e furono perciò altrettanti ſmembramenti, ed una ſpecie di profuſione della ſua grandezza. Sembra veriſimile, che ſieno occorſe molte di quelle ſeparazioni, le quali però non furono diſtinte, ſe non da chi fu in proſpettiva di fianco, e non altrimenti da chi ſi trovò a ſeconda del moto, e non vide quella fiamma, che in iſcorcio. Per ultimo il naturale andamento delle altre fiamme anche nell' aria più denſa, e reſiſtente ci ſi preſenta in aſpetto ſempre tumultuario, e volubile; nè ſi vede fiamma naſcere tutto inſieme, e procedere fino al ſuo termine con uniforme grandezza.

CAPO IV.

Oſſervazioni ſulle ſtelle cadenti con alcune rifleſſioni ſulla loro natura.

D' Uopo è prevenire ſul bel principio un troppo comune pregiudizio, a cui il nome ſteſſo di *ſtelle cadenti* porge occaſione, e ſoſtegno.

ARTICOLO I.

Pregiudizio comune ſulla diſtanza, e ſul luogo della caduta di dette ſtelle.

Non il volgo ſoltanto, ma i più gravi Fiſici affermano, che tali meteore cadono realmente in terra, ed ivi depongono bituminoſi avanzi della oleoſa, e ſulfurea loro natura; i quali avanzi pur s' ingegnano di rintracciare, e raccogliere per conſervarli fra i rari monumenti delle naturali produzioni degni di ſtar a fianco delle ſuppoſte *pietre del fulmine*. Si vedano tali autori preſſo *Muſſchembroek* (*Introduct. ad Phys.* §. 2505.) ove conchiude: *dubitandum non eſt, quin hujuſmodi ſtellæ in terram cadant, cum & ipſe viderim*. Alla teſtimonianza di sì illuſtre Fiſico mi ſpiace di doverne aggiungere altra più recente d' un oſſervatore molto benemerito della meteorologica ſtoria, la quale teſtimonianza benchè non ſia tanto deciſa ſulla caduta di queſte ſtelle, ci fa nondimeno intendere, che ſi ſcagliano fino a certa non grande diſtanza da terra. *La ſtella cadente* (Lettera ſulle ſtelle cadenti negli opuſcoli ſcelti di Milano in 8.° Vol. 21. pag. 88.) *a certa non grande diſtanza dal luogo, ove ſedevamo (perciocchè mi ſovvengo, che io la vidi a farſi vie più grande, ed a ſcagliarſi con alcuna obliquità verſo di noi) ſcomparve. Ma nello ſteſſo indiſcernibile iſtante ne vedemmo e il viſo, e le mani, e le veſtimenta noſtre, e il terreno, ed alcuni oggetti vicini illuminati da un ſubitano, ampiiſſimo, innocente lampo, a cui non ſuccedette neſſuniſſimo rumore. Stavamo per anco amendue ſoſpeſi per queſto ſtrano caſo, quando uſcì dal non lontano giardino un ſervo, che ne addimandò, ſe avevamo veduto nulla; che egli aveva veduto una rapida luce a ſplendere ſul terreno del giardino, e maſſimamente ſu i rigagnoli d' acqua, che egli ſtava dirigendo per innaffiarlo.*

ARTICOLO II.

Rifleſſioni generali contro l' antecedente pregiudizio.

Per quanto io mi ſtudii di comprendere queſto caſo non altro ſo trovar in eſſo di ſtrano, che il modo di narrarlo. Nel rimanente, toſtochè ſpogliato ſia dello ſtile di ſorpreſa, e d'entuſiaſmo, ſi riſolve affatto in una ſtella cadente delle più luminoſe, che non ſono poi tanto inuſitate, nè ſtrane: *nulla ſine hujuſmodi ſpectaculis nox eſt* direbbe *Seneca*. E che altro fu manifeſtamente quel ſubitano ampiiſſimo innocente lampo, ſe non l' illuminazione, che la ſtella, come accade pur ſempre, fece tanto più viva, quanto più ſi accoſtò ſecondo la direzione ſua al ſuo termine, che s' incontrò verſo gli oſſervatori? E certamente in quell'indiſcernibile iſtante, in cui gli oſſervatori torſero gli occhi dalla ſtella, e li fiſſarono l'un contro l'altro per avviſarſi di quell'accidente, in vece di veder la luce direttamente nella ſtella, come ſenza fallo diſtinta fino al fine l' avrebbero continuando a mirarla, piuttoſto la videro rifleſſa ſul viſo, ſulle mani ecc., come il ſervo, che non guardava ſe non abbaſſo irrigando il giardino, la vide ſul terreno, e maſſimamente ſu i rigagnoli d'acqua più atti a rifletterla.

Quindi è, che ſenza punto ſcemare del riſpetto, che io debbo alla Memoria dell'abile oſſervatore, mi ſarà permeſſo di ſcoſtarmi dal ſuo giudizio ſul propoſito della diſtanza, che egli crede non grande dal luogo, ove egli ſedeva. Se quel lucido globo, che ne' precedenti Capi ho deſcritto, benchè veduto da tanti oſſervatori, e in direzioni tanto più proprie per dar qualche idea della ſua diſtanza, ſi giudicò comunemente troppo vicino, benchè foſſe lontaniſſimo; come potrem fidarci d' un giudizio di vicinanza fatto ſopra un corpo lucido non viſto, che nella ſola direzione verſo la viſuale dello ſpettatore ſopraffatto? eſſendo queſta direzione la più propria per fare illuſione anche nelle più tranquille, e rifleſſe circoſtanze, non che ad uno, che ſe la richiama in mente collo ſtile del più ſervido entuſiaſmo.

ARTICOLO III.

Digreſſione ſulla natura delle ſtelle cadenti.

Renderò di buon grado giuſtizia all' elevato ingegno dell' oſſervatore, che nella ſteſſa Lettera immaginò, e compreſe in una eſteſa propoſizione i caratteri, che pur dovrebbero avere le ſtelle cadenti in conformità della natura, e del modo di azione, che egli concepiſce nel ſuo elettrico fluido, quando eſſe foſſero ſingolari modificazioni della elettricità di rugiada, come precedentemente le aveva credute effetti della elettricità di ciel ſereno.

Eſt aliquid prodire tenus, ſi non datur ultra. Ma per non ritardare i progreſſi della Scienza con gratuite ſuppoſizioni, e con vana perſuaſione di teorie perfette, ove per la parte dell' oſſervazione, e della verità neppur ſono incominciate, ſtimo neceſſario di avvertire, che a tre in ſomma ſi riducono i fondamenti di quella propoſizione. 1. Un ſoſpetto di lampo intorno al cervo volante, che ha qualche ombra di ſimilitudine colle ſtelle cadenti; del quale lampo però non ha potuto eſplorare l' elettrica indole, perchè per mala ſorte la cordicella del cervo non era ancor iſolata. 2. Una veriſſima ſtella cadente, che ſi fa finire in lampo, perchè ha illuminato il viſo, le mani, le veſtimenta, il terreno, ed alcuni oggetti vicini, e maſſimamente i rigagnoli d' acqua nel non lontano giardino. E qui quanto ſembra immaginario il lampo, altrettanto è certo, che non ſi oſſervò punto, nè ſi fa pur cenno della ſuppoſta elettrica natura della ſtella cadente. 3. Infine il Signor Priore *Cecca* nelle ſue oſſervazioni di Superga ha notato alcuni ſubitani, e poco durevoli inſorgimenti di ſuono di campanello, che ſoſpettava provvenire da ſtelle cadenti ſmarriteſi nel filo eſploratore: ma non ſi è mai avvenuto di oſſervare la corriſpondenza delle ſtelle medeſime. Il che in breve non altro indica, che un ſoſpetto contro l' evidenza del fatto.

I fondamenti adunque, che aver dovrebbe in natura quella ipoteſi per la ſola particella, che riguarda in genere l' elettrica indole delle *ſtelle cadenti*, in altro non conſiſtono, che in tre coſe, le quali poſſono col proceſſo de' ſecoli avverarſi, come io pur lo deſidero, ma finora non ſono che immaginate, ed attendono conſeguentemente il felice incontro di qualche diretta oſſervazione. Per congettura anche Seneca dice: *Denique, ut breviter dicam, eadem ratione fiunt iſta, qua fulmina, ſed vi minore* (Nat. quæſt. lib. I. cap. I.).

ARTICOLO IV.

Oſſervazioni dirette, e particolari contro quel comune pregiudizio.

E tanto baſti intorno alla natura di codeſte meteore, della quale ſiamo ancor troppo lontani di poterne proporre plauſibili congetture, non che aſſolute definizioni. Ripigliandone la ſtoria, che prima d'ogni altra dobbiamo coltivare, e promovere, io credo di poter infine indicare alcuno de' modi, che hanno indotto in errore *Muſſchembroek*, e altri Fiſici dal medeſimo citati in conferma della ſuppoſta caduta di eſſe perſino a terra. Comincierò a riferire alcuna delle più ſingolari oſſervazioni, che nel mio giornale ho regiſtrate.

Nel 1774. *il* 9. *Agoſto dopo un' ora e mezzo di notte con leggieriſſimo vento di mezzodì, a cielo ſereno con una ſola nuvola lunga, e baſſa verſo greco, ove ſi vedevano frequenti lampi, detti volgarmente* lampi di caldo, *in Rocca Grimaldi ſulla collina fuori di porta S. Sebaſtiano, ho oſſervato in una mezz' ora circa più di dodici ſtelle cadenti. Altre piccole, e rotonde cadevano in arco di ſu in giù; altre ſcendevano in una retta apparentemente poco inclinata all' orizzonte.*

Cinque però furono più grandi, e aſſai luminoſe, e riſchiararono ben notabilmente gli oggetti intorno a me; e corſero in linea retta ſecondo diverſe direzioni, ſempre però con apparente, benchè tenue pendenza dall' alto al baſſo. Non avevano queſte forma di globo, che ſul principio, ma toſto ſi ſtendevano laſciando indietro una forma di coda, o ſtriſcia lunga, e continua, ſoltanto meno fulgida, che non la parte, che precedeva; la quale coda non era ſemplice illuſione ottica, ma imprimeva

primeva un veſtigio permanente per qualche iſtante ſimile alla coda di cometa, o alla luce foſforica.

Intorno alla parte anteriore, e a fianco del corpo di queſte ſtelle ſi ſeparavano talvolta alcune favillette, che a piccola diſtanza reſtavano ſpente.

Quelle code fra uno in due minuti ſecondi dopo la ſcomparſa della ſtella ſi andavano eſtinguendo, non già dal loro principio verſo il termine, ma di pari dalle loro eſtremità, e contorni verſo il mezzo, talchè ſi ſtringevano, ed accorciavano nello ſteſſo tempo da ogni parte, e non laſciavano in fine che un barlume di luce, che più non diſtinguevaſi dai raggi confuſi del cielo ſtellato.

Per quanta diligenza io abbia poſto nel reciproco loro confronto, non mi fu poſſibile di riconoſcere veruna corriſpondenza nè di tempo, nè di moto fra alcuna di queſte ſtelle cadenti e quella ſucceſſione di lampi lontani, che da principio notai. Come queſti erano già in moto fin dal principio di ſera, così li vidi proſeguire nel loro ſtile anche per qualche tempo dopo che già finito era il giuoco delle ſtelle cadenti.

Tutte queſte ſtelle comparvero dai contorni della ſtella polare fino alla parte più alta della via lattea, tutte per l'interna loro traccia altiſſime dai termini dell' orizzonte. Era luna nuova.

Della diſtanza loro da terra eccone la prova evidente. *Tanto quelle che ſi abbaſſarono obbliquamente in linea retta, come le altre, che diſceſero in arco, ſegnarono una via lunghiſſima; la quale ciò non oſtante fu compreſa in pochi gradi della sfera celeſte, e terminò per lo meno ſopra i trenta, e ſino ſopra i quaranta, e cinquanta gradi alta dall' orizzonte.* Il che non ha luogo ſe non nei corpi, che ſi muovono molto alti, e diſtanti dallo ſpettatore, poichè quanto più ſono vicini, in tratto breviſſimo ſcorrono per molti gradi, e preſto ſi accoſtano, anzi s' immergono fin ſotto i limiti dell' aperto orizzonte. Aggiungaſi, che nell' aria a noi vicina, e tanto denſa non potrebbero sì rapidamente, come le vediamo, traſcorrere quelle fiamme ſenza farci ſentire qualche fremito, e cigolamento.

ARTICOLO V.

Dichiarazione diſtinta del medeſimo pregiudizio.

E ſul propoſito della caduta di queſte ſtelle io trovo in fine la ſeguente annotazione: *Benchè non meno io, che altri, i quali meco ſi trovarono, abbiamo veduto manifeſtamente tutte queſte cadenti ſtelle terminare il loro corſo, e ſparire alte ſopra di noi, e ben diſcoſte da ogni limite dell' orizzonte; alcuni tuttavia, che in quel tempo s' incontrarono più baſſi ne' vicini valloni ingombrati da alberi, furono perſuaſiſſimi di averne veduto chi l' una chi l' altra a cadere ſino a terra vicino a noi.*

Nel che ſi preſenta evidente la prevenzione di vicinanza di que' lucidi fenomeni, e l' illuſione del relativo innalzamento de' limiti dell' orizzonte proveniente dagli alberi, e dalla medeſima collina, che circoſcriſſero la viſione della traccia di que' fuochi prima che arrivaſſero al termine della loro eſtinzione. Sembra che voleſſero confondere la viſione della traccia lucida colla traccia ſteſſa, e col corpo della ſtella.

Quando ci troviamo in mezzo alle fabbriche in una piazza, o in un cortile, ciaſcuno capiſce, e prevede facilmente ſomiglianti illuſioni: ma nell' aperta campagna ognuno ſi crede padrone dell' orizzonte, e cade perciò in abbaglio con maggior fiducia. Un albero, una ſiepe, un boſchetto, che s' incontri a noi vicino, e a ſeconda della direzione della ſtella cadente, è ſufficientiſſimo per indurci in errore. In fatti ſi crede eſſa d' ordinario caduta o ſopra un vicino colle, o ſopra una pianta, o ſopra un boſchetto: e ſe ne adduce in prova di averne veduto queſti oggetti illuminati, come ſe inveſtiti foſſero dalla lucida materia ſparſa, e diviſa per eſſi; e ſi confonde così l' illuminazione, colla infiammazione, e collo ſplendore del corpo ſteſſo, e colla ſoſtanza della ſtella, che pur deve riconoſcerſi tanto diſtinta, e diverſa dalla ſua luce, quanto l' illuminazione, che ſimilmente imprime la luna piena ſui corpi terreſtri, è diverſa, e diſtinta dalla ſoſtanza, e natura della ſteſſa luna. Ed oſſervò molto a propoſito *Morton* preſſo *Muſſchembroek*, che appunto mentre in que' boſchetti, e in quelle ſiepi cercano i bituminoſi avanzi della ſtella, che ivi ſuppongono caduta, prendono in cambio per tali dei vecchj eſcrementi di alcuni uccelli, che fra i più ſolti rami di quelle piante ſogliono pernottare.

Queſte ſtelle ſi direbbero eſſe pure, come quel lucido globo, tramontare di qua dai monti, ſe aveſſero del pari la direzione verſo ponente, e ſegnaſſero all' occhio una traccia lunga al pari di quello; ma come la direzione loro ſi manifeſta per ogni verſo, e ſono di più corta via, e durata, così vogliono dirſi ſcomparire, ed eſtinguerſi in aria alta, e libera dentro dei limiti dell' orizzonte.

Non definirò io altrimenti, che ſimili ſtelle nel loro termine mai non poſſano accoſtarſi a terra; nè fino a quanto ſieno eſſe elevate, e diſtanti dalla terreſtre ſuperficie; nè come debbano pur diſtinguerſi da altre fogge di fuochi fatui, che ſogliono anzi per uſo, e natura loro volteggiare, e ſaltellare preſſo terra intorno ai corpi, che ſorgono, o ſi muovono ſulla faccia del ſuolo. Quando avremo in Meteorologia introdotto l'uſo delle oſſervazioni contemporanee, e di confronto ad imitazione delle aſtronomiche, comincieremo allora a poter trattare di tali queſtioni con qualche fondamento. Non temerò frattanto di far aggravio ai più ſaggi oſſervatori affermando, che pur troppo la meteorologica ſtoria, e maſſimamente per quella parte, che le ignee, e luminoſe meteore comprende, ſi riconoſce ad ogni tratto confuſa, e fuor di modo ingombrata da vecchj avanzi di falſe tradizioni, e da capriccioſi, e poetici caratteri, figli piuttoſto della prevenzione, e della ſorpreſa, che di tranquilla, e ſagace oſſervazione.

CAPO V.

Oſſervazioni, e nuova teoria de' lampi eſtivi creduti fatui, e detti volgarmente lampi di caldo.

NElla confuſione de' nomi, che gli antichi Fiſici uſarono per diſtinguere le varie ſembianze delle meteore lucide, non ſarebbe facile, nè utile impreſa di trattenerſi a verificare preciſamente il nome di queſti lampi eſtivi, che da noi ſi chiamano comunemente *lampi di caldo*, e ſi credono d'origine dalla fulminea diverſa, e perciò di fatua natura. *Satius erit de re ipſa quærere, quam mirari quid ita Ariſtoteles globum ignis appellaverit Capram* (Senec. *quæſt. natur. Lib. I. cap. I.*). Non poſſo io riconoſcere ſiffatti lampi di particolare natura, e del genere dei fatui, ma più veramente li dimoſtro proſpettive a roveſcio di lontaniſſimi temporali.

ARTICOLO I.

Si dimoſtrano i lampi di caldo *effetti di lampi temporaleſchi, e fulminei.*

Un temporale, quando è lontaniſſimo, non ci fa altrimenti ſentire lo ſcoppio, e il rimbombo de' fulmini. In oltre a grande diſtanza per la sferica curvità della terreſtre ſuperficie, o per l' oſtacolo de' monti frappoſti non cade più in verun modo la viſuale dell'orizzonte di chi lo guarda entro il corpo de' nuvoli, ond'è compoſto; e perciò non ſono queſti viſibili in alcun punto di proſpettiva, nè per verun lato di fianco; ma ſoltanto preſentano ſopra i limiti dell'orizzonte la più alta, e rara ſommità del temporale, e porgono l' inſolita veduta di quel ſolo altiſſimo termine; onde non ſi diſcerne quel temporale ſe non veramente, e con proprietà di nome al roveſcio.

In tanta altezza, e rarità d' aria, e di nubi non giungono le ſtrette, e ſcintillanti ſtriſcie del fulmineo torrente; e perciò ſono queſte del pari inviſibili per noi, come ne è inſenſibile lo ſtrepito. Sorgono però a quell' altezza ampj volumi di rariſſimi vapori, nei quali o ſi riflette, e ſi manda perſino a noi diffuſa, e indebolita la luce del folgore ſcintillante, ovvero ſi ſpande, e ſi dilata in que' vapori qualche ſoffio, e ſprizzo della materia ſteſſa fulminea, che per eſſi riſplende con luce tanto men viva, quanto meno è riſtretta, e compreſſa dall' aria intorno. Or tale appunto è la ſembianza di que' lampi, che nelle ſerene notti eſtive ſprizzano e quaſi rimbalzano da lungi or baſſi, or alquanto più alti ſui limiti dell' orizzonte.

E quella varia, e rapida ſucceſſione, che ſi oſſerva in ciaſcun atto de' medeſimi, talchè ſplendono eſſi come a ſalti, e con rapida interpolazione di gradi or più vivi, or più eſteſi, che altro è ſe non effetto della più eſatta corriſpondenza a ciaſcun colpo di fulmine, che nel lungo tortuoſo ſuo ſentiero riflette o ſprizza per quelle alte nubi maggiore, o minor porzione della ſua luce ſecondo la varia ſua poſizione?

E la coſtanza di luogo, onde que' lampi vi compariſcono per lungo periodo verſo la ſteſſa parte del cielo; e la ſteſſa lunghezza di tempo nella ſucceſſione di più, e più ore in que' ſalti, e giuochi di luce; e gl' intervalli che paſſano fra l' uno e l' altro di que' lucidi fenomeni, non corriſpondono appuntino e alla ſede propria di ciaſcun temporale, e al tempo, in cui ſuole il temporale proſeguire, e compiere i ſuoi periodi, e infine agl' intervalli, onde l' uno all' altro ſi ſuccedono i colpi del fulmine?

Sì adequato riſcontro de' più minuti accidenti di queſti *lampi di caldo* colla fulminea, e temporaleſca poſitura a roveſcio, alla quale propoſto mi ſono di riferirli, ſarebbe per ſe ſolo ſufficientiſſimo a renderne più che probabile la nuova teoria: tanto più, che nella ordinaria prevenzione di riputarli fuochi di fatua origine non ſi ſaprebbe addurne verun fondamento di oſſervazione, non che aſſegnarne una cauſa, che corriſponda per lo meno al compleſſo de' più eſſenziali caratteri; ſe ſi eccettui il generico carattere di eſpanſione, e tenuità di luce, la quale però ben meglio deriva, e s' intende per l' elevazione, e rarità di quella temporaleſca ſezione, per cui ſono eſſi ſoltanto a noi viſibili.

Ma non è mio coſtume di ripoſarmi ſulle teorie per la precaria ragione, che adequano eſſe la ſpiegazione de' fenomeni, e molto meno per la ragion negativa d' inſufficienza di altre cauſe, che ſogliono, e poſſono a tal fine immaginarſi. Alla oſſervazione mi rivolgo, e da queſta riſcontri, e lumi ripeto per aſſicurarmi d' ogni teorico principio; che perciò non nacque la precedente dichiarazione de' fenomeni di queſti lampi da veruna anticipazione di principio, ma derivò per ſe ſteſſa dalle replicate, ed eſatte oſſervazioni, che da molti anni ho raccolto ſulla particolare natura, e ſull' andamento di que' lampi di caldo, delle quali oſſervazioni in brevi parole ne riſtringerò qui i capi principali.

1. Non compariſcono lampi di caldo, ſe non nelle ſtagioni, nelle ore, e ne' luoghi medeſimi, ove dominano i temporali.

2. Oſſervando con attenzione, e traſportandomi ad opportuna altezza ho ſempre riconoſciuto, che ſiffatti lampi hanno per baſe un volume di nuvoli, che moſtrano tutte le ſembianze di procelloſi.

3. In alcune diramazioni, e in certo proſpetto di qualche porzione di temporali manifeſti, ne' quali mi trovai io ſteſſo involto, oſſervai più volte certe maniere di lampi a que' lampi ſteſſi di caldo ſomigliantiſſimi.

4. E più d' una volta, quando il lontano temporale, da cui procedevan que' lampi, s' incontrò di fronte, e proſeguì il ſuo corſo alla mia volta, vidi tal ſorta di lampi ad appreſſarſi, e creſcere in proporzione, che il temporale vie più ſi ſtendeva verſo di me; e mi ſi manifeſtarono in fine per veri lampi fulminei, e tonanti. Il che compie, quanto più nelle coſe Fiſiche può bramarſi, la perfetta evidenza della propoſta teoria.

ARTICOLO II.

Conſeguenze della nuova teoria.

Nè queſta teoria ſi riſtringe, e finiſce in ſe ſteſſa nella più giuſta cognizione della natura di que' lampi; che anzi ci guida ad altre importanti cognizioni. Quante fiate, e con quale intereſſamento, e neceſſità non ſi domanda da' Fiſici la preciſa altezza, a cui ſorgono le nubi temporaleſche, e fulminee? Per ſoddisfare a sì importante richieſta non abbiamo finqui, che poche, e imperfette cognizioni, e mezzi inſufficienti. Con molte oſſervazioni di que' lampi, che ci moſtrano quella più alta regione, a cui non ſorgono giammai le ſtriſcie fulminee, fiſſeremo il confine certo, e ſicuro delle nubi procelloſe. Una ſola coſa ci manca per ritrarre da queſta teoria sì importanti vantaggi, ed è il concerto, e la coſpirazione di molti oſſervatori, i quali nel tempo ſteſſo tengano eſatto conto degli accidenti, che intorno a loro occorrono.

Se io aveſſi avuta la fortuna di ſimili confronti, ſarebbe l' altezza delle fulminee nubi già miſurata, e definita con quelle ſteſſe oſſervazioni, delle quali accennai i riſultati in fine del precedente articolo. Ora rimangono queſte, come tante altre, per queſta parte ſterili, e mute, non per altro, ſe non per difetto di riſcontri delle diſtanze corriſpondenti del centro di que' temporali, e maſſimamente della ſucceſſiva progreſſione di quelli, che tanto ſi accoſtarono a me da involgermi in alcuna delle loro diramazioni. Non mi reſterebbe, che prendere le diſtanze cognite, come baſi, o archi della terreſtre ſuperficie, e ſtendere fino a que' ſicuri confini la tangente, o la viſuale del mio orizzonte per calcolarne preciſamente l' altezza. Sarà queſta più tranquilla, e ſicura via di arrivar a conoſcere l' altezza de' temporali, che non d' inoltrarſi per entro, o ſopra i medeſimi coll' *areoſtato*, di cui in queſti ultimi anni tante maraviglie ſi fecero, e ſi preſagirono.

Non mi eſtenderò più oltre a dichiarare l' importanza di queſte cognizioni, e altre utilità, che da quella teoria procedono. Mi baſta di aver qui, come in fine del capo precedente, anticipato un eſempio della imperfezione e miſeria dei comuni metodi delle meteorologiche oſſervazioni, dei quali ragiono alquanto diffuſamente in una Meteorologica Digreſſione di recente ſtampata nel Tomo ſecondo delle mie Opere Fiſiche.

DELLE STAZIONI

DE' PIANETI.

Del Sig. ANTONIO CAGNOLI.

DEl problema , col qual ſi cerca *quando un pianeta parrà ſtazionario*, non è ſtata per anco data, ch' io ſappia , una ſoluzione completa . Le ſue difficoltà perſuaſero i Geometri a contentarſi d' approſſimazioni anche alquanto rimote. Così *Keill* e il Sig. *du Sejour* lo riduſſero facile, ſupponendo circolari le orbite del pianeta e della terra: *Halley* avea già fatto un paſſo di più, reſtringendoſi a trattar come circolare l'orbita terreſtre ſolamente: *Keplero* non potea giunger che a ſoluzioni molto imperfette, mancandogli allora il modo di eſprimere la ragione fra i moti ellittici e i raggi vettori: finalmente *F. C. Mayer* fu il ſolo che abbia intrapreſo (Mem. di Peterburgo, Tom. II., pag. 82, e Tom. V. pag. 57) di riſolver direttamente ed eſattamente il problema con una equazione algebraica, *licet id non nemini impoſſibile viſum fuerit*, come egli dice. Ma le due ſoluzioni di queſt' ultimo Autore, benchè citate da molti, pur ſono gravemente ſallaci ; a cagione ch' ei vi ha introdotto le variazioni de' ſeni dell' elongazione e della parallaſſe annua, come proporzionali ai lati oppoſti a queſti angoli : nella qual parte del ſuo lavoro egli cade, ſenza avvederſene, nell' ipoteſi delle orbite circolari . Avanti di conoſcer le di lui ſoluzioni, avevo fatto il medeſimo tentativo per vie affatto diverſe, ed avevo ottenuto l' intento, in quel modo che ſon per eſporre nella preſente Memoria.

Sia S la commutazione, T l' elongazione , R la diſtanza dal ſole alla terra , r quella dal ſole al luogo del pianeta nell' eclittica . Nel triangolo formato da queſte due diſtanze e da quella che ſepara la terra dal detto luogo del pianeta, ſi ha l' equazione ſeguente, che è facile da verificarſi, e che ho dimoſtrata (Trigonometria, art. 229): $\text{tang.}\, T = \frac{r\,\text{ſen.}\, S}{R - r\,\text{coſ.}\, S}$.

Dunque $\text{cot.}\, T = \frac{R}{r\,\text{ſen.}\, S} - \text{cot.}\, S$; e prendendo i differenziali,

$$(A) \ldots - \frac{dT}{\text{sen.}^2 T} = \frac{r\,\text{ſen.}\, S dR - R\,\text{ſen.}\, S dr - rR\,\text{coſ.}\, S dS}{r^2\,\text{sen.}^2\, S} + \frac{dS}{\text{sen.}^2 S}.$$

Se ſi nomina V' la longitudine vera del ſole, g la longitudine geocentrica del pianeta, u' l' eliocentrica ridotta all' eclittica, è noto che $T = g - V'$, e $S = 180° - (u' - V')$, conſiderando il pianeta nel primo quarto della elongazione, dopo il di lui paſſaggio per la congiunzion ſuperiore; quella eſſendo la ſituazione ove deeſi cercare la ſoluzion generale de' problemi dei tre corpi. Nel momento della ſtazione ſi ha $dg = 0$; per il che le equazioni precedenti danno $dT = -dV'$, e $dS = dV' - du'$. Poſti queſti valori nell' equazione (A), e fatte le riduzioni convenevoli, naſce la ſeguente:

$$(B) \ldots \frac{R}{r} dr - dR = \frac{(R\,\text{coſ.}\, S - r)(du' - dV')}{\text{ſen.}\, S} - \frac{r\,\text{ſen.}\, S dV'}{\text{sen.}^2 T}.$$

Ma $\text{sen.}^2 T = \frac{r^2\,\text{sen.}^2\, S}{R^2 + r^2 - 2rR\,\text{coſ.}\, S}$, (Trigon. Tavola III, formola 32^a). Fatta queſta ſoſtituzione, facilmente ſi converte l' equazione (B) in quella che ſegue:

$$(C) \ldots (dV' + du')\,\text{coſ.}\, S + \left(\frac{dR}{R} - \frac{dr}{r}\right)\text{ſen.}\, S = \frac{r}{R} du' + \frac{R}{r} dV'.$$

Chiamo V l' anomalia vera del ſole, u quella del pianeta, M il moto medio del ſole in un iſtante di tempo, m quello del pianeta nel medeſimo iſtante, B il ſemiaſſe minore dell' orbita terreſtre, a il ſemiaſſe maggiore, b il ſemiaſſe minore dell' orbita del pianeta; e ſuppongo eguale all' unità la diſtanza media dal ſole alla terra. E' noto agli Aſtronomi per la teoria del moto ellittico de' pianeti, che $dV = \frac{MB}{RR}$, e $du = \frac{mab}{r'r'}$, detto r' il raggio vettore del pianeta. Di più ho moſtrato (775) che per ridurre all' eclittica il moto du, baſta moltiplicarlo per $\frac{\text{coſ.}\,I}{\text{cos.}^2 L}$, denotando per I l' inclinazione dell' orbita del pianeta, e per L la ſua latitudine eliocentrica; il che fatto, ſi ha poi $r'r'\,\text{cos.}^2 L = rr$. Pongo queſti valori di dV, e di du, in vece di dV' e di du', nell'equazione (C), perchè le variazioni infinitamente piccole dell' anomalia poſſono ſenza errore farſi uguali a quelle della longitudine. Ma valori analoghi ſi hanno di dR e di dr, giacchè (Trigon. 767, 776), $dR = -\frac{ME\,\text{ſen.}\,V}{B}$, e

$dr = -\frac{mae\,\text{ſen.}\,u\,\text{coſ.}\,L}{b} - \frac{mab\,\text{sen}^2 L\,\text{cot. arg. lat.}}{r}$, chiamando

E l' eccentricità del ſole, e quella del pianeta. Con queſte ſoſtituzioni, e negletto il ſecondo termine del valor di dr, del qual termine rare volte ſi avrà biſogno, quand' anche ſi voglia gran preciſione, l' equazione (C), moltiplicata per $\frac{rR}{M}$, diviene

$$(D)\ldots\left(B\frac{r}{R} + \frac{mab\,\text{coſ.}\,I}{M} \times \frac{R}{r}\right)\text{coſ.}\,S$$

$$+\left(\frac{mae}{Mb}R\,\text{ſen.}\,u\,\text{coſ.}\,L - \frac{E}{B}r\,\text{ſen.}\,V\right)\text{ſen.}\,S = B + \frac{mab\,\text{coſ.}\,I}{M}.$$

Or ſi rifletta che i moti ſimultanei m, M ſono in ragione inverſa de' tempi delle reſpettive rivoluzioni, giacchè in tempo eguale il moto angolare medio convien che ſia tanto più grande, quanto è più breve la durata della rivoluzione. Nomino P la rivoluzione periodica della terra, p quella del pianeta, ed ho $M : m :: p : P$. Dunque $M^2 : m^2 :: p^2 : P^2 :: a^3 : 1$, ſecondo la legge di *Keplero*; e le due ragioni eſtreme producono $\frac{ma}{M} = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Si ſoſtituiſca queſto valore nella formola (D), e ſi avrà

$$(E)\ldots\left(B\frac{r}{R} + \frac{b\,\text{coſ.}\,I}{\sqrt{a}} \times \frac{R}{r}\right)\text{coſ.}\,S$$

$$+\left(\frac{e}{b\sqrt{a}}R\,\text{ſen.}\,u\,\text{coſ.}\,L - \frac{E}{B}r\,\text{ſen.}\,V\right)\text{ſen.}\,S = B + \frac{b\,\text{coſ.}\,I}{\sqrt{a}}.$$

Queſta è l' equazione, la qual riſolve il problema completamente, nè è molto faticoſa pel calcolo numerico, atteſe le quantità coſtanti, il computo delle quali, fatto una volta, ſerve perpetuamente.

L' equazione, a cui ſiam pervenuti, contiene la relazione che deve aver luogo fra la commutazione e le anomalie medie del ſole e del pianeta, nell' atto della ſtazione: e queſta relazione è determinata con ogni eſattezza, sì perchè ho tenuto conto di tutte le ineguaglianze de' moti ellittici, sì perchè m' è riuſcito di convertir l' equazione (*A*) contenente quattro differenziali diverſi, nell' equazione (*E*) che racchiude ſoltanto quantità finite.

In varie maniere si può riſolvere l' equazione (*E*). Abbiamo poſto $S = 180° - (u' - V')$. Se s' intende per A l' apogeo del ſole, per α l' afelio del pianeta, ſarà $S = 180° + A - \alpha + V - u$. Col mezzo di queſta equazione ſi può dunque eliminar dalla (*E*) la commutazione. Di più è noto che

$$R = \frac{BB}{1 - E\,\text{coſ.}\,V},\quad r = \frac{bb\,\text{coſ.}\,I}{a - e\,\text{coſ.}\,u},$$

(veggaſi l' art. 3279 della ſeconda edizione dell' Aſtronomia del Sig. *de la Lande*). Si poſſono dunque ſcacciare anche i raggi vettori, e ſi avrà in una equazione algebraica la relazione immediata fra l' anomalia vera del ſole e quella del pianeta, nel momento della ſtazione aſſoluta. O vero cavando dalle ultime equazioni i valori di coſ.V, coſ.u, e da queſti quelli di ſen.V, ſen.u, ſi potranno eliminare le anomalie, e ſi avrà in una equazione algebraica la relazione immediata fra i raggi vettori nell' eclittica, al momento della ſtazione. A queſto ultimo ſcopo è diretta la ſeconda Memoria di *Mayer*; ma le ſue equazioni finali non poſſono eſſer giuſte, perchè coſtrutte ſul fondamento dell' equazione finale della ſua prima Memoria, della quale equazione accennai di ſopra il difetto, e lo proverò quantoprima con un eſempio, abbenchè di queſta prova non avrà biſogno chiunque voglia comparar l' equazione medeſima con la mia (*E*).

I due modi, che ho additati per riſolvere l' equazione (*E*), la condurrebbero a gradi elevati e difficili. Or mi baſta d' averli accennati, onde far vedere con ogni chiarezza, che eſſa contiene la ſoluzione completa del problema, poichè determina, a tutto rigore, quale eſſer debba, per ogni anomalia del pianeta o del ſole, l' anomalia del ſole o del pianeta, affinchè queſto ſembri ſtazionario. Una tale propoſizione non par differente da quelle di *Keplero* e di *Halley*, ma ſe eſſi od altri vi abbiano ancora pienamente ſoddisfatto, giudicheranno i Geometri. Egli è poi chiaro che la ſtazione dipende dalla combinazione appropriata delle due anomalie: per il che una equazione, la qual ſomminiſtri e contenga quella ſiffatta combinazione, adempie a quanto può eſigerſi nel preſente problema.

La via più ſpedita per calcolare la formola (E) è ſenza dubbio quella di falſa poſizione; aſſumendo le anomalie del pianeta e del ſole, e deducendone la commutazione col mezzo dell' equazione $S = 180° + A - \alpha + V - u$. Come il tempo della ſtazione è ſempre noto a un di preſſo, così gli errori delle falſe poſizioni ſaranno tenui, e due baſteranno ordinariamente per determinare non ſolo il dì, ma l' ora e il minuto, ſe ſi voleſſe, della ſtazione aſſoluta; alla qual preciſione non ſarebbe poſſibile di giungere per alcun altro metodo conoſciuto fin qui.

In queſta maniera ho trovato (ſervendomi delle Tavole del Sig. *de la Lande*, e traſcurando l' aberrazione del ſole) che Marte fu ſtazionario il dì 20 Ottobre 1785 a $0^{ore}\ 32'\frac{1}{2}$ di tempo medio. Della eſattezza di queſta determinazione ſi può avere un argomento dalle ſeguenti longitudini geocentriche computate ſulle medeſime Tavole

19 Ottobre 1785 a	12^{ore} ……	2^s	15°	23′	30″
20 ………	$0^{ore}\ 32'\frac{1}{2}$ …	2	15	23	37
	12^{ore} ……	2	15	23	32

Avendo calcolato, per l' accennato momento della ſtazione di Marte, la formola di *Mayer*, mi ha dato la commutazione di 15° 12′ 23″, o vero di 344° 47′ 37″, in vece di 342° 13′ 41″ che danno le Tavole per quel punto. L' errore della formola di *Mayer* è dunque in queſto caſo di 2° 34′. il che dà la ſtazione ſei giorni circa più tardi del vero: error più grande di molto di quel che darebbe la ſoluzione intiera del problema ſopra l' ipoteſi delle orbite circolari. In fatti ſu queſta ipoteſi ſi ha $B = 1 = R$, $b = a = r$, $e = 0$, $E = 0$; e la formola (E) ſi riduce alla ſeguente:

$$(F)\ldots \text{coſ.}\,S = \frac{\text{coſ.}\,I\sqrt{a}+1}{a+\frac{\text{coſ.}\,I}{\sqrt{a}}};$$

la qual dà 16° 46′ 36″, o vero 343° 13′ 24″, per la commutazione coſtante di Marte ſtazionario.

Ma come queſta commutazione può variare a un di preſſo da 10° a 23°, così la formola (*F*) (e per conſeguenza ogni ſoluzion del problema ſopra l' ipoteſi delle orbite circolari) non ſaprebbe eſſere di alcun uſo, potendo dare un errore perſin di quattordici giorni ſulla ſtazione. Al più ſi potrebbe ricorrere a detta ſormola, quando non ſi aveſſe veruna idea del tempo della ſtazione, onde aſſumere dati non remotiſſimi nel calcolo dell' equazione (*E*).

A gravi errori va pur ſoggetta la ſormola di *Keill*, che ſi trova nelle Iſtituzioni Aſtronomiche del Sig. *Le Monnier*, e della quale ho dato la dimoſtrazione (Trigon. 766). Queſta formola dà l' elongazione pel tempo della ſtazione, ed è in errore di 4° 6′ nell' eſempio precedente. Per aver un' approſſimazione maggiore, ho ſuggerito d' impiegare nel calcolo di detta ſormola i raggi vettori attuali, in vece delle diſtanze medie, il quale eſpediente mi è ben riuſcito moltiſſime volte; ma non è così in queſto eſempio, dove l' errore viene anzi a creſcere di qualche minuto. Queſta ſcoperta mi ha ſtimolato a indagare una ſoluzione completa del problema, e capace di ogni eſattezza, qual mi ſembra eſſere la preſente.

Siccome la diſtanza dell' afelio della terra da quello de' pianeti varia molto lentamente, così preſa una epoca, ſi potrebbe coſtruir facilmente, col mezzo dell' equazione (*E*), una tavola di ſtazioni d' ogni pianeta, la qual ſervirebbe per molti anni. Queſta tavola avrebbe per argomento l' anomalia media del pianeta o del ſole, e farebbe conoſcere quella corriſpondente del ſole o del pianeta, perchè la ſtazione apparente poteſſe aver luogo.

NUOVE SPERIENZE

INTORNO ALLA DOLCIFICAZIONE DELL' ACQUA DEL MARE.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

De' cimenti fatti per la dolcificazione dell' acqua marina.

NOn è credibile, che non ſiaſi mai trattato preſſo i Dotti delle età più remote del purificare l' acqua marina, ſe non per biſogno che n' aveſſero, moſſi almeno da filoſofica curioſità. E tanto più, che alla ſalſedine del mare diedero penſiero, e non tutti in un' opinione convennero intorno all' origine di un fenomeno cotanto ſingolare. Se ragione non lo faceſſe preſumere abbaſtanza, *Plinio*, di cui può dirſi non avere oggetto la Storia Naturale noto a' ſuoi tempi, ſu cui non abbia egli proferito qualche coſa, il fa argomentare da queſti inſegnamenti (*a*): *Quia ſæpe navigantes defectu aquæ dulcis laborant, hæc quoque ſubſidia demonſtrabimus. Expanſa circa navim vellera madeſcunt accepto halitu maris, quibus humor dulcis exprimitur. Item demiſſæ reticulis in mare concavæ e cera pilæ, vel vaſa inania obturata, dulcem intra ſe colligunt humorem. Nam in terra, marina aqua argilla percolata dulceſcit.* E chi crederebbe, che nè una lunga ſperienza di tanti ſecoli, nè il lume di tanti ſtudj poſteriori non abbia mai prodotto fino a' dì noſtri metodo più ſicuro del primo indicato da *Plinio*? In fatti dell' acqua perfettamente dolce che cade dal cielo, che ſcorre per la terra, che ſuppliſce a tutti i magiſteri e biſogni de' regni

---

(*a*) *Hiſt. Nat. Lib. XXXI.*

di natura, ſa parte e maſſima per avventura quella che per iſvaporamento ſpontaneo e tranquillo ſi ſolleva dal mare, dall' immenſa conſerva di acque ſalſe, ond'è involta la terra per ogni parte. E' vero che per la lentezza di queſta operazione, trattandoſi di acqua marina la cui evaporazione naturale in parità di circoſtanze ſta a quella dell' acqua comune (*a*) come 3 a 7, e per la difficoltà di praticarla in grande, come ſarebbe d'uopo, non può trarſi vantaggio dal ſuggerimento di *Plinio*; ma l'obbietto più che ſu la coſa cade ſull' uſo, e ſull' utilità che non può conſeguirſi prontamente. Di queſta pratica fa onorevole e diſtinta menzione anche il *Verulamio* (*b*). Dell' altre poi rimembrate da *Plinio*, quella delle palle vuote di cera da ſommergerſi nel mare è pur ricordata da *Ariſtotele* (*c*), da *Plutarco* (*d*), e da altri; ma ed eſſa, e le altre inſieme, che a feltramento ſi riducono, non arrivano a un pezzo alla bontà della prima, avvegnachè non è mezzo il feltrare, per quanto ſieno anguſti e tortuoſi i meati del feltro, valevole a ſpogliare da' ſuoi ſali l' acqua marina, e non altro al più può egli rattenere fuorchè le immondezze, la parte terroſa, o ciò ch'è ſoſpeſo meccanicamente, non già diſciolto chimicamente, nell' acqua. Queſto è tutto il frutto che può ricavarſi da' colamenti in genere, in qualunque guiſa ſieno procacciati, mentre il diſſalare, propriamente detto, l' acqua marina od altra ſomigliante acqua minerale richiede una vera chimica decompoſizione che non può giammai ottenerſi per quella via. E queſta è l'apparente purificazione che ha per avventura illuſo non pochi, ed uomini eziandio chiari e ſapientiſſimi. Lo ſteſſo *Leibnizio*, dopo gli antichi, pare che ne faceſſe caſo proponendo (*e*) di feltrare per la ſabbia finiſſima l' acqua marina, o pel mercurio, o per la calce di ſaturno, ſervendoſi di macchine prementi o ſucchianti per ſollecitare il colamento.

Così

(*a*) Giorn. Enciclop. di Vicenza Gen. 1786.
(*b*) *In ſylva ſylvarum*.
(*c*) *Hiſt. anim. L.* 8.
(*d*) *Quæſt. nat.*
(*e*) *Act. Erudit. Lipſ. anno* 1682.

Così lo ſteſſo *Verulamio*, il *Marſilli* (*a*), il *Deslandes* (*b*), il *Feuillée* (*c*), il *Labat* (*d*), il *Leutmanno* (*e*), ed altri. Non eſſendoſi però acchetati giammai gli uomini di queſto mezzo, la cui inefficacia era dimoſtrata ſul fatto dall' eſperienza, ad altri eſpedienti rivolſero l' animo sì, che non è forſe nazione in Europa, che non abbia meſſo qualche ſtudio in queſta ricerca, fatte più e più ſucceſſivamente lunghe le navigazioni, e creſciuto in conſeguenza più e più il biſogno dell' acqua dolce ſul mare. E indipendentemente anche da queſto, l' eſſer ella sì celebre e tra gli uomini decantatiſſima le ha fatto ſempre aver luogo fra le queſtioni più agitate e difficili della Fiſica. L' umana curioſità ha de' biſogni ſuoi proprj, e per lo più il difficile, l' oſcuro, il diſperato è ſprone alle ſue indagini oltre ogni credere acutiſſimo. Ma lungo ſarebbe il far commemorazione di tutti gli artifizj meſſi in opera per queſt' oggetto, ſenza entrare nelle chimere di tanti ſpacciaſecreti, che in queſto pure come in altri anche più aſtruſi argomenti vollero aver parte, che non avrebbe fine. La putrefazione dell' acqua marina è ſtata più d' una volta tentata, così la chiarificazione col mezzo di ſoſtanze glutinoſe. La precipitazione, e forſe più di ogni altra pratica, è ſtata pure da non pochi chiamata in ſoccorſo; e cent' altri mezzi furono adoperati in diverſi tempi, come può vederſi nelle Tranſazioni Anglicane, negli Atti di Lipſia, nell' Iſtoria dell' Accademia Reale di Parigi, nel Giornale di Trevoux, e in altri giornali e libri eſpoſto diffuſamente. L' eſperienza però, eſcluſi l' un dopo l' altro tutti i metodi propoſti, moſtrò ſempre, che l' evaporazione era a tutti preferibile, ſiccome quella che obbligava neceſſariamente a precipitare al fondo i ſali contenuti nell' acqua marina, tolta loro l' acqua di diſſoluzione. Quindi a proccurarla ſi accinſero gli uomini coll' arte, più ſollecita della natura, vale a dire con

---

(*a*) Storia del mare.
(*b*) Recueil de diff. Traités de Phiſique.
(*c*) Journ. des Obſerv.
(*d*) In itin. ad Inſ. Amer.
(*e*) Tranſ. Philoſ. n. 156.

la diſtillazione artificiale. Di molti che vi ſi occuparono, meritano particolare menzione tra gl' Ingleſi *Giovanni a Gadeſden* del 1516, *Guglielmo Walcot*, e *Fitz-Gerald*, e in Francia *Gautier* medico di Nantes al principio di queſto ſecolo. Ma par che a tutti abbia rapito la palma il celebratiſſimo Ingleſe *Hales* nel ſuo libro che ha per titolo *Inſtructions pour les mariniers* &c. Oſſervando queſt' uomo accuratiſſimo, che nel progreſſo della diſtillazione l' acqua riuſciva diſaggradevole, acre, corroſiva, ſoſpettò che ſi eſaltaſſe col vapore un certo ſpirito di ſale, e provò poi coll' eſperienza che il ſuo ſoſpetto non era irragionevole. Quindi gli effetti, che queſt' acqua diſtillata produceva funeſtiſſimi, ch' egli deſcrive in queſto modo, *elle reſſerre & retrecit les vaiſſeaux delicats & les fibres du corps, & par là elle attire les obſtructions opiniatres, & ſouvent incurables, & les tumeurs ſchirreuſes qu' on remarque en ceux qui boivent ces eaux malſaines*. Si avvisò pertanto di far precedere alla diſtillazione la putrefazione e ſucceſſiva chiarificazione dell' acqua del mare, onde far entrare in nuova combinazione più fiſſa, s' era poſſibile per queſta via, quello ſpirito acido sì dannoſo. Ma tutto ciò non impedì che nelle diſtillazioni ch' ei fece in appreſſo non ſe ne ſollevaſſe tuttavia accompagnandoſi co' vapori acquoſi, e contaminando, ſpecialmente dopo le prime ſvaporazioni, l' acqua diſtillata come innanzi. Conchiuſe pertanto, ch' era bensì migliorata la condizione delle coſe, e ritardata alquanto la ſublimazione dell' acido, ma che non poteva con ſicurezza uſarſi che delle prime porzioni di acqua ſtillata, abbandonando il reſtante. In tanta incertezza l' *Appleby* del 1753 tentò di migliorare il metodo di *Hales*; ma ad onta che ſia nell' acqua marina diſciolta una preparazione di alcali fiſſo e di calce prima della diſtillazione, un alito urinoſo ſi manifeſta ſempre nell' acqua ſtillata, e dal più al meno ſe creta, ſapone, calce ſemplice, od altri aſſorbenti vi vengano infuſi, del che può vederſi ampia deſcrizione ne' Vol. 48, e 50 delle Anglicane Tranſazioni.

Rifleſſioni ſopra la diſtillazione dell' acqua marina.

Non può negarſi, come dicemmo qui innanzi, che alla natura non rieſca tuttodì di ſollevar dal mare in vapori puriſſima acqua, non viziata ſenſibilmente da alcuna di quelle ſoſtanze, che l' eſperienza dimoſtra eſſere nell' acqua del mare contenute.

Perchè dunque le noſtre diſtillazioni, comunque regolate a dolce fuoco, e coll' acqua marina preparata eziandio in tanti modi, non ſono mai giunte all' efficacia della tranquilla evaporazione naturale, e a ſomminiſtrarci, come queſta, un' acqua innocente? Come più da vicino imitare la natura in sì fatto magiſtero? Io credo che fatto un profondo eſame così dell' intima condizione dell' acqua marina, come dell' intermezzo che adoperiamo per decomporla, non ſia difficile il riconoſcere perfettamente, onde avvenga che l' acqua ſtillata non rieſca mai baſtevolmente pura. E primamente quanto all' acqua marina è coſa evidente, che mettendo capo nel mare tante acque dalla terra che il racchiude, tante materie depoſitandoviſi da ogni parte, e tanti eſſeri organici avendo in quell' immenſa cratera naſcimento, vita, e ſepoltura, non è certamente ſoſtanza de' regni di natura diſſolubile nell' acqua, o pur anche ſolamente miſcibile coll' acqua, che non poſſa nel mare rinvenirſi. Ma conſiderando anche come accidentale una tal condizione complicata dell' acque del mare, ſiccome quella che non è nè coſtante in tutti i tratti, nè univerſalmente propria di tutte l' acque marine, un fondo nativo di principj coſtitutivi ſuoi proprj par che debba avere il mare, indipendente dagli accidentali e ſtranieri, il quale alla condizione di lui originaria e radicale ſi attenga intimamente. Il fa penſare primamente l' analiſi accurata e capitale del fu Sig. *Bergman* iſtituita ſopra l' acqua marina attinta a 60 braccia di profondità nell' Oceano all' altezza dell' Iſole Canarie e ben lungi dalle coſte (*a*). Due

---

(*a*) Opuſc. Chim. T. I. pag. 194.

ſole nature di ſali dominanti, ch' è coſa notabile, vi trovò diſciolti con un pochino di ſelenite, cioè un ſal marino a baſe di natro, e un ſal marino a baſe di magneſia, e non altro. L' eſſerſi poi trovato (*a*), che il natro e la magneſia fanno parte eſſenziale e nativa degli eſſeri organizzati viventi nel mare, non già accidentale e ſtraniera, come nelle piante marittime, e in altre ſoſtanze di natura, e che un acido marino eſiſte in quegli eſſeri libero, per quanto ſi può giudicare, e in procinto di combinarſi coll' alcali, e con la magneſia dietro alla diſorganizzazione di loro, la cui preſenza è ſtata da me verificata per ſin nelle conchiglie marine da ſecoli ſpoglie de' loro abitatori, non che nelle recentemente tratte dal mare, fa quaſi preſumere, che il fondo di que' principj, che dicemmo, può avere domeſtica ſorgente nel ſeno ſteſſo del mare. Ma altri principj ancora, oltre a' ſali marini, non men di loro proprj e nativi, concorrono a formare l' acqua marina, e a diſtinguerla da tutte le acque minerali della terra. La diſorganizzazione di que' medeſimi viventi, oltre al natro e alla magneſia, contribuiſce pure un fondo di ſaponi animali, direi quaſi originarj, entrando nella compoſizione degli animali anche in iſtato naturale parti oleoſe intimamente unite alle ſaline, e perciò miſcibili coll' acqua, e quaſi alito ſottile inerenti all' acqua marina. Niente di ciò appariſce nelle analiſi, perchè tutto eſala e s' alza co' vapori acquoſi ſotto l' azione del fuoco nell' analizzare l' acqua. Ma non è per queſto men reale la preſenza di sì fatta materia diſciolta per l' acque marine, ſomminiſtrata dalle ſecrezioni, e dal disfacimento infine giornaliero degli animali che vivono e periſcono nel mare, di cui ſarebbe egli carico a ribocco, ſe per una mirabile circolazione, come io penſo, non ſerviſſe ella in gran parte di paſcolo e nutrimento agli eſſeri rinaſcenti. Alle prove addotte per dimoſtrarlo nella Memoria ſopraccitata ne aggiugnerò una qui, che mi pare convincente, e che recentemente ho ripetuto più volte ſull' acqua marina delle Lagune di Venezia. Si faccia a calor naturale ſvaporare una buona quantità di acqua marina,

---

(*a*) Mem. preced. intorno al natro pag. 39.

laſciando che da sè ſi diſſecchi all'aria il ſedimento. Su queſto ſedimento ſi verſi dello ſpirito di vino concentratiſſimo, e il ſi lavi ben bene ſinchè nel vaſo ciò ſolamente rimanga, che non può nello ſpirito diſciorſi, e ſi troverà I.° Che il ſedimento perde alquanto del ſuo peſo, il che nell' acqua che ho detto fu, or più or meno, di tre in quattro venteſimi del peſo che aveva innanzi. II.° Che quello ſpirito che ſe ne carica brucia ſenza laſciare di sè la menoma traccia ſopra un piattello di porcellana. III.° E che finalmente facendola ſvaporare tranquillamente e naturalmente, ciò che reſta è untuoſo al tatto, ſu la lingua ha un che di mucido ed urinoſo inſieme, e meſſo ſu d' una lamina di ferro rovente, tramanda odore empireumatico proprio ſolamente ed eſcluſivamente delle ſoſtanze oleoſe. Fatta pertanto, ſe vuol farſi, aſtrazione, come diceva, dagl' ingredienti e depoſiti ſtranieri nel mare, ſarà ſempre permeſſo di conſiderare un tal fondo di ſali marini, e di materie animali ſaponoſe, come proprio dell'acque marine, e della fiſica condizione di loro, eſſendo elle coſtituite da natura ricettacolo e ſede nativa di que' medeſimi viventi, che, ſecondo tutte le apparenze, il poſſono mantenere, i quali fuor di quel mezzo o non avrebbero vita, o ſe l'aveſſero, non ſarebbero per avventura quello che natura vuole, che ivi ſieno. Ed ecco aperto l'adito onde conoſcere chiaramente, ſe non m' inganno, quali ſoſtanze poſſano volatilizzarſi nelle diſtillazioni dell'acqua marina, e bruttare l' acqua ſtillata neceſſariamente. Mentre la naturale evaporazione ſi opera alla ſola ſuperficie dell'acqua, intatto il reſtante, e ſi fa ella blandamente, l' artificiale all' oppoſito col fuoco ſoppoſto ſi fa dal fondo, e tutta è ſommoſſa ed agitata da calore non naturale la maſſa dell'acqua; e quanto è quella placida e lenta, altrettanto tumultuoſa e rapida è queſta, altrimenti non ſe ne otterrebbe l' intento. Ciò fa comprendere, come nella diſtillazione dell'acqua marina l' intermezzo adopera e ſopra i ſali, e ſopra la materia animale che dicemmo ſottilmente diffuſa per l' acqua del mare. Il ſale marino a baſe di magneſia cede al calore il ſuo acido, com' è facile l' accertarſene coll' eſperienza. Quindi la preſenza perpetua di un acido marino nell' acque marine ſtillate; quindi il creſcere dell' acredine più e più quant' è più avanzata la diſtillazione; e quindi tutti i fenomeni oſſervati dall' *Hales* e prima di lui dal *Marſilli* (*a*), e da altri nello ſtillare quell' acque. Saniſſimo pertanto è ſtato il conſiglio dell' *Appleby* nel cercare di precipitar la terra (*b*) de' ſali marini terroſi con un alcali fiſſo, prima di diſtillare l'acqua marina. Entrando così l' acido marino in combinazione coll' alcali, non è egli più ſeparabile dalla nuova baſe tenaciſſima per ſolo calore.

Rimoſſo è perciò il pericolo di quell' acidamento dell'acqua moſtrato sì dannoſo alla ſalute dall'*Hales*. Ma pure uno ſpirito urinoſo, ſiccome abbiamo veduto, eſala tuttavia nella diſtillazione, e contamina l'acqua diſtillata ne' recipienti. Donde mai queſta nuova infezione inaſpettata? Dopo tutto ciò, che s' è detto qui avanti, ſembra che queſt' alito urinoſo debba attribuirſi alle tenuiſſime materie animali sopraindicate ſparſe per l' acqua, e decompoſte dal calore: alito sfuggito intanto in tutte le analiſi fatte ſinora dell' acqua marina, in quanto non era propoſito degli analiſti il tener conto dell' acqua che ſvaporava, ma che nelle diſtillazioni in queſtione, ove ſi fa caſo e conſerva dell' acqua ſvaporata, ſi rende ſenſibile e manifeſto eſaltandoſi col vapore, e infettando l'acqua, come ce ne accertano le Tranſazioni Anglicane. E tanto per mio avviſo è naturale queſt' effetto, che ſe la ragione e tanti indizj non concorreſſero a perſuaderci dell' eſiſtenza di quelle ſoſtanze inerenti all' acque del mare, queſto caſo potrebbe per avventura farne prova d'ogni eccezione maggiore. Non ſenza fondamento ho quindi creduto (*c*), e credo, che da queſto ſapone animale in diſſoluzione per l' acque marine tragga origine l' apparenza bituminoſa, ch' elle hanno, e che a tanti ſagaciſſimi uomini ha ſempre impoſto ſino a queſti ultimi tempi, in cui non s' è mai potuto ſcuoprire atomo di bitume deciſo nè pur nell' acque del mare Aſfaltico, ove pareva che ſe ne annidaſſe in gran copia. Ciò che di animale contengono tutte le acque marine in iſtato ſaponoſo non giunge per verità a un pezzo

---

(*a*) Iſtoria del mare.
(*b*) Tranſ. Angl. Vol. 48.
(*c*) Si legga la Mem. preced. intorno al natro pag. 39.

al carattere di vero e formale bitume. Ma n'è quaſi il germe, ſe così può dirſi, il principio materiale, eſſendo proprietà caratteriſtica de' bitumi il cominciar dall' eſſere materie ſaponoſe. E ſe queſto germe eſiſte in tutte l' acque marine, come non è permeſſo di dubitarne, facile è l' illuſione; anzi, rigoroſamente parlando, è meno fondata l' eſcluſione aſſoluta di qualunque principio bituminoſo dall' acque del mare, che non è ſtata l' illuſione di tutti i tempi andati. E qui ſi comprenda dalla diſcuſſione che ne abbiamo fatto, da quante difficoltà ſia attorniato e premuto queſto graviſſimo argomento. E ſe non poſſiamo darci a credere ragionevolmente, che per impenſata e felice caſualità poſſa venirſi a capo di ſcomporre un magiſtero di natura sì complicato, quanta è mai la vanità de' tentativi ſenza numero che ſi ſon fatti, e ſi fanno tuttora per la purificazione dell' acqua del mare da uomini ſpogli d'ogni principio, onde le novelle del dì, i pubblici fogli, i giornali periodici hanno ſovente occaſione ſtucchevole di parlare!

Della congelazione dell' acqua.

La congelazione dell' acqua è ſtata ſempre riguardata come una delle più belle operazioni naturali da che gli uomini preſero non a fingere, ma a contemplare ciò che natura opera e produce continuamente ſotto gli occhi noſtri. Non è per avventura iſtante di queſta metamorfoſi che non meriti l' attenzione di un filoſofo dal primo velarſi dell' acqua ſino al ſuo intero ghiacciamento. Baſta vedere le memorabili oſſervazioni che vi fecero da prima gli Accademici del Cimento (*a*), e quelle che vi fece poi con incomparabile diligenza il *Mairan* (*b*) per concepire la più alta idea di queſta quanto comune altrettanto mirabile operazione. L' acqua vi ſi comporta come tutti i corpi ſe non ſemplici, poco almeno compoſti, le cui parti integranti, trovandoſi per qualunque cagione ſeparate e in iſtato di fluidità, vengono ri-

---

(*a*) Saggi di naturali Sperienze ecc.
(*b*) Diſſert. ſur la Glace.

meſſe in libertà, comunque ciò accada, di eſercitare la lor mutua tendenza, di riunirſi, e di prender forma ſolida e regolare. In fatti, ſe circoſtanza non ſi opponga, affettano quelle dell' acqua per ogni parte del ripieno di configurarſi a foggia di piume co' fili o laminette coſtituenti un angolo di 60 gr. co' tronchi. E come la ſperienza dimoſtra, che vario di varie ſoſtanze di natura è queſto configuramento sì, che ſembra averne ciaſcheduna uno unicamente ed eſcluſivamente ſuo proprio e peculiare; così è coſa naturale il penſare, e il fatto lo conferma, che qualora s' interpongano principj ſtranieri nel rappigliamento, non può mai perfettamente aver luogo una tale ſimmetrica diſpoſizione delle parti, nè quel configuramento individuo e ſingolare, che dicemmo. Quindi un indizio emana capitale forſe, e, come pare, non equivoco dell' eſſere una ſoſtanza ridotta al ſommo grado di depurazione da ſtraniere interpoſizioni, di cui può l' eſſenza di lei eſſer capace in natura, qualora paſſando dallo ſtato fluido a quello di maſſa ſolida figurata, aſſuma ella la ſua preciſa e determinata configurazione. E queſta è ſenza dubbio l' intima ragione per cui, ancorchè ſi conduca la congelazione dell' acqua con tutta la poſſibile lentezza, e ad onta delle più favorevoli circoſtanze, non ſempre affettano le parti interne del ghiaccio, eſaminato attentamente, una medeſima figura. Se ſi facciano ghiacciare otto libbre di acqua in cui ſieno diſciolti pochi grani di colla di peſce, tutto rieſce confuſo, e ſcompigliato il ripieno del gelo, e tutta ſi riſente la maſſa dell' acqua di queſt' oſpite tenaciſſimo, che non dà luogo alla ſimmetria con cui ſi diſporrebbero naturalmente le di lei parti integranti. Non può pertanto, rigoroſamente parlando, la congelazione dell' acqua confonderſi ſempre con la criſtallizzazione, mentre quella può ſempre aver luogo che che ſia in diſſoluzione nell' acqua, e queſta non può compiutamente verificarſi nel ſenſo inteſo, ſe non ſieno le parti proprie dell' acqua in contatto tra di sè, rimoſſo ogni altro principio di mezzo. Ma ſe è fuor di dubbio, che, poſta anche la preſenza ed interpoſizione di ſtranieri principj nell' acqua, non è caſo propriamente in cui per un convenevole grado di freddo non debba la diſſoluzione rappigliarſi in gelo, che coſa mai accade di que' principj nel ſolidificarſi del loro diſſolvente?

La

La diſſoluzione eſſendo un vero e reale ſtato di combinazione, in cui è rotta l'aggregazione reſpettiva del diſſolvente e del corpo diſciolto affinchè poſſano le parti integranti dell' uno unirſi alle parti integranti dell' altro, ſubito che nel nuovo compoſto vien tolto via uno de' componenti, o le parti di lui tornino ad aggregarſi, in qualunque modo ciò intravenga, naſce vera decompoſizione, la diſſoluzione non ha più luogo, e l' altro componente è in neceſſità di ſepararſi. Così in fatti adopera lo ſpirito di vino concentrato relativamente a molti ſali diſciolti nell'acqua. Infuſo nella diſſoluzione s' impadroniſce dell' acqua, di cui è avidiſſimo, o con cui ha più che co' ſali prevalente affinità, e perciò mancando a' ſali il diſſolvente reſtano abbandonati alla naturale gravità, e precipitano al fondo. Così fa l'evaporazione, che toglie alle ſoſtanze diſciolte l' acqua di diſſoluzione. E così in rigore dovrebbe accadere nell' agghiacciarſi dell' acqua di diſſoluzione, di cui è qui propoſito. O queſta legge operi ſola, o adoperi combinata coll' affinità di aggregazione potentiſſima, che hanno tra di sè le parti dell' acqua, la quale al ravvicinarſi di loro dietro al mancar ſucceſſivo del principio cagione della liquidezza, prevale a qualunque altra affinità di combinazione, ragion vuole, che una tal ſeparazione de' principj ſtranieri ſi verifichi nel rapprendimento dell' acqua in gelo. Ma come finchè l' acqua è liquida, freddata quanto potentemente ſi vuole, queſta precipitazione non può aver luogo, e non ha luogo nè pure allorchè ſia indurata l' acqua, reſtando tutto compreſo nel gelo, non è ſenza fondamento il penſare ch' ella non può verificarſi, che in quel ſolo ed unico intervallo di tempo in cui è quaſi coſtituita l' acqua in uno ſtato di mezzo tra la liquidezza e la durezza. Se dunque ſia iſtantaneo per intenſo e ſubito freddo il paſſaggio dell' acqua dall' uno all'altro ſtato, è coſa evidente ch' è tolto il tempo alla precipitazione de' principj ſtranieri tenuti in diſſoluzione nell'acqua, i quali neceſſariamente reſtano involti nel gelo, e che però quanto men repentino ſarà quel paſſaggio, tanto più favorevole alla purificazione dell'acqua riuſcirà la congelazione. Ma chi non vede che ſe non venga con avvedutezza tolta via immediatamente dopo l' agghiacciamento quella qualunque poſatura, che avrà potuto farſi, ſia permeſſo dire, in queſta criſi dell' acqua, tornano a diſciorſi que' componenti nel gelo ſtrutto riformando la diſſoluzione di prima? Quindi è che nelle ſole mani della natura queſta operazione non può avere tutto l'effetto ſenza i convenevoli ajuti dell' arte, ſeparandoſi i principj ſtranieri per una legge, e riunendoſi ben toſto per un' altra. Se dunque s' intenda rimoſſo il primo ſedimento, e ſoggettato il ghiaccio ſtrutto ad una ſeconda congelazione, chi non vede di nuovo, che riceve l' acqua un ſecondo grado di purificazione, e che così gradatamente ella ſi avvia per altri ed altri ghiacciamenti alla perfetta criſtallizzazione dietro a queſte parziali e ſucceſſive depurazioni? In fatti, eſtimando bene la coſa, poichè un ſolo, come s' è detto, è il momento favorevole per queſta ſegregazione, che che ſi ſepari nell' agghiacciamento dell' acqua, prima e dopo di cui niente egli adopera a favor dell' intento, per moltiplicare sì fatti momenti è d' uopo moltiplicare le congelazioni neceſſariamente. Ma ſe così può procedere la coſa, come porta il diſcorſo, ſembra che queſto progreſſivo depuramento per via di agghiacciamenti poſſa condurre l' acqua all' ultimo grado di purezza, di cui in iſtato di liquore può ella eſſer capace. Veramente ſin qui non è che ragione, che il faccia preſumere a rigore; ma vedremo in appreſſo, che non è un tale diſcorſo nè pure ſmentito dall' eſperienza, per quanto può aggiugnere alla preciſione mentale l' operare ſempre imperfetto delle noſtre mani.

Applicazione di queſti principj alla dolcificazione dell' acqua del mare.

Ecco per avventura un caſo non abbaſtanza atteſo, in cui per vie diametralmente oppoſte viene a capo de' medeſimi effetti la natura. La perfetta criſtallizzazione, e la tranquilla evaporazione naturale dell' acqua ſono patentemente due capitali operazioni eſtreme, le quali convengono inſieme nel diſimpegnare e liberare l' acqua da principj ſtranieri ravvicinandola per oppoſti mezzi allo ſtato di acqua puriſſima. Su queſto principio ho fondato le mie ricerche per la dolcificazione dell' acqua marina. Abbandonando quella di queſte due belle operazioni della natura, che non poteva non eſſere viziata dall' arte, come abbiamo veduto qui avanti, mi ſono rivolto all' altra della congelazione artificiale, in cui l' arte entra per sì poco, e tutta può dirſi naturale. Sembra ſtrano, che non avendovi forſe chi non ſappia, che l' acqua marina perde alquanto di ſua ſalſedine nel congelarſi, non ſiaſi alcuno avviſato giammai di trar profitto da queſto fenomeno, e di tentarne la totale purificazione per una via, ch' era pur indicata dalla natura in qualche modo. Conſiderando ciò che accade tutto dì ne' ghiacciamenti de' vini acquati, delle birre, dell' aceto; nel gelarſi dell' acque impuriſſime nelle foſſe campeſtri, e ne' paduli; nel trovarſi adunato nelle regioni ſettentrionali il ſale nell' acqua marina ſotto il gelo più copioſo che non è nell' acqua marina naturale, non può dirſi certamente, che mancaſſero indizj per internarſi in queſta indagine non ſenza fondamento. Pochi ſecreti di natura dovrebbero reſtarci aſcoſi, ſe tanto ci apriſſe ella di adito, onde penetrarvi, come in queſto. Ad ogni modo non s' è mai ſpinto più oltre l' occhio, inveſtigando ſino a qual ſegno poteva per queſto mezzo inoltrarſi la purificazione dell' acqua del mare. E per certo il verificarſi ella imperfettamente nelle mani della natura, del che s' è veduto qualche ragione qui addietro, ha fatto credere a' Fiſici impropria la congelazione per un tal uopo.

Ma a queſta imperfezione poteva rimediarſi non difficilmente, ſiccome mi ſo a dimoſtrarlo coll' eſperienza. Ho ſcelto per queſt' oggetto l' acqua di mare delle Venete Lagune, che mi ſono procacciato a Verona, e ſegnatamente attinta ne' canali tra le abitazioni di Venezia, onde averla delle più impure e complicate, che poſſa ſomminiſtrar il mare.

Agghiacciamenti dell' acqua marina.

Volendo conoſcere primamente i gradi di freddo più piccoli, co' quali poteva ghiacciar l' acqua marina, tentai col ſemplice gelo naturale di farne rapprendere ſei libbre in un vaſo di vetro nello ſcorſo inverno; ma per quanto mi adoperaſſi non mi riuſcì l' intento nè pur trovandoſi il mercurio nel termometro di *Reaumur* cinque gradi ſotto la congelazione naturale. Preſi dunque a far uſo del ſal marino meſcolato col gelo peſto, e dietro a molte prove variando la doſe di entrambi, oſſervai che, ſtando anche il mercurio tre e quattro gradi ſopra la congelazione nel termometro, con due parti di ſale ſopra quattordici di gelo l' agghiacciamento poteva aver luogo. Egli però non era totale, mentre nel mezzo trovava ſempre un nocciolo di liquore non gelato. La parte ghiacciata era irregolariſſima e rara, come l' hanno oſſervato i dotti Accademici del Cimento. Ma mi conſolai ſommamente nel trovar più ſalſa ſempre, più amara, e più diſguſtoſa al palato l' acqua del nocciolo, che non era quella che traeva dal gelo ſtrutto. E così pure la parte gelata nel fondo del vaſo era più ſalſa aſſai della parte ſuperiore. Queſte due oſſervazioni cominciano ſin da bel principio a indicare col fatto, che nell' atto del gelare prendono a cacciarſi le ſoſtanze ſtraniere contenute nell' acqua marina dalle ſponde verſo il mezzo, come appunto dalle ſponde verſo il mezzo prendono a formarſi i primi filamenti del gelo; e che, come il conchiudemmo col ragionamento, precipita pure al fondo parte de' medeſimi principj ſtranieri indubitatamente nell' agghiacciamento. Ma volli far prova eziandio di un altro eſtremo di freddo prima d' inoltrarmi. Proccurai pertanto l' agghiacciamento con due parti di ſale marino ſopra tre di gelo peſto ottenendo un freddo di 16 gr. ſotto la congelazione, cioè un grado più del memorando freddo del 1709. Il ghiaccio dell' acqua marina riuſcì più compatto e più duro aſſai di prima, ma con ſorpreſa vidi, che nel mezzo reſtava tuttavia un piccolo nocciolo di liquore amariſſimo, e nauſeoſo oltre ogni credere.

Profittando intanto di queſto lume conobbi, ch' era neceſſario preparare un ricettacolo eziandio nel fondo, il quale comunicando coll' altro che e con poco, e con molto freddo trovava naturalmente nel mezzo, riceveſſe in depoſito, e più propriamente in diſſoluzione ciò che ſi ſeparava dall' acqua marina. Quindi ſarebbe ſtato agevole il verſare quella ſalamoja fuor del vaſo, laſciandovi il ſolo gelo, col quale poi ſi ſarebbe potuto procedere alla ſeconda ſeparazione, indi alle altre ſucceſſive col medeſimo artificio ſino alla totale purificazione dell' acqua.

M' avviſai dunque di poſare in appreſſo il fondo del vaſo coll' acqua marina ſopra la ſabbia, e profondarvelo un pochino. L' eſpediente riuſcì a dovere. Forando il gelato alla ſuperficie uſciva il liquore impuro dal vaſo, e vi reſtava il ſolo ghiaccio, cui laſciava ſgelare naturalmente, e tornava di bel nuovo a ſottoporre il gelo ſtrutto all' agghiacciamento. Perchè poi ſeguiſſe la congelazione gradatamente immergeva il vaſo prima nel gelo naturale ſemplice, perchè l' acqua marina ſi freddaſſe, e s' impediſſe il ſalto repentino nell' eſſere immeſſa nel freddo più potente, ove col ghiaccio doveva meſcolarſi il ſale.

Eſperienze con tre parti di ſale ſopra nove e dieci di ghiaccio.

Preparai prima un vaſo di vetro cilindrico graduato, onde conoſcere quant' acqua ſi poneva a ghiacciare, quanto ne reſtava di liquida nel nocciolo e nel fondo, e quanta per conſeguenza ve ne aveva di ghiacciata. Miſurava il liquore con una miſura cubica di metallo avente per lato un pollice veneto. Miſi poſcia a ſvaporare una di queſte miſure, cioè un pollice cubico di acqua di mare, e trovai che il peſo eſattiſſimo del ſedimento ſecco ch' ella ſomminiſtrò fu di grani 23 raccolti con tutto lo ſcrupolo, come termine di comparazione. Ciò importa una libbra ſopra libbre $27\frac{13}{23}$ di acqua di mare, e così pure aſſai da vicino trovò l' *Hales* contenerſi nell' acqua del Mediterraneo verſo l' iſola di Malta, cioè una libbra ſopra libbre $27\frac{3}{10}$ di acqua marina.

PRIMA CONGELAZIONE.

Poſi a ghiacciare cinquantaquattro miſure di acqua marina col fondo del vaſo di vetro poſato ſu la ſabbia. Fatta l' eſtrazione dopo tre ore circa, verſai l' acqua non gelata nel vaſo graduato, e trovai ch' era proſſimamente ventotto miſure. Strutta poi la parte agghiacciata n' ebbi $25\frac{3}{4}$ di quelle miſure creſcenti. Verſai una di queſte miſure d' acqua del nocciolo in un piattello di porcellana, ed altrettanta in altro di acqua tratta da quel gelo ſtrutto. Fatta a dolce calore ſvaporare l' acqua da entrambi, trovai che il ſedimento ſecco della prima era preciſamente di gr. 36, e quello dell' acqua marina ſtata ghiaccio non aveva che gr. $9\frac{1}{4}$ di peſo. Dunque l' acqua del fondo e del mezzo aveva ricevuto gr. 13 di aumento per pollice cubico, mentre l' acqua ſtata ghiaccio aveva perduto gr. $14\frac{1}{12}$ per pollice cubico, i quali ſi erano diſtribuiti pe' 28 pollici cubici che dicemmo. Ecco col fatto verificata la depurazione di quaſi due quinte parti de' ſali ed altro, ch' era nell' acqua del mare con la ſola prima congelazione.

SECONDA CONGELAZIONE.

Poſi ventiquattro miſure di queſt' acqua di prima purificazione, che conteneva gr. $9\frac{1}{4}$ per miſura di ſoſtanza ſtraniera a congelarſi di bel nuovo. Fatto l' agghiacciamento ne' modi indicati, trovai $6\frac{1}{2}$ miſure d' acqua non gelata. Feci pertanto, come prima, ſvaporare una miſura di gelo ſtrutto, ed altra miſura ſeparatamente di quelle $6\frac{1}{2}$ rimaſe liquide. Il ſedimento di queſta riuſcì di gr. $25\frac{1}{2}$, e quello della prima ſtata ghiaccio appena di due grani. Dunque col ſecondo agghiacciamento s' era ſpogliata l' acqua di gr. 7 creſcenti per miſura, e però aveva perduto l' acqua marina in due congelazioni gr. 21 da' gr. 23 di ſtraniero che conteneva in iſtato naturale per miſura: progreſſo notabile, che mi fece conoſcere che la purificazione s' incamminava a gran paſſi. L' acqua era limpidiſſima, e non aveva nè odore, nè colore, nè ſapore che arrivaſſe a un pezzo a quello di prima.

TERZA CONGELAZIONE.

Di nuovo poſi a ghiacciare diciaſſette miſure di queſt' acqua di ſeconda purificazione. Cavata la boccia dal gelo trovai che il liquore del nocciolo era di quattro miſure creſcenti. Poſte pertanto a ſvaporare una miſura di queſto liquore ed una di acqua tratta dalla porzione ſtata gelo, il ſedimento della prima riſultò di gr. $6\frac{2}{4}$, e appena $\frac{1}{2}$ di grano quello della ſeconda. In conſeguenza in tre congelazioni era ridotta quell' impuriſſima acqua marina a non contenere che

$\frac{1}{46}$ per miſura delle ſoſtanze che conteneva in iſtato naturale.

QUARTA CONGELAZIONE.

Feci gelare dieci miſure dell' acqua di terza purificazione, e terminato l' agghiacciamento trovai che l' acqua del nocciolo e del fondo non gelata giugneva appena a $\frac{1}{4}$ di pollice cubico. Svaporata queſt' acqua ſomminiſtrò quaſi cinque grani di ſedimento. Dell' altra una miſura non laſciò ſul piattello ſedimento, che poteſſe apprezzarſi, ma ſolamente un che di untuoſo, un velo che s' attaccava alle dita, mucido, ed acre inſieme ſu la lingua.

QUINTA CONGELAZIONE.

Veggendo che neſſun ſedimento ſenſibile proveniva da queſt' acqua di quarta purificazione, volli accertarmi con un eſperimento ancora, ſe queſt' untuoſità, cui non ſapeva attribuire che alla materia eſtrattiva, di cui ho parlato poco avanti, e che deve nell' acqua de' canali di Venezia trovarſi in grandiſſima copia, più che in quella dell' alto mare incomparabilmente, poteva con una nuova congelazione diminuirſi. Feci pertanto ghiacciare queſt' acqua per l' ultima volta, e tutta per verità ſi rappreſe in gelo; il che fa vedere, che indipendentemente dalle attenzioni uſate reſiſte già per sè l' acqua quanto è più impura al rappigliarſi, ond' è che anche con un freddo di 16 gradi ſotto la congelazione abbiamo veduto rimaſo un nocciolo liquido precedentemente. Traſſi dunque una miſura di acqua dal gelo ottenuto radendolo alla ſuperficie, e la feci ſvaporare. Non ebbi come avanti alcun veſtigio ſalino nel ſedimento, ma un po di unticcio rendevaſi ancora ſenſibile; compreſi però che, come ſe ne ravviſava aſſai men di prima in queſto ſperimento, era inutile il moltiplicare più oltre gli agghiacciamenti per queſt' oggetto, mentre l' acqua era ridotta a grandiſſima purezza, e l' eſperienza indicava che poteva rimuoverſi qualunque traccia anche di queſto ſucidume, ſe l' acqua del mare ne foſſe pregna, come quella de' canali di Venezia, che non può mai eſſerlo generalmente.

Eſperienze con tre parti di ſale ſopra ſei ed otto di ghiaccio.

PRIMA CONGELAZIONE.

Poſi a ghiacciare quaranta miſure di acqua marina poſando, come avanti, ſulla ſabbia il ſondo del vaſo. Fatta la congelazione, e rotto in ſuperficie il gelo, verſai l' acqua non ghiacciata nel vaſo graduato, e la trovai di quindici miſure. Strutta una parte del ghiaccio formato, ne poſi a ſvaporare una miſura, ed altra miſura di acqua del nocciolo, ed ebbi gr. $50\frac{1}{8}$ dal ſedimento di queſta, e ſoli gr. $6\frac{1}{2}$ dall' acqua ſtata ghiaccio. In fatti era amariſſima, e ſommamente ingrata l' acqua, che non s' era ghiacciata nel vaſo. Serbai pertanto due miſure di queſt' acqua di prima purificazione per ciò che vedremo.

SECONDA CONGELAZIONE.

Ripoſi di bel nuovo a ghiacciare il dì appreſſo venti miſure di queſt' acqua marina ottenuta per una nuova depurazione. Fatto l' agghiacciamento, il liquore del nocciolo non gelato era di cinque miſure creſcenti. Poſta pertanto la conſueta miſura e di queſto, e dell' acqua ſtata gelo a ſvaporare, il ſedimento del primo fu di gr. 20 proſſimamente, e di un grano appena quello dell' acqua ſtata gelo. E qui pure ſerbai due miſure di queſt' acqua depurata.

TERZA CONGELAZIONE.

Miſi di nuovo a ghiacciare dieci miſure di queſt' acqua di ſeconda purificazione, e fatta la congelazione, non trovai che due ſole miſure d' acqua non gelata nel vaſo. Fatte, come avanti, ſvaporare ſeparatamente due miſure una di quell' acqua non gelata, ed altra d' acqua ſtata ghiaccio, dalla prima ottenni gr. 6 di ſedimento, e l' altra laſciò ſul piattello l' untume che trovammo precedentemente, ſenza veſtigio apprezzabile di ſedimento ſalino. Serbai anche di queſta due

due miſure, come nelle congelazioni precedenti, e non parendomi neceſſario di ripetere nuovi agghiacciamenti, il cui effetto era abbaſtanza accertato anche per riſpetto al purgare da qualunque untume, e ſucidume l' acqua, m' acchetai de' riſultamenti avuti.

Oſſervazioni ſopra il gelo delle acque ſerbate nelle tre congelazioni precedenti.

Aſſicurato da queſte ſperienze, che per ripetuti agghiacciamenti effettuati nel modo eſpoſto qui innanzi l' acqua marina più impura poteva all' ultimo grado di purificazione ridurſi gradatamente, m'accinſi a fare qualche oſſervazione ſul ghiaccio dell' acque poco avanti riſerbate da farſi ghiacciare contemporaneamente, comparandolo con quello di un' acqua naturale puriſſima, e col primo gelo immediato dell' acqua marina. Voleva riconoſcere col fatto, ſe m' era appoſto al vero penſando che la teſſitura de' geli doveſſe andare ſucceſſivamente accoſtandoſi a quella determinata e coſtante forma, ch' è propria dell' acqua puriſſima, ſola capace di perfetta criſtallizzazione, ſecondo il grado creſcente di purezza acquiſtata nelle congelazioni. Per la qual coſa ripoſi in boccette di vetro ſeparate due miſure d' acqua marina naturale, due di acqua di pioggia raccolta in aria, e feltrata per ſabbia più volte (non volendone che foſſe tocca dal fuoco), e le due miſure ſerbate per ciaſcheduna dell' acque marine di prima, ſeconda, e terza purificazione; e tutte inſieme le poſi a ghiacciare in un medeſimo tino con due parti di ſale ſopra tre di ghiaccio naturale peſto dopo di averle freddate nel gelo naturale, come in tutte le altre occaſioni, per evitare il troppo repentino agghiacciamento. Cavate dal ghiaccio, e rotte le boccette in luogo freſco, mi feci a contemplare con una buona lente ad uno ad uno i ripieni di quelle congelazioni ordinatamente. Ecco le oſſervazioni, che v' ho fatto.

Ghiaccio dell' acqua marina.

Queſto ghiaccio non era molto duro. L' orditura di lui interna era rada, irregolare, e confuſa; pareva fatta a ſcagliuole di talco, e aveva nel fondo intrecciati i fili a foggia di boſcaglia. La ſuperficie del gelo era del tutto piana, e il teſſuto di lui eſteriore era un pò men confuſo dell' interiore.

Ghiaccio dell' acqua di prima purificazione.

Conteneva queſto ghiaccio tuttavia nel ſuo ripieno un teſſuto di ſcagliuole lunghe, e poco larghe; era più duro del precedente, e in ſuperficie cominciava a moſtrarſi un pò rilevato. L' orditura n' era più che prima regolare, e compoſta di fibre ò fila intrecciate con qualche principio di ſimmetria, interrotta per altro di tratto in tratto da pezzetti di ghiaccio informi, e ſenza configurazione.

Ghiaccio dell' acqua di ſeconda purificazione.

Candidiſſimo era queſto ghiaccio, più duro degli altri, e prominente in modo più ſenſibile alla ſuperficie. La teſſitura interna di lui era più fiſſa, e compatta de' geli precedenti. Le ſcagliuole in una parte apparivano diſpoſte a ſtella, e tendenti quaſi ad un centro; in altra formavano come ventagli con fila procedenti da un punto e formanti de' triangoli, con altre ſeganti a luogo a luogo quelle figure triangolari con direzioni parallele alla baſe de' triangoli. Oſſervai, che le direzioni e gl' incrocicchiamenti erano ad angolo acuto coſtantemente, di modo che ſi vedeva manifeſtamente, che l' agghiacciamento affettava una certa regolarità, e le parti integranti dell' acqua cominciavano già a prendere qualche determinata configurazione.

Ghiaccio dell' acqua di terza purificazione.

Come l'acqua era bensì di terza purificazione contata dallo ſtato naturale di acqua marina, ma aveva realmente ſofferto quattro congelazioni, così in queſto ghiaccio ſi fu preciſamente che trovai deciſe più che mai le apparenze di una ſimmetrica configurazione. Appreſſatovi il gelo che teneva da parte dell' acqua di pioggia ſeltrata e pura, or ſu queſto or ſu quello andava paſſando coll' occhio armato per farne confronto. Oſſervai pertanto, che, come in quello di piovana, partivano le laminette da un tronco come rami di abete, o piuttoſto come le eſtremità delle penne degli uccelli, ma con le fila più rade. Altre ſcappavano come tante reſte intorno ad un riccio di caſtagno. E quanto alla direzione delle laminette, o la ſi riguardaſſe relativamente a' tronchi donde elle ſpuntavano, o nella poſizione loro tra di sè allorchè tendevano a un centro, o s' incrocicchiavano inſieme, o formavano de' gruppetti ſeparati, o erano nella teſſitura del ripieno intrecciate ſenza ordine, appariva ella mai ſempre affettare più viſibilmente e più regolarmente che ne' geli precedenti un medeſimo angolo acuto da una parte, o un medeſimo angolo ottuſo dall' altra. Talchè a prendere l'obbietto per ogni verſo e nella candidezza, e nella durezza, e nella ſimmetrica configurazione ſi accoſtava in modo queſto ghiaccio al naturale di pioggia che aveva in confronto ſotto gli occhi, che non pareva mai di acqua marina e sì ſudicia, come quella ond' era tratto poco avanti.

Sperienze ulteriori intorno all' acqua del mare purificata cogli agghiacciamenti, e concluſione.

Veduto de' progreſſi degli artificiali agghiacciamenti dell' acqua marina, e del renderſi più e più pura l' acqua con le ſucceſſive congelazioni, ottimo conſiglio mi ſembrò quello di far ſaggio dell' acqua purificata direttamente. Preſe dunque otto libbre d'acqua di mare le feci ſucceſſivamente ghiacciare ſei volte togliendo via ogni volta la ſalamoja del mezzo e del fondo, come avanti, e freddando prima l' acqua nel gelo naturale, indi mettendola nel gelo peſto meſcolato col ſale, e tutte adoperando le cure, onde parlammo, perchè riuſciſſe pura e ſpoglia d' ogni ſtraniero principio, quanto può eſſere all' induſtria conceduto di ottenere. Ne' ſeguenti articoli ſtanno eſpoſti i cimenti, che n' ho fatto in confronto dell' acqua di pioggia.

I. L' acqua era limpidiſſima, ſenza alcun immaginabile odore, dolce più dell' acqua di pioggia che aveva un pò di aduſto; ma era floſcia non iſcorrevole, e aſſai men vivace dell' acqua di fonte.

II. Peſato in entrambe uno ſteſſo pezzo di piombo con bilancette ſenſibili ad un quaranteſimo di grano, ho trovato che la gravità ſpecifica dell' acqua di pioggia era alla gravità ſpecifica di queſt' acqua marina purificata come 780 a 780 $\frac{1}{10}$.

III. In due vetri cavi terſiſſimi feci ſvaporare naturalmente pari quantità di queſt' acqua, e di quella di pioggia. Se reſtò un po di appannamento ſul vetro contenente l' acqua marina purificata, non reſtò meno appannato l' altro vetro, che pur conteneva acqua di pioggia raccolta in aria, e non di primo recapito.

IV. La ſenſibiliſſima tintura di tornaſole non ſi alterò in queſt' acqua per alcun modo.

V. La ſoluzione di argento non vi fece che diſciorſi, e ſparpigliarviſi, ma non comparve quella bianca mucellaggine che precipita, allorchè l' argento trova qualche atomo di acido marino con cui combinarſi nell' acqua.

VI. Il nitro mercuriale fatto a freddo produſſe qualche nube biancaſtra, che precipitò poi con un' apparenza di coagulo, ma non in forma deciſa caſeoſa, come fa ſe ſi trovi acido marino nell' acqua. Ma dove può eſſervi minuzia di materia eſtrattiva ſottilmente inerente, e ſingolarmente marina, una tal precipitazione è equivoca, perchè ha luogo anche in queſto caſo, come può ognuno accertarſene coll' eſperienza.

VII. Ma nè pure il zucchero di Saturno precipitò in polve bianca, come avrebbe fatto ſe foſſe ſtato nell' acqua preſente briciolo di ſal marino, o acido marino libero, che non poteva.

VIII. Il ſapone di Venezia vi ſi diſciolſe facilmente e perfettamente.

IX. Ma non volendo far uſo d'altri reattivi fuor di propoſito, poſſedendo qualche copia di queſt' acqua purificata, per ultimo cimento preſi a berne il mattino a digiuno per più giorni. Per quanto attentamente mi applicaſſi a conoſcere ſe incomodo alcuno me ne derivaſſe per avventura, non mi ſono mai accorto, nè riſentito di alcun effetto diverſo da quello che ſuol produrre in me l' uſo giornaliero dell' acqua comune. Dopo tutto queſto pare non irragionevole il penſare, che ſe venga per qualche tempo aereggiata l' acqua marina purificata a dovere per queſta via, tenendola eſpoſta all' aria in vaſi aperti di poco fondo, ſia ella per acquiſtare quella vivacità che le manca, come dicemmo nel primo articolo. In fatti come non ſarà ella ſpoglia in ſommo grado di quell' aria puriſſima, che avviva le acque correnti, e che potrebbe dirſi, come pel fuoco, per gli animali, e per tanti altri magiſteri naturali, così per l'acqua, neceſſaria e vitale, dopo tante congelazioni? Egli è di fatto, che in queſta operazione, nel ravvicinarſi le parti integranti dell'acqua tra di sè, reſta anche l'aria eſcluſa nell'aggregazione come ogni altro corpo ſtraniero, o compreſa negl' interſtizj sì, che toſto che il può, ſi ſprigiona in bolle da ogni canto. Queſto ſprigionamento accade principalmente in que' medeſimi intervalli di tempo favorevoli allo ſgombramento dell' altre ſoſtanze, di che s' è parlato, in cui è l' acqua in uno ſtato di mezzo tra la liquidezza e l' induramento. E certamente può dirſi che queſta eſpulſione di aria ſi faccia in quell'atto più potentemente, che in ogni altro modo conoſciuto. Imperciocchè ſi diſtilli una certa quantità di acqua, la ſi purghi nel vuoto, la ſi faccia paſſare quanto ſi vuole pel mercurio, per la ſabbia finiſſima, operazioni tutte efficaci nel privar d' aria l' acqua, e finalmente la ſi faccia congelare. Se ſi abbia l' avvertenza di ſpezzare preſtamente il gelo in bricioli sì, che prenda la conſiſtenza del ſorbetto, ſi vedrà sbucar aria in bolle da tutte le parti, e in tanta copia, che niente ſi direbbe aver operato que' mezzi tutti uniti per iſpogliarnela: quindi lo ſtato di languore in che trovo ridotta l' acqua marina purificata con tante congelazioni ſucceſſive, e la neceſſità di aereggiarla per molto tempo che ho indicato. E non ſi creda già ch' io caratterizzi ſenza fondamento per aria puriſſima l' aria del gelo, chiamandola quaſi vitale per l' acqua, come pel fuoco, e per gli animali; imperciocchè ſe ſi ſperimenti a cacciar l' aria atmosferica dalla capacità di un fiaſco, la cui metà ſia occupata da acqua ſtillata, e adattando poſcia ſtretta alla bocca di lui una veſcica floſcia ſi faccia due o tre volte gelare l' acqua e ſgelare ſucceſſivamente, ſi troverà che l' aria della capacità e quella che ſi raccorrà nella veſcica, ch' io chiamo aria del gelo, è pura puriſſima a tutte le prove quanto può eſſerlo quella che ſi trae dal nitro o dal precipitato roſſo. Del che baſti qui l' eſſerſi ſolamente fatto cenno per non divertirſi dal propoſito più del dovere.

Terminiamo pertanto queſta Memoria col ridurre a ſommi capi le conſeguenze, che poſſono dalle coſe eſpoſte legittimamente dedurſi, e con una breve digreſſione intorno a' ghiacci naturali del mare.

I. Tutto conferma il detto qui innanzi, che la perfetta criſtallizzazione dell' acqua fa per vie oppoſte quello, che fa la tranquilla evaporazione, liberando natura per entrambe l' acqua da' componenti ſtranieri, e ravvicinandola allo ſtato di acqua pura.

II. In conſeguenza mettendo un' acqua minerale avente in diſſoluzione ſtranieri principj a ghiacciare coll' avvertenza di freddarla per gradi, e di preſervare l' infima parte della maſſa dal rappigliamento, accade nelle ſtrette che riceve l' acqua dal freddo all' intorno, e nell' atto ſegnatamente del perdere che fanno le materie incorporate l' acqua di diſſoluzione, che quella parte, cui non è interdetto il movimento, ſi ſepari e vada a depoſitarſi ov' è tuttavia mantenuto nell' acqua lo ſtato di liquidezza.

III. Tolta via queſta parte liquida dal vaſo, e fatta ſtruggere la parte ghiacciata, ſe torni queſta a ghiacciare con le ſteſſe avvertenze di prima, torna a ripeterſi un altro momento favorevole per una nuova ſeparazione, e ricorre altra parte di materia, ch' era rimaſa nell' acqua, e dove il liquore non è gelato sì, che più pura di prima rieſce l' acqua rappreſa in gelo.

IV. E così via via procedendo con altre ed altre congelazioni, governate ſempre a quel modo, più e più l' acqua ſi purifica, quanto più ſi moltiplicano i momenti proprj per un tal uopo, cioè quanto più ſi accoſta l'acqua ad una perfetta criſtallizzazione, ch' è il caſo di ſomma purezza di cui l' acqua è capace.

V. Le ſperienze iſtituite ſull' acqua marina de' canali di Venezia, complicata quant' altra mai dell' acque minerali conoſciute, fanno ampia fede dell' efficacia di un tale proceſſo, col mezzo del quale ſi perviene a dolcificare perfettamente queſt' acqua, che ha ſempre eluſo tutti gli artificj adoperati ſinora, fuorchè la ſpontanea evaporazione, ch' è di natura al par di queſto. Il fedele andamento delle progreſſive depurazioni oſſervato ſcrupoloſamente, la corriſpondenza a' gradi di purezza creſcente nella configurazione de' ghiacci più e più tendente alla regolarità ſimmetrica e conoſciuta delle criſtallizzazioni dell' acqua puriſſima, i ſaggi fatti ſull' acqua finale depurata, col ratificare i principj ſu' quali è fondato il metodo, richiamano a favore di lui l' attenzione de' Fiſici.

VI. Se clima o ſtagion fredda il permetta, gli agghiacciamenti naturali dell' acqua marina al ſereno non hanno biſogno che di eſſere guidati dalla mano degli uomini ſenza alcuna ſpeſa. E ſe non poſſano ottenerſi che con le congelazioni artificiali, non va perduto briciolo di ſale da meſcolarſi con la neve, o col ghiaccio naturale, tutto ricuperandoſi il ſale dal gelo ſtrutto coll' evaporazione. Quindi nelle regioni fredde, ove abbonda il ghiaccio marino, una parte del ghiaccio diventa ſtrumento onde purificar l' altra preſtamente, e ſicuramente.

VII. Ma non ſolamente ſu la terra può trarſi vantaggio dal proccurare al ſereno il naturale ghiacciamento, e righiacciamento dell' acqua marina per dolcificarla, ma nelle navigazioni eziandio ſul mare. E oltre alla naturale anche l' artificiale congelazione può venire in acconcio ſu' vaſcelli con appoſite conſerve di ghiaccio naturale recate, direi quaſi, per lievito di nuovo gelo da rifarſi ed aumentarſi coll' acqua marina in navigando. E non è impoſſibile eziandio, che ceſſi un dì anche la neceſſità di caricarſi di ſimili conſerve, qualora rieſca di rendere praticabili in grande i modi conoſciuti di far gelo ſenza gelo, o altro ſe ne trovi men di loro diſpendioſo e di facile eſecuzione; argomento di nuova indagine pe' Fiſici nobiliſſimo, atteſa l' applicazione che può avere quant' altra mai utile agli uomini nelle lunghe navigazioni anche nelle ſtagioni e regioni calde, or poi che a pure congelazioni è ridotto il miſtero del dolcificare l' acqua marina perfettamente.

VIII. E chi non vede, che ove la ſola ſtatè è ora opportuna alla raccolta del ſale marino nelle ſaline, anche nel verno può d' ora innanzi operarſi la ſeparazione del ſale, qualor venga ne' quadri evaporatorj introdotta a ghiacciare l' acqua marina nelle lunghe notti vernali, e ſi raccolgano le ſalamoje del fondo, ove precipita e ſi aduna aſſai più della metà del ſale tenuto in diſſoluzione nell'acqua ſecondo le noſtre ſperienze, traendo anche dal freddo un profitto giornaliero non atteſo?

IX. Non eſſendo poſſibile, che l' acqua del mare lungi dall' abitato, e dalle coſte poſſa giammai contenere il ſucidume dell' acqua de' Veneti canali, non è da farſi attenzione a quel qualunque appannamento de' vetri che nelle evaporazioni all' aria laſciava l' acqua noſtra purificata, il che non ſarebbe accaduto coll' acqua attinta in alto mare. Ma in ogni caſo, come ho potuto purificare perfettamente un' acqua contaminata da abbondante copia di colla di peſce, feltrandola per ſabbia dopo due ſole congelazioni, materia animale che ha preſa tenace più di ogni altra ſull' acqua; così può eſſer queſto il mezzo ſicuriſſimo onde liberarſi da ogni ſcrupolo, ſe ſi dubitaſſe che gli agghiacciamenti ripetuti non aveſſero con tutte le altre materie eſcluſo anche ogni minuzia eſtrattiva. Eſſendo ella, ſe pur poteſſe rimanervene, ſotto forma ſaponoſa, e però più ſoſpeſa nell'acqua che diſciolta, propriamente e rigoroſamente parlando, la ſabbia è il feltro più acconcio che poſſa immaginarſi per ſepararla dall' acqua, al cui effetto non arriva mai carta ſugante, e nè pur la bollitura conſigliata da molti. L' uſo intanto che ho fatto per molti giorni io medeſimo dell'acqua de' canali di Venezia dolcificata col metodo eſpoſto, ſempre a digiuno ſenza il più piccolo incomodo, quando i ſaggi ſuggeriti dalla Fiſica

per

per riconoſcere la purezza di un' acqua non baſtaſſero, decide per certo dell' innocenza ſua con prove di fatto.

X. E per torle finalmente d' intorno il languore che s'è detto, la poca ſcorrevolezza, i difetti di tutte le acque comuni non battute da lungo tempo, e proprj eziandio del gelo ſtrutto d' acqua puriſſima, le quali divengono floſcie ed inette a rammollire i più teneri cibi (*a*), l' eſpediente dell' aereggiarla lungo tempo sì, che s' impregni d' aria, e ſi ravvivi come la miglior acqua di fonte, è efficaciſſimo, giacchè in dolcezza, purezza, e leggerezza non cede queſt' acqua a quella di pioggia, ſiccome abbiamo veduto.

De' Ghiacci naturali del mare.

S' è provato, quanto può eſſerlo nella Fiſica, dietro alle moltiplici ſperienze deſcritte in queſta Memoria, che il primo agghiacciamento dell' acqua del mare, tuttochè regolato coll' arte, condotto per gradi, e diſpoſto in guiſa che a' componenti ſtranieri reſti luogo a ſepararſi e depoſitarſi fuor del ghiaccio, non è baſtevole nè a diſſalarla perfettamente, nè a purgarla d' ogni materia eſtrattiva; è provato, quanto può eſſerlo nella Fiſica, che il rappigliamento in gelo dell' acqua del mare, naturale e ſpontaneo, non giunge mai che a ſpogliarla in parte de' ſuoi componenti. E come negli artificiali agghiacciamenti accade per eſperienza, così ne' naturali deve intravenire, che quella porzione di componenti, che ſi ſepara nelle ſtrette che dà all' acqua il freddo, ſi traſporti in quella parte ove più tarda a rappigliarſi l' acqua, eſſendo ſucceſſivo non ſimultaneo per ogni parte l' agghiacciamento artificiale o naturale, ch' egli ſia. Quindi nell' artificiale congelazione in vaſi, ove il freddo è applicato tutto all' intorno, la congelazione procedendo da ogni canto verſo il mezzo, quivi è la parte più tarda a ghiacciare, e quivi, come s' è veduto, ſi fa appunto depoſito de' componenti cacciati dalle ſponde. E quindi all' oppoſito ne' naturali ghiaccia-

---

(*a*) Muſſchenbroek Introd. ad Phil. nat. §. MDXIV.

menti dell' acqua del mare, ove il freddo è propriamente applicato alla ſuperficie eſterna, la congelazione facendoſi dalla ſuperficie in giù, verſo il fondo propriamente de' laſtroni di gelo ſi è che dee farſi depoſito, più che in altra parte, de' componenti che ſi ſeparano dall' acqua marina. Poſti queſti pochi ed or fatti incontraſtabili principj, di molti fenomeni potremo rendere ragione adeguata, i quali hanno dato luogo a ſentenze diſcordi men per errore, che per confuſion di fatto. E primamente parlando de' laſtroni, che vengono dalle coſte dell'Ollanda, e vanno galleggiando pel mare, trovati perfettamente dolci dal *Boyle*, dal *Bartholino*, e dal *Reyhero*, ſi ha tutto il fondamento di credere che appartengano in origine a' fiumi, cioè ad un' acqua perfettamente dolce. In fatti a chi non è nota l' immenſa copia di ghiacci galleggianti, che recano nelle vernate al mare tanti fiumi di grandiſſima portata, che vi metton ſoce da quelle coſte. Un ghiaccio naturale perfettamente dolce par che non poſſa dirſi ghiaccio d' acqua marina che non ſi dolcifica altrimenti alla prima ed unica congelazione, ſe le ſperienze noſtre fatte e ripetute con tutto lo ſcrupolo meritano fede. E forſe da fatti conſimili non ben depurati hanno tratto motivo di penſare il *Kircher*, il *Borichio* ed altri autori, che l' acqua marina ſi dolcifichi in ghiacciando, mentre non fa, come or ſappiamo di certo, che perdere una parte del ſuo ſale in un primo agghiacciamento, e non ſenza cura eziandio preparato e diretto. D' onde mai dunque i monti di ghiaccio galleggianti ne' mari ſettentrionali dell' Europa, e dell' America, di cui è dolciſſima l' acqua? E' vero che nella deſcrizione de' viaggi del *Marthens*, del *Vood*, e d' altri è detto avervene nella Baja di Hudſon, e nella Groenlandia di ſalſi, del che qui appreſſo; ma per aſſerzione d' altri navigatori, della cui fede non è chi poſſa dubitare, è trita notizia che ſmiſurate e altiſſime moli di ghiaccio dolciſſimo galleggino pure in que' mari. Quand' anche voglia accordarſi, che il fondo originario di queſt' iſole ſia di ghiaccio fiumale, ove la coſta ſia da grandi fiumi interſecata, l' altezza notabile ch' elle hanno di 100, 200, e fin oltre a 500 piedi ſopracqua (ſenza far conto della parte immerſa, ch' è maggiore di gran lunga della parte ſopraſtante, com' è facile a deſumerſi dalla gravità ſpecifica del gelo dolce che ſta a quella dell' acqua marina di quelle latitudini, ſiccome ne ho fatto eſtimazione, come 80 a 93) obbliga a ricorrere ad altre cauſe per la loro ſormazione. A me dunque pare che la naturale e locale condizione di que' climi, ove cade neve dal cielo il più dell' anno, poſſa riſolvere la queſtione ſenza obbietto. Contro il fatto neſſuno può dubitare, che coſta a coſta non ſi diſtendano in que' mari grandiſſimi laſtroni di ghiaccio marino, indipendentemente dal dolce, che può formarſi alle foci de' fiumi, ove ve n' abbia, i quali tratto tratto ſi fendono con orribile fracaſſo, come il teſtificano i viaggiatori, ſi ſtaccano dalle ripe, e vengono nelle maree ondulati e inoltrati qua e là pel mare ſenza legge. La neve cadente vi ſi ammonticchia ſopra ben preſto, lega e commette i più proſſimi, e fa di loro il primo ſtrato fondamentale della fabbrica. Le nevi ſucceſſive ingroſſano ed alzano il lavoro, e così via via creſcendo la maſſa e indurandoſi più e più pel freddo fitto ed inſiſtente, que' monti ſmiſurati vengono a formarſi galleggianti pel mare, che i navigatori trovano poi dolci, com' eſſer debbono originariamente. Se non poſſiamo additare alcuno ſpettatore di fatto che allo ſtaccarſi de' laſtroni fondamentali che dicemmo dalle terre, e al primo inoſſarſi dell' iſole in queſtione abbia fatto attenzione, le circoſtanze deſcritteci da' viaggiatori coſtretti ad aprirſi il varco tra di loro co' navigli poſſono far fede, che l' aumento ed ingrandimento di loro vien dalla cauſa, che adducemmo. Veggaſi tra gli altri il viaggio al Sud dell' intrepido *Cook*. Mentre n' era circondato per ogni parte ben oltre i 60 gradi di latitudine auſtrale, e trovavale ſopracqua dolci a ſegno, che ne faceva proviſione l' equipaggio per ſua bevanda, veniva quaſi continuamente neve dal cielo, e infieriva il freddo oltre miſura sì, che aveva ſotto gli occhi l' atto ſteſſo del creſcere e ricreſcere dell' iſole cotidianamente, ove a ſtruggimento alternativo non dava luogo il rigore perſiſtente del freddo. Ma come ſi accorda la dolcezza dell' acqua di queſt' iſole di ghiaccio, ch' è di fatto, con la ſalſedine d' altre infinite che nuotano nella Groenlandia, nella Baja di Hudſon, nella nuova Zembla, e di cui era per avventura copia inſieme con le dolci ne' mari Auſtrali, ch' è pur di fatto (*a*)? Non ſi conſondano i fatti. La condizione di queſt' iſole di ghiaccio tuttavia ſalſugginoſo è altra da quella dell'iſole dolci. Quelle non ſono che ſmiſurati laſtroni di gelo d' acqua marina ſolitarj e vergini, ſe così può dirſi, cioè non ancora impaſtati di neve e cacciati ſott' acqua, mentre l' altre ſon fatte, come s'è detto, di neve ſoprappoſta a neve ſtivata a grande altezza, e ghiacciata ſucceſſivamente, e i laſtroni che hanno ſervito loro di primo fondamento più non appariſcono, trovandoſi ſott' acqua profondamente ſommerſi. Quindi la dolcezza in queſte del gelo ſopraſtante, e il ſalſugginoſo dell' altre, in cui è tutto il ſale che rimane nel ghiaccio dell' acqua marina dopo un primo ed unico naturale ghiacciamento. Se la mole non le diſtingueſſe le une dall' altre, e ſingolarmente l' altezza, ch' è tanto notabile, e non può che nelle dolci verificarſi a quel ſegno, la condizione ſalſa, oltre alla forma, le caratterizza abbaſtanza, perchè poſſano diſtinguerſi in ogni caſo. Il non eſſerſi mai conoſciute a ſondo le mutazioni che può indurre l' agghiacciamento nell'acqua marina, e il limite di loro, non ha permeſſo che queſti ed altri tali obbietti foſſero abbaſtanza dilucidati, ed ha piuttoſto dato luogo, com'è naturale, a moltiſſimi equivoci. In fatti ſopra le oſſervazioni mentovate di *Marthens*, e di *Vood* s' è indotto a giudicare l'illuſtre *Mairan* (*b*) che neſſun intaccamento per avventura ſi faccia alla ſalſedine dell' acque marine coll' agghiacciamento, giugnendo a credere, che quel po' di dolce, che ſi trovaſſe alla ſuperficie de' ghiacci natanti, provenga *par la ſecretion que ſe fait alors de l'eau douce & de l' eau ſalée, comme nous l' avons remarqué des parties ſpiritueuſes du vin expoſé au grand froid*. Altri poi dalle maſſe nuotanti di gelo dolce hanno conchiuſo (*c*), che la naturale congelazione dolcifica perfettamente l' acqua marina, che non è vero. In fatti ſe queſti Autori, dice il *Mairan*, aveſſero preſo da queſti ghiacci la

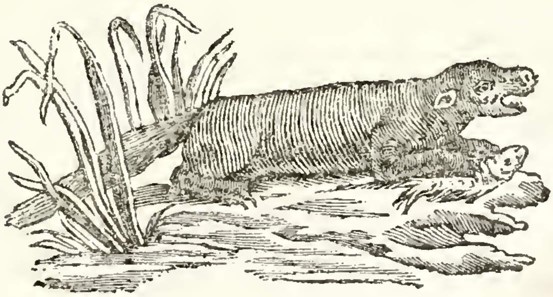
---

(*a*) Fred. Marthens voy. dans la Baje de Hudſon, & Suppl. aux voy. de Vood, & de Marthens.

(*b*) Diſſ. ſur la Glace Par. II. Sect. III. Cap. VI.

(*c*) Kircher Mund. Subt., Borichius in Act. Haſnienſibus, Bartholinus de nivis uſu medico.

parte, ch' è ſott' acqua, *ils auroient trouvé que la glace en etoit auſſi ſalée que la mer même*. Ma ſe il ghiaccio ondeggiante pel mare bensì dolce, ma non marino, può indur qualcuno in errore, il ghiaccio marino indubitatamente non dolce può a vicenda dar luogo ad un' oppoſta illuſione. Imperciocchè è vero, che nel ghiacciamento dell' acqua marina quella parte ſalina, che può ſepararſi, precipita a fondo, eſercitandoſi, come dicemmo, l' azione del freddo dalla ſuperficie in giù in un liquore continuo, del che ſi profitta ſu le coſte de' mari ſettentrionali, al dir di *Walerio*, per cavar ſale copioſamente dell' infima parte de' ghiacci marini; ma non è poi da conchiuderne contro il fatto, che l' agghiacciamento niente adoperi ſull' acqua marina, e molto meno che poſſa naſcere ſeparazione, non già di ſale, ma d' acqua dolce dalla ſalſa nel ghiacciare dell' acqua marina, come ne' liquori ſpiritoſi. I fenomeni di queſti ghiacciamenti or ſon fatti abbaſtanza paleſi e familiari dietro alle ſperienze precedenti per non laſciar più oltre confondere i fatti, e impedire gli equivoci in avvenire. Per il che non è forſe ſenza frutto, che ci ſiamo alquanto intertenuti in queſte dilucidazioni. Tutto è prezioſo nella Scienza naturale, ove traluca per grande ventura in che che ſia raggio di chiara verità.



SAGGIO

SOPRA L' EFFICACIA DELL' OLIO DI OLIVO NELL' ARTRITIDE VAGA.

Del Sig. Giovanni Antonio Marino Medico
Primario dell' Oſpitale della SS. Annunciata di Savigliano
in Piemonte.

PRESENTATA

Dal Sig. Vincenzo Malacarne.

§. I.

QUanto ſia grave morbo l'Artritide Vaga (*a*) quanto frequente, come difficile a curarſi, facile a rinnovarſi, lungo, doloroſo, atroce, crudele, e ſpeſſe fiate perſeverante ſino all'eſtinzione del ſenſo, e della vita, e chi v' ha fra medici che nol ſappia? Oh quante fiate, ancorchè metodicamente trattato oltrepaſſa i quaranta giorni! Quante da acuto, ſiccome comparve, ſi traſmuta in cronico! Avvi forſe mezzo per raddolcirne almeno i dolori, ſenza riſchio di fiſſarlo, e perpetuarlo coll' opio? E chi oſa mai vantarſi d'aver ſempre potuto prevenire la ſua metaſtaſi dalla prima ſede nelle parti eſterne ai viſceri vitali?

§. II.

Io m' occupava in ſimili penſieri già da molti anni, poichè me ne ſomminiſtrava occaſione frequente di oſſervare la

---

(*a*) Con queſto nome io intendo, e comprendo tanto l'artritide reumatica della claſſe 1.ª ord. 1.° gen. 1.° quanto il reumatiſmo artritico della ſteſſa claſſe gen. 3.° ſpec. 3.ª deſcritti nella *Notologia metodica* di *Franceſco Sauvages*.

moltiplicità degl' infermi di tale ſpecie di malattia, che ſovente occorrono nell' Oſpedale che io reggo, ed aveva ben cento volte chiaramente, e coſtantemente veduto riſolverſi, e giudicarſi più o meno prontamente queſta malattia in ogni ſeſſo, in ogni età, e da qualunque diſſimile principio derivante, ſempre mai col mezzo di criſe fatta per ſudore, per l' orina, e per li ſeceſſi concotti. Avvertii che il ſudore ſolo la mitigava, che l' orina ora abbondante, ora ſtrangurioſa, talvolta la raddolciva nell' aſprezza, ma che ſempre mai ſi ſuperava pienamente dalla ſopravvenuta diarea biloſa, e tormínoſa (*a*).

§. III.

Cercava perciò da lungo tempo, ed andava eſplorando come, e con quali mezzi ſi ſarebbe potuta diſporre la natura a queſte ſpecie di criſi più ſicuramente, e più facilmente di quanto ſin allora m' era ſtato conceſſo praticando i varj metodi da' più eccellenti autori propoſti, ma invano; quando che inopinatamente m' avvenne d' avere ritrovato a caſo ciò, che collo ſtudio, e l' arte ottenuto non aveva fino allora. Una oneſta donna maritata (*), d'età d' anni trenta, d' ottimo aſpetto, temperamento, e ſanità, gravida nell' ottavo meſe, mi ſi offre a curare a dì 20 del meſe di Gennajo del 1765. Queſta era detenuta da febbre remittente accompagnata da dolori vaghi artritici, e ſpecialmente nel ginocchio ſiniſtro, con tumidezza edematoſa del medeſimo. Erano di già traſcorſi quattordici giorni ſenza che dai replicati ſalaſſi, dall' uſo degli aperitivi ſaponacei, dai ſudorifici, fomentazioni, empiaſtri ricevuto aveſſe il menomo ſollevamento, poichè ſebbene la febbre foſſe notabilmente ſminuita, i dolori articolari incrudelivano. Le ſeccie erano reſtie fino dal quarto giorno della malattia ai cliſteri, ed ai purganti; le orine per lo contrario uſcivano limpide, e crude in copia, nè il ſonno conciliare ſi poteva col mezzo de' narcoti-

---

(*a*) *Nihil æque propemodum hoc morbo adfectos adjuvat, atque tormina, vel quocumque modo fluens alvus. Lommius Obſ. Med. lib. 2. pag. 273 de arthritide.*

(*) La Signora *Maſſa* nata *Tomatis*

ci; i polſi ſi erano reſi fiacchi, e celeri creſcevano i dolori, ed eravi minaccia d' aborto. Mi venne a mente di eſplorare la virtù demulcente dell' olio de' ſemi di lino, ma appena propoſto fu ricuſato dall' inferma, ed in ſua vece ſi eſibì di trangugiare una mezza libbra d' olio vergine d' olivo di Nizza che riteneva in caſa. Glie lo concedo; era la ſera, e ſe la inghiottiſce ripartitamente in più volte prima che s' inoltri la notte. Queſta ne ſegue tranquilla con placido ſonno non interrotto da dolori; e ſull' aurora del XVI le ritrovo i polſi molli, naſce un blandocraſſo ſudore univerſale, il quale viene accompagnato da orine ſtentate, frequenti, parche, torbide, craſſe, e laterizie, ſeguitate da feccie biloſe, pultacee, e ne ſono gli ſcarichi preceduti da tormini del ventre. Sulla ſera appena ſi ſa paleſe un reſiduo di febbre, il ginocchio appena dolente al movimento compariſce notabilmente meno gonfio, ſi ripete la ſteſſa doſe d' olio nel giorno XVII, e per due volte alternativamente ancora ne' giorni ſeguenti con lo ſteſſo felice eſito; onde ſi trovò perfettamente riſanata l' inferma, ed in pochi giorni potè felicemente ſgravarſi nel giorno XII di Febbrajo, ed al parto ne ſeguì un ottimo puerperio ſenza che ſino ad ora abbia mai più ſofferta recidiva dell' artritide.

§. IV.

Non erano paſſati tre meſi da queſta prima felice inaſpettata guarigione, che mi ſi preſentarono tre ſoggetti in un medeſimo tempo aſſaliti da artritide. Queſti erano tre ſoldati del Reggimento la *Regina Dragoni* ritirati nel loro militare Oſpedale, di cui era allora Chirurgo maggiore il Sig. *Provenzale*. Di queſti il primo, giovane aſſai, era appena il primo giorno che incominciava a lagnarſi di dolori agli articoli, e con qualche tumidezza de' medeſimi; il ſecondo già da tre giorni ſe ne lagnava, e tutti due erano aſſaliti dalla febbre; il terzo poi languiva già da tre meſi, tormentato da crudeli dolori vaganti da una articolazione all' altra, per cui ſebbene variamente medicato da diverſi valenti Profeſſori, divenuto era quaſi impotente al moto, magro, ſquallido, ſenza ſonno, e triſto. Intrapreſi di tutti tre nello

ſteſſo

ſteſſo tempo la cura, e dopo due ſalaſſi al primo, ed uno al ſecondo, premeſſa in tutti una conveniente purga, preſcriſſi ad ogni uno mezza libbra d' olio d' olivo da prenderſi ſulla ſera, la quale fu ripetuta per ben quattro volte di due giorni l' uno, alternativamente, e con sì fauſto evento che mediante le ſteſſe critiche evacuazioni d' alvo, d' orina, e di ſudore, nel nono giorno, ceſſata la febbre in que' due, che n' erano ſtati affetti, liberi d' ogni dolore, atti ad ogni movimento, ſenza che ſia comparſa orma di recidiva, eccettuatone qualche paſſaggiero riſentimento all' occaſione delle notabili, e ſubite variazioni dell' atmosfera, perſettamente riſanati ſi reſtituirono al loro dovere.

§. V.

Un ſervo (*a*) d' età d' anni 40 nel meſe d' ottobre dell' anno 1767 era da più meſi travagliato da doloroſa artritide vaga cronica ſenza febbre; e queſti ſebbene di robuſto temperamento egli foſſe, per la tumidezza delle articolazioni rigide e dolenti, ſvogliato, privo d' appetito, incapace di ſufficiente ſonno la notte, era divenuto inetto al ſuo officio: aveva ſino allora inutilmente tentato di ſollevarſi dal male col mezzo di lunghi, attivi, ed in apparenza adattati rimedj, onde io lo miſi all' uſo dell' olio d' olivo nella forma ſopra memorata, ed in termine di quattordici giorni trovoſſi felicemente riſanato.

§. VI.

Nell' anno 1768, e nel meſe di ottobre giacevano immobili in due letti ſeparati due uomini d' età virile, e di temperamento atletico (*b*) crudelmente travagliati da acuta artritide vaga; la quale in ambidue ſpecialmente s' era fiſſata alle ginocchia con tumore infiammatorio. Il primo, il

---

(*a*) *Lagnaſco* ſervo in caſa dell' Illuſtriſs. Sig. Marcheſe *Taffini* d' Acceglio.
(*b*) *Giovanni Roſſo* falegname, e *Bordigone* Facchino.

quale (premeſſi tre o quattro ſalaſſi, ed una purga antiflogiſtica) ſi aſſoggettò all'uſo, e metodo indicato dell'olio d'olivo, nel decimo ottavo giorno trovoſſi libero da ogni tumidezza, e dolore, ſolo reſtandovi l' inerzia, e la debolezza al movimento. Il ſecondo, che per ragione di avverſione innata all' olio, lo rifiutò, ſebbene trattato metodicamente giuſta il metodo di *Sydenamio*, e di *Uxamio*, appena dopo quattro meſi di rimedj continuati fu in caſo di abbandonare l' Oſpedale, e reſtituirſi al travaglio.

§. VII.

Una vergine d' anni quattordici, allora (*a*) non ancora menſtruata, già da qualche meſe clorotica, afflitta da frequenti emicranie, con apparente tumidezza d' abdomine ſino dalla ſua infanzia, fu ſorpreſa nel giorno 18 del meſe di febbrajo dell' anno 1769 da febbre acuta accompagnata da fieriſſimi dolori alle articolazioni de' piedi con tumidezza, i quali di poi vagarono, ed infeſtarono ſucceſſivamente preſſo che tutte le articolazioni per fino delle vertebre del dorſo, e del collo. Premeſſi replicati ſalaſſi giuſta le indicazioni, e purgazioni, e cliſteri, coll'uſo di due libbre d'olio d'olivo interpolatamente bevuto a quattro oncie per volta, e d' un linimento da me (*) praticato, e ripetuto più volte ſopra il tumore dolente, ai due del meſe di marzo ſuſſeguente libera dalla febbre, appena riſentiva qualche dolore nel movimento, ſicchè potè paſſeggiare ſenza appoggio per la camera, e ſul fine del meſe uſcire di caſa. Queſta ſteſſa donzella alcuni anni dopo ſoffrì una recidiva di tale malattia: era io allora trattenuto in caſa da infermità, onde fu curata da un mio collega con altra non iſprezzabile maniera,

---

(*a*) La Signora *Roſa Gheid*.

(*) La ricetta del linimento balſamico, di cui io mi ſervo per raddolcire, e diſſipare i tumori, e dolori artritici qualora attaccano il tronco, la quale non trovai in alcuna delle farmacopee a me note, e che ſi conſerva nel noſtro Oſpedale, ſi è la ſeguente. „ Rc. Thereb. venet. libb. 2. „ Ceræflavæ libb. 3. mir. eleſt., & „ aloes ſeccotr. aa. onc. 3. maſtic. & „ olib. aa. onc. 1. & ſemis. Contuſa „ quæ contundi debent indantur omnia in retorta vitrea Loricata, ex „ arenæ igne gradatim aucto balſamum elice „.

ma languì per meſi fra dolori, e tumidezze articolari prima di riſtabilirſi in ſanità.

§. VIII.

Sul principio del meſe di marzo nell'anno ſteſſo 1769 fui chiamato a viſitare un uomo d' età d' anni 40 (*a*), il quale giaceva immobile in letto trattenutovi da acuta febbre, e da artritide vaga atrociſſima già da otto e più giorni ſenza avere ricavato alcun ſollievo da quattro ſalaſſi, e da molti altri rimedj ordinatigli da un altro Medico. Lo determinai con grande ſtento a bevere alcune oncie d' olio d' olivo, e gli feci ungere alcuni luoghi più dolenti col linimento menzionato; ne ricavò un notabile ſollievo, ma non potè indurſi a continuarne l' uſo, ſia perchè ripugnava la natura ſua all' olio, ſia perchè ſi trovò ſuperata la febbre. Fu queſti dappoi trattato per ben due meſi continui con vario metodo, e con molte medicine, ma appena trovoſſi in forze a potere laſciare l'Oſpedale ai 25 di maggio ſuſſeguente ancora obbligato di ſervirſi delle ſtampelle per ſoſtenerſi.

§. IX.

Una donna cachettica quadragenaria moleſtata (*b*) da due meſi da vaga artritide ſenza febbre, per cui ſoffriva continue vigilie, ai 22 di maggio dell' anno ſteſſo a mia perſuaſione bevette quattro oncie d' olio d' olivo, che non le promoſſe alcuna evacuazione, e laſciolle nauſea ſino all' indomani; nel qual giorno le ordinai un emetico, che bene purgolla per vomito, e per ſeceſſo con notabile ſollievo, e dormì nella notte ſuccedente. Ai 25 preſe di nuovo una doſe d'olio, per cui ſvanirono le tumidezze, ed i dolori vaghi, reſtandogliene un ſolo fiſſo alle coſte ſpurie, che fu ſuperato col linimento ſopra deſcritto; riſveglioſſi l' appetito da lungo tempo perduto, ed in breve ricuperò le forze, e la ſanità.

(*a*) *Tavella*.
(*b*) *Onoria Piana*.

§. X.

Un' altra donna d' età d' anni trenta (*a*) dopo un puerperio mal condotto fu aſſalita da febbre bilioſa, alla quale s' aggiunſe una vaga artritide doloroſiſſima. Era queſta trattata da un Medico mio amico, e che un tempo fu mio diſcepolo (*), col quale aveva più volte fatta menzione dell' efficacia dell' olio d' olivo in tale malattia, per lo che lo propoſe per ben due volte in conſultazione con altro Medico chiamato a ſollievo dell' inferma, ma per ben due volte fu rigettata la propoſizione, e fu preferto il metodo antiflogiſtico del *Sydenamio* promettendoſene una felice ſicura guarigione fra il termine di giorni quaranta. Ma l' inferma irritata da dolori, e ſtanca di tollerarli, allettata dal più pronto ſollievo promeſſole dal primo col mezzo dell' olio, dopo alcuni giorni ſi determinò ad intraprenderne l' uſo, e continuarlo. La qual coſa fu con sì proſpero ſucceſſo, che nel decimo terzo giorno trovavaſi libera e dalla febbre, e dai tumori, e dal dolore, ſenza che ſiale ſucceduto mai più nulla di morboſo. Partecipommene egli l' oſſervazione ſua prima, nella quale ſollecitamente notò la virtù anodina dell' olio, per cui di leggieri i dolori ſi aſſopirono, e le permettevano placido il ſonno, la diaforetica, che moſtravaſi con un continuato blando madoro della pelle, e l' alterante critica tanto nelle orine che, di limpide ſiccome comparivano in principio, s' erano colorite, e deponevano un marcioſo ſedimento, quanto nelle feccie fatteſi pultacee, giallaſtre, e copioſe.

§. XI.

Giaceva in letto da venti giorni, inchiodatovi da atrociſſimi dolori artritici vaghi ai piedi, alle mani, ed alle gi-

---

(*a*) *Maddalena Alladio*.

(*) Il Sig. Dottore *Provenzale* già da alcuni anni aggregato al Collegio di Medicina della Regia Univerſità di Torino, e Medico della caſa Reale.

nocchia, un Religioſo mio amico (*a*), per ſollevarlo dai quali s' erano propoſti, e praticati numeroſi rimedj da varj Medici, che lo viſitavano, ſenza vantaggio alcuno. Viaggiando io mi fermo accidentalmente nel Convento in cui dimorava, e lo veggo. Propongo il mio metodo, che s' accetta, e s' intraprende nel momento medeſimo, ed io parto. Nel terzo giorno al mio ritorno già lo trovo paſſeggiante per la camera.

§. XII.

Cento e più conſimili eſempj di pronte, e felici cure io potrei quivi aggiugnere operate in ogni ſtagione, in vario clima, in ogni età, in diverſo ſeſſo, e temperamento, ſe foſſe d' uopo, che per brevità tralaſcio, e riſtringomi ad aggiungerne due ſoli, per li quali viene provata l' efficacia dello ſteſſo rimedio nelle recidive, ed una terza oſſervazione, la quale chiaramente dimoſtrerà nello ſteſſo ſoggetto quanto prevalga il metodo mio ſopra ogni altro.

§. XIII.

Il primo caſo di recidiva, che mi avvenne, fu in un ſoggetto giovane atletico (*b*), il quale nell' anno 1771 ſorpreſo da gagliarda febbre accompagnata da atrociſſimi dolori artritici vaghi, prevj ſei ſalaſſi, l' applicazione di numeroſe coppette tagliate ſul dorſo, e leggieri purghe, in meno di quattordici giorni col mezzo rammentato trovoſſi libero, e guarito. Ma abuſando del ſuo ſtato pochi giorni dopo eſpoſtoſi incautamente all' atmosfera fredda, ricadette nella febbre, e ne' tumori, e dolori articolari. Lottò fra queſti mali inutilmente praticando varj adattati rimedj, finchè ripetuto l' uſo dell' olio prontamente ſe ne ſentì liberato.

(*a*) Il Mto. R. Padre *de Aſti* di Vigone Maeſtro di Teologia Agoſtiniano.

(*b*) Mr. *Faletti* allora guardia del Corpo di S. M. il Re di Sardegna.

§. XIV.

Ecco il ſecondo. Trovavaſi crudelmente travagliato da fiera artritide vagante, con tumore ne' piedi, nelle ginocchia, nelle mani, e ne' gomiti da più d' un meſe nella città di Cuneo ſul finire dell' inverno un giovane (*a*) Cavaliere mio amico, ſenza che ſollevamento alcuno ſi ſentiſſe da una farraggine di rimedj appreſtatigli. Io gli aveva fatto ſuggerire per mezzo del ſuo fratello l' uſo metodico dell' olio, ma ne fu impedito da chi lo curava. Diſpettatoſene queſti, e recatoſi in Cuneo lo induſſe a tollerare con grave incomodo il viaggio per trasferirſi in Savigliano, lo che fu accettato, ed eſeguito colle maggiori poſſibili cautele. Qua giunto principiò l' indomane ad uſare l' olio, e dopo d' averne bevute due libbre in tre giorni, nel quarto potè diſcendere dal letto, e per eccesſo di contento, fece alcuni paſſi a miſura di ballo con una zitella di caſa. Abusò egli del ſuo felice ſtato, s' eſpoſe all' aria fredda, ed umida di notte tempo, e fu di nuovo aſſalito dalla febbre, e dai dolori con tumore ſpecialmente in un ginocchio, ma con due libbre d' olio in pochi giorni per ſempre liberoſſene.

§. XV.

Aveva ſofferta in Torino una artritide vaga reumatica acuta un mio amico di giovane età (*b*), ſono ormai alcuni anni, la quale fu metodicamente curata da un valente Profeſſore; penò tuttavia alcuni meſi prima di potere abbandonare la camera, e ſentiane le reliquie doloroſe durante tutto l' inverno ſuſſeguente. Ricadette nella ſteſſa malattia nella ſtate dell' anno 1783, e mediante l' uſo dell' olio giuſta il metodo indicato, in pochi giorni trovoſſi interamente guarito ſenza reliquia di male.

(*a*) Il Sig. Cavaliere di *Maſſangy* Ufficiale nel Regimento della Regina Fanteria.

(*b*) Il Sig. D. Akami Prefetto del Collegio delle Regie Scuole di Savigliano.

§. XVI.

Volli ſperimentare ſe così fauſtamente ſuperare ſi poteva il reumatiſmo ſemplice, ſia che ſpontaneamente, e primitivamente attaccaſſe le braccia, o le diramazioni del nervo iſchiatico nelle coſcie e nelle gambe, e piedi, o qualunque altra parte ſenza tumore; oſſia che il reumatiſmo ſuccedeſſe all' artritide. Lo ſperimentai negl' inſulti di podagra, e di gonagra, ma non ne ottenni mai più, che una leggiera diminuzione de' dolori, quantunque oltre il tempo, e la doſe conſueta continuato. Tentai ſimilmente il paragone dell' olio de' ſemi di lino con quello d' olivo, ma ſenza frutto; ed ultimamente per un villano robuſto, che ricoveroſſi nell' Oſpedale, già eſſendo ſtato da più di due meſi travagliato da fiera artritide vagante per ogni articolazione, a lui feci prendere in doſi ripartite più libbre dell' olio di lino infruttuoſamente, dovetti ricorrere a quello d' olivo, col mezzo del quale in due ſettimane fu egli in caſo di laſciare l' Oſpedale, e recarſi al ſuo tetto intieramente guarito.

COROLLARII.

1. Dalle eſpoſte oſſervazioni riſulta che l' olio d' olivo preſo internamente giuſta il metodo additato premeſſa la ſoddisfazione delle indicazioni, che ſi preſentano, ſi è il più pronto, il più ſicuro, ed efficace rimedio nell' artritide vaga reumatica.

2. Che in uno ſteſſo tempo compiſce le veci di rimedio anodino, diaforetico, e purgante.

3. Che guariſce mediante criſi apparente.

4. Che conviene egualmente in ogni età, in ogni temperamento, in ambi i ſeſſi, in ogni ſtagione.

Onde preferire ſi debba con giuſta ragione ad ogni altro medicamento in queſta malattia, e poſſa meritare il nome di *Specifico* della medeſima.

Agiſce forſe l' olio d' olivo nel corpo umano in certa data quantità introdotto rettificandoſi così vantaggioſamente per mezzo de' filtri, pe' quali paſſa; per mezzo degli umori co' quali s' aſſocia, che così purificato, e ſpogliato d' ogni aliena craſſa ſoſtanza, perduta ogni fiſſità poſſa appiano, e liberamente penetrare nelle cellette del teſſuto adipoſo? Coll' olio contenuto in tali cellule avrà ſicuramente una grandiſſima affinità, ed ivi ſi renderà capace, ed atto a ſciorre le particelle della ſoſtanza, che compone il fermento artritico, dalla congeſtione delle quali ne naſce il tumore, ed il dolore, onde reſe ſcorrevoli, e forſe aſſimilate ed alterate, atte divengano ad eſſere più facilmente traſportate, e cacciate per le ſtrade congruenti delle eſcrezioni dell' alvo, dell' orina, e del ſudore. Quanta affinità poſſa avere l' olio dai vegetabili ſpremuto con l' olio animale, s' impara ſpecialmente dalla ſagaciſſima analiſi fatta di quello d' olivo dal chiariſſimo, ed eſimio Sig. *Vincenzo Pozzi* pubblicata nel Volume ſeſto pag. 75 e ſeg. dell' Accademia dell' Inſtituto di Bologna, nel fine della quale, e nell' ultima ſperienza conſta che l' olio ſi riduſſe a forza di rettificazioni ad una pellucidità, e limpidezza tale, che emulava l' acqua, ſenza veſtigio di fiſſità, e che quell' olio adoperato col mezzo di ripetute fregagioni ſopra il carpo d' una mano affetto da ribelle torpidezza, lo riſtabilì nel ſuo priſtino ſtato di ſenſitività, e di moto. Ved. il luogo citato, con tutto il dilicato proceſſo analitico degno d' ogni lode.

CAUTELE, ED AVVERTIMENTI.

I.

Sempre che l' artritide ſarà accompagnata da febbre, e che i polſi al tatto ſi manifeſteranno pieni, e duri, e maſſimamente ſe il ſangue eſtratto comparirà cotennoſo, ſi dovrà premettere il ſalaſſo, e replicarlo largamente, e prima d' intraprendere l' uſo dell' olio, e nel tempo ſteſſo che già ſi prende, qualora l' indicazione ſi preſenti.

II.

Non ſi deve intraprendere l' uſo dell' olio ſe prima il canale inteſtinale non s' è ſgombro con adattato purgante, ed il il ventricolo, ſe occorrano nauſee od altro indicante, votato con blando emetico; e l' uno, e l' altro s' avranno a ripetere qualora le nauſee, e la lingua fecciosa non s' emendaſſero conſecutivamente a' primi.

III.

Premeſſo il purgante, o l' emetico, ed intrapreſo l' uſo dell' olio, quando i ſeceſſi non ſi rendono facili, io ſoglio aggiungere ad ogni doſe d' olio una dramma di ſale comune, e con eſſo meno nauſeante diviene l'olio bevuto, e lubrico ſi rende l' alvo; oppure fo praticare cliſteri incitanti il ſeceſſo.

IV.

L' olio d' olivo deve ſciegliersi recente, puro, non rancido, e ſe ſi può avere di quello conſervato in bottiglie, o fiaſchi. La doſe (ſebbene ſtabilire non ſi poſſa eguale in ogni caſo) mi riſulta però dalle numeroſe oſſervazioni, che non debbe eſſere minore di due libbre preſe a doſi ripartite di quattro oncie caduna nello ſpazio di due, od al più di tre giorni. Sono però qualche volta neceſſarie le tre libbre, e più per vincere un morbo antico, e ribelle, che la prudenza del Medico curante ſaprà regolare.

V.

Debbeſi avvertire, che qualora l' artritide dalle articolazioni ſi porta con pericolo ai muſcoli del torace, del collo, del dorſo, o dell' abdomine inducendo diſpnéa, e toſſe, mi ſono felicemente ſervito per riſolverla del linimento del balſamo vitale deſcritto nella nota del §. VI. o del balſamo Anodino di *Guidone*.

VI.

Il vitto deve eſſere tenuiſſimo in ogni caſo di *pireſſia* compagna dell' artritide, cioè di ſoli brodi di vitello alterati con erbe ſaponacee, ed alquanto più pieno ſarà qualora l' artritide non ſia febbrile, ma cronica, e lenta; ed allora conſiſta in pochi vegetabili miſti di carni animali tenere, e poco vino ſi bea.

VII.

I leggieri dolori reſidui, e le debolezze delle articolazioni, qualora oltrepaſſano un certo tempo proporzionato alla intenſità, e lunghezza del morbo precedente, lo che accade pur qualche rara volta, eſigono per ſuperarli o l' uſo delle terme, o l' *inſolazione*, a' quali ajuti una ſol volta in tanto numero di cure m' avvenne d' eſſere ſtato obbligato di ricorrere.

VIII.

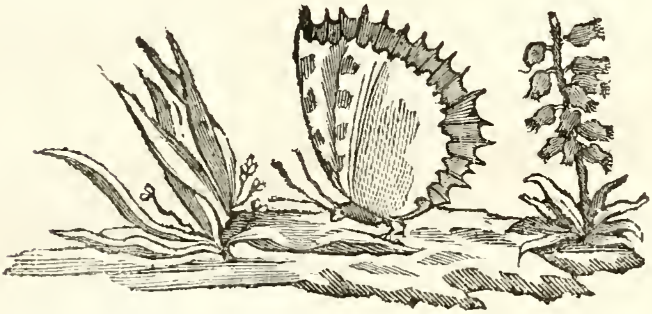
Dall' uſo interno dell' olio per più giorni continuato, in tanta quantità, ſebbene in molti ſiaſi ſuſcitata nauſea, giammai però non ho veduto naſcere veruna pertinace debolezza di ventricolo, nè le conſeguenze d' un appetito proſtrato, ſiccome da molti ſi teme.

IX.

Siami lecito d' aggiugnere una oſſervazione. Ebbi a notare in alcuni, e ſingolarmente ne' giovani, e negli uomini ſalaci, che l' olio preſo in così egregia doſe in sì breve tempo, il quale ſuole quaſi ſempre produrre teneſmo di veſcica con ſollievo de' dolori articolari, ha in alcuni indotta una ſpecie di moleſta tentigine con priapiſmo, la quale ſi è ſempre mai calmata in un ſol giorno mediante bevande copioſe nitrate, ed emulſioni.

§. X.

Debbo ſoggiugnere, che non ha guari m' incontrai in due caſi ſingolari, ne' quali trovai l' artritide ribelle all' uſo metodico dell' olio d' olivo. Il primo fu in una vecchia forſe ottuagenaria ſoggetta di già a replicate recidive , ed in cui rimanevano palpabili nodoſità antiche nelle articolazioni dei carpi. Il ſecondo fu in un ſoggetto giovane bensì, e che per la prima volta ne era attaccato , ma complicata era l' affezione artritica colla ſifilide, e forſe da queſta dipendente. In ambidue però ſe l' olio non ha totalmente ſuperata la malattia , non mancò tuttavia di calmare in gran parte l' acutezza del dolore , e di ſminuire notabilmente le tumidezze articolari.



SOPRA ALCUNI FENOMENI

DE' FOSFORI BOLOGNESI NE' DIFFERENTI FLUIDI AERIFORMI.

Del Sig. CONTE MOROZZO.

DA lungo tempo nutriva fra me il penſiere di eſaminare i fenomeni della luce del foſforo di Bologna ne' differenti fluidi aeriformi, e conſiderando queſto fenomeno come una vera, quantunque debole, infiammazione, penſava che queſte ſperienze potrebbero riuſcire molto intereſſanti ſia per riconoſcere nuove proprietà di queſti differenti fluidi aeriformi, ſia per meglio riſchiarire i fenomeni della foſforeſcenza di queſta pietra.

Trovandomi nella ſcorſa primavera in Bologna, e avendo avuto più volte occaſione di diſcorrere con quei Signori dell' Iſtituto (*) della loro pietra foſforica, il Sig. Dottore *Camillo Galvani* mi regalò alcuni pezzi di detta pietra, ed una quantità di foſfori da lui preparati, accompagnando queſto ſuo dono di un dotto ed intereſſante libretto da lui pubblicato ſopra la pietra Bologneſe. Mi trovai perciò in caſo d' intraprendere le progettate eſperienze, le quali avendomi dato luogo a molte intereſſanti oſſervazioni, le reputo non indegne della pubblica luce.

La pietra foſforica Bologneſe fu definita dal Generale *Marſigli* una materia *gipſea* (*a*), e da *Valerio* fu claſſificata ne' geſſi ſotto il nome di *ſpathum gypſoſum cryſtallizatum*. Da Margraff è detta *gypſum ſpathoſum*, da Cronſted *marmor metallicum*, da Kirvan *baroſelenite*, da Bergman *ſpathum ponderoſum*; il quale ſpato peſante impropriamente fu da alcuni anche chiamato ſpato geſſoſo o ſelenitoſo.

(*) Mi ſi permetta, che qui renda una pubblica teſtimonianza di gratitudine verſo que' Signori dell' Iſtituto, che sì gentilmente mi hanno favorito.

(*a*) *Comment. Bonon.* I. pag. 184.

La pietra Bologneſe non ha gran durezza, è molto peſante, non fa efferveſcenza veruna cogli acidi prima d' eſſere calcinata in contatto co' carboni. Il Sig. *Macquer* crede doverſi definire ſpato peſante ſelenitico.

Dopo le belle ſcoperte di *Bergman* e di *Scheele*, credeſi queſta pietra della natura degli ſpati peſanti, cioè a dire un compoſto di terra peſante coll' acido vitriolico ſopraccaricato di flogiſto (*a*).

In queſte pietre alcune volte la terra peſante non è pura, ma è penetrata o dal petrolio, o è frammiſchiata con geſſo; viene allora chiamata da *Cronſted*, *lapis hepaticus*, per cauſa dell' odore di fegato di zolfo, che eſſa manifeſta.

Non eſſendo l' oggetto di queſta mia Memoria di dare un' analiſi di queſta pietra, ma ſolo di eſporre l' eſperienze da me fatte coi foſfori preparati colla medeſima, e ciò diſpenſandomi da ulteriori ricerche ſopra la ſua natura, paſſerò ad eſporre la maniera con cui ſi preparano detti foſfori.

Si riduce la pietra in polvere impalpabile, indi impaſtandola con bianco d' uovo allungato con acqua, ſe ne ſanno dei pezzi rotondi di circa un pollice di diametro, i quali lentamente fatti ſeccare ſi mettono poi a calcinare fra mezzo a' ſtrati di carbone per lo ſpazio di tre ore circa (*b*).

I foſfori, di cui mi ſono ſervito ne' varj eſperimenti, erano di peſo mezz' oncia circa.

Ripoſi un pezzo di foſforo in una boccetta di criſtallo riempita d' aria atmosferica, ed un ſimil pezzo in altra boccetta (*c*) ripiena d' aria deflogiſticata ricavata dal nitro; li eſpoſi entrambi alla luce del giorno per quattro in cinque minuti (*d*); indi fattili portare in una camera oſcura, dove ſtava cogli occhi chiuſi da alcun tempo, vidi ſplendere di viviſſima luce quello che era rinchiuſo nell' aria deflogi-

---

(*a*) La pietra di Bologna, eſpoſta allo ſpecchio uſtorio, ha manifeſtato un odore penetrante di zolfo. Vedaſi il Diz. di *Macquer*.

(*b*) Si conſulti il citato libro del Dott. *Galvani* al cap. IX. delle varie preparazioni della pietra Bologneſe.

(*c*) Queſte boccette di cui mi ſerviva erano della capacità di una libbra d' acqua diſtillata.

(*d*) Fu oſſervato che queſti foſfori riſplendono di luce più viva quando ſono eſpoſti fuori del contatto de' raggi ſolari.

ſticata, e molto minore oſſervai eſſere la luce del pezzo riposto nell' aria comune.

Un pezzo di fosforo ripoſto in una boccetta aperta, ed un altro in una boccetta chiuſa col ſuo turaccio, ambe le boccette ripiene d' aria comune, furono eſpoſti alla luce, ed eſaminati in luogo bujo; non oſſervai differenza veruna nella luce fosforica (*a*).

Un pezzo di fosforo chiuſo nell' aria ſtata flogiſticata da un carbone acceſo divenne molto meno lucido, che nell' aria comune.

Due pezzi di fosforo chiuſi l' uno nell' aria fiſſa ricavata dalla terra calcare coll' olio di vitriuolo, e l' altro nell' aria deflogiſticata, di viviſſima luce queſto era lucente, quando l' altro appena moſtrò una debole luce.

Laſciato quello nell' aria fiſſa per 24 ore, eſpoſto quindi alla luce, ed oſſervato, trovoſſi appena ombra di luce; laſciato ancora queſto fosforo per 24 ore nell' aria fiſſa, eſpoſto di nuovo alla luce, ſi moſtrò privo affatto di fosforeſcenza.

I pezzi di fosforo, che ſi laſciano per alcun tempo nell' aria fiſſa, prendono un odore penetrantiſſimo di ſegato di zolfo.

Tolto un pezzo di fosforo dalla boccetta ripiena d' aria fiſſa, ed immerſo in una boccetta ripiena d' aria puriſſima deflogiſticata, e dopo 24 ore eſpoſto alla luce, vidi che il fosforo aveva ripreſo molta luce; non deggio per altro ommettere, che giammai la ſua luce non fu così vivace come nello ſtato naturale, e molto meno aſſai ſe foſſe ſtato ſempre nell' aria deflogiſticata.

Un pezzo di fosforo ripoſto in una boccetta ripiena d' aria infiammabile, ricavata dal ferro coll' acido vitriolico, eſpoſto ſecondo il ſolito alla luce per alcuni minuti, parve luminoſo, ma con luce più debole che nell' aria comune, più viva però che nell' aria fiſſa. Laſciatolo nella boccetta per 24 ore parve pure luminoſo, e così pure ſe ve lo laſciava

---

(*a*) Per conſervare lungo tempo la fosforeſcenza di queſta pietra calcinata, provò il Dott. *Galvani* a chiuderla ermeticamente in un globetto di criſtallo, ed oſſervò che la luce di queſti fosfori non era notabilmente diminuita.

per alcuni giorni, ſempre era queſto riſplendente quantunque di debol luce .

Avendo dopo 24 ore eſaminata l' aria infiammabile , con mia ſorpreſa trovai che alcune volte più non era infiammata dalla candela acceſa , e che queſta vi ardeva come nell' aria comune; e l' aria divenne ottima per la reſpirazione animale, come vedremo in appreſſo.

Il fosforo, che reſtò in queſt' aria, divenne verdaſtro aſſai.

Un pezzo di fosforo rinchiuſo nell' aria nitroſa ricavata dal ferro coll' acido nitroſo, eſpoſto come gli altri alla luce per 10 minuti, moſtrò una deboliſſima luce, che ſvanì in pochi ſecondi. Conſervato queſto per 24 ore nella boccetta, ed eſaminato anche nelle prime ore , non ſi manifeſtò più lucente ; aperta la boccetta , con ſomma mia maraviglia non ſi videro vapori rutilanti per la comunicazione coll' aria atmosferica , nè meno ſi ſentì odore d' acido nitroſo .

Queſto fosforo fu intonacato di una ſoſtanza verde chiaro-giallaſtra, la quale ſembrava zolfo. Con un coltellino ne ſtaccai alcuni grani, i quali meſſi ſopra un ferro rovente mi dimoſtrarono eſſere un compoſto di zolfo e di ſal nitro.

I pezzi di fosforo , che reſtarono più di 24 ore dentro l' aria nitroſa, quantunque nuovamente eſpoſti alla luce, all' aria aperta più non ripreſero fosforeſcenza veruna , e queſta non potei altrimenti proccurarla, che col calcinarli di nuovo fra mezzo a ſtrati di carbone.

Le rapportate eſperienze ci ſanno vedere , che i fosfori ſplendono più o meno vivamente ſecondo la qualità de' fluidi aeriformi in cui ſono introdotti , e che ſeguono la ſteſſa legge delle altre ſoſtanze combuſtibili, le quali ardono di viviſſima luce nell' aria deflogiſticata , e ſi ſpegnono nell' aria fiſſa, nella nitroſa, e nella flogiſticata ; accendono queſti in vero l' aria infiammabile, indi ſi ſpegnono; qui all' incontro la debole fiamma del fosforo non è atta ad accenderne l' aria, ma continua queſto a riſplendere ſenza accenderla.

Il celebre Prieſtley nelle molte ingegnoſe ſperienze da lui fatte ſopra le differenti ſpecie d' aria non mancò di oſſervare , che un pezzo di fosforo di Kunkel meſſo nell' aria acida vitriolica, nell' aria nitroſa, e nell' alcalina, non s' infiammò, nè diè luce veruna . Sappiamo all' incontro che ſcintillante e viva ſi è la luce d' un pezzetto di fosforo, che s' introduce nell' aria deflogiſticata, e che l' occhio non può reggere allo ſplendore del ſuo lampeggiamento. Che ſe ne' primi non vi fu diminuzione d' aria, poichè non ſeguì infiammazione, qui all' incontro la diminuzione fu molto conſiderabile, e l' aria divenne flogiſticata, poichè vi fu vera combuſtione.

Lo ſteſſo non ſuccede, come abbiamo oſſervato, nei fosfori compoſti colla pietra Bologneſe, ne' quali quantunque la loro luce ſia prodotta da una vera infiammazione, queſta eſſendo così debole, rieſce perciò inſenſibile la diminuzione, che queſti producono nelle arie atte a mantenere la fiamma, e non abbiamo ſtrumenti ſenſibili a ſegno di marcare queſte piccioliſſime variazioni (*a*).

I ſorprendenti fenomeni, che ho oſſervato nell' aria infiammabile, e nell' aria nitroſa, dove ſtettero rinchiuſi alcun tempo i fosfori, mi fecero conghietturare che queſti fluidi aeriformi erano cangiati di natura: cercai dunque d' indagare le nuove proprietà di queſti fluidi dopo che ſono ſtati alcun tempo in contatto con detti fosfori.

Il che ho eſeguito eſaminando queſti fluidi aeriformi co' tre mezzi ſeguenti.

1 Colla fiamma di una candela.
2 Coll' eudiometro.
3 Colla durata della vita animale.

Sebbene abbia trovato ſpeſſe volte incerto il primo, e molto fallace il ſecondo, qualora però i loro riſultati combinino

---

(*a*) Intrapreſi pure alcune ſperienze col piroforo di *Homberg* introdotto ne' diverſi fluidi aeriformi, ma avendo perduta molta della ſua attività il piroforo da me impiegato, credei opportuno prima di proſeguire dette ſperienze di preparare io ſteſſo il piroforo, variando anche l' ordinaria preparazione, e ſeguendo il metodo del Dott. *Bowlis* rapportato da *Prieſtley*, ciò che ſinora non ho potuto eſeguire.

Si è da preſumere per altro che i riſultati di queſte ſperienze ſaranno conformi a quelli ottenuti col fosforo di *Kunkel*, ed a quelli della pietra fosforica Bologneſe, con quelle modificazioni per altro dovute alla maggiore o minore intenſità nella combuſtione.

Halles e *Prieſtley* già ſperimentarono gli effetti del piroforo nell' aria comune, e queſta ne fu diminuita e flogiſticata.

no col terzo, il quale ho ſempre conſiderato come il più ſicuro mezzo, credo che ſicuri ſi potranno conſiderare i riſultati ottenuti.

Siccome le ſperienze, ch'io paſſo a deſcrivere, hanno una ſtretta conneſſione con molte altre da me fatte, così per non ripetere molte delle coſe dette, prego il corteſe lettore di dare una ſcorſa a due mie Memorie, l' una ſopra la reſpirazione animale nell' aria deflogiſticata, la quale trovaſi nel Giornale di Fiſica (agoſto 1784), e l'altra ſopra alcune ſingolari eudiometriche oſſervazioni ſopra l' aria deflogiſticata nella quale è morto un animale, e queſta trovaſi negli Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino (per gli anni 1784 e 1785).

Avanti di paſſare alle ſperienze, mi pare neceſſario di dare una corta notizia dell' eudiometro di cui mi ſono ſervito, acciocchè meglio poſſa ognuno ripetere a ſuo talento queſt'eſperienze, o concedere quel grado di certezza alle mie.

Un tubo di criſtallo di 18 pollici d' altezza, e di un pollice di diametro, diviſo in miſure eguali alla capacità della boccetta, di cui mi ſervo per introdurre le diverſe qualità d' aria nel tubo, forma lo ſtromento.

Ognuna di queſte miſure ſegnata nelle pareti del criſtallo viene diviſa in cento parti eguali ſopra una mobile ſcala, che ſi adatta al tubo.

Incominciava a paſſare nell' eudiometro (queſto ſempre ripieno d' acqua piovana ed immerſo in una vaſca d' acqua) una miſura dell' aria da eſaminare, indi ne riponeva una d' aria nitroſa, le quali avrebbero dovuto occupare dugento parti, qualora non vi foſſe aſſorzione, indi teneva conto delle parti aſſorte o ſia diſtrutte, e notava quelle che rimanevano, come qui appreſſo.

Miſure dell'aria ad eſaminarſi	Miſure d'aria nitroſa	Parti	Aſſorte	Reſtano
I.	I.	200		

Ho con queſto metodo proceduto ad eſaminare l' aria comune e i diverſi fluidi aeriformi come qui appreſſo.

Aria comune.

L' aria comune, nella quale reſtò un pezzo di fosforo per 3 giorni, eſaminata colla candela, queſta reſtò acceſa come nell' aria comune.

Un paſſero viſſe in queſt' aria un egual tempo, che nell' aria atmosferica.

Eſaminata quindi coll' eudiometro una miſura di detta aria, ed una d' aria nitroſa, cioè 200 parti furono ridotte a 133, cioè a dire ne furono aſſorte o ſia diſtrutte parti 67.

Una miſura d' aria atmosferica pura, ed una d' aria nitroſa, cioè 200 parti furono ridotte a 130, cioè a dire ne furono diſtrutte 70 oſſia $\frac{3}{100}$ di più che nella ſperienza antecedente, il che ſecondo la dottrina ricevuta dimoſtra che l' aria in cui reſtò il fosforo ſi è qualche poco viziata.

Aria fissa.

Nell' aria fiſſa ricavata dalla pietra calcare coll' acido vitriolico, dove reſtò un pezzo di fosforo per due giorni,

La candela introdotta ſi ſpenſe, eſaminata poſcia coll' eudiometro, queſta ſomminiſtrò i riſultati ſeguenti cioè:

Una miſura di queſt' aria, ed una d' aria nitroſa, cioè 200 parti furono ridotte a 175, cioè ne furono diſtrutte 25.

Un animale ci viſſe preſſo che a quattro minuti, ed eſplorata l' aria dopo la morte dell' animale colla candela acceſa, queſta ſi ſpenſe.

Per evitare ogni equivoco ho pure eſaminato coll' eudiometro l' aria fiſſa pura di cui mi era ſervito, e riconobbi che una miſura di queſta, ed una nitroſa non fecero la menoma diminuzione.

Meritando queſto fatto importante di eſſere attentamente eſaminato, ripetei la ſperienza avendo laſciato il fosforo nell' aria fiſſa per 4 giorni intieri.

I riſultati furono che queſt' aria non era capace d' alimentare la fiamma.

Eſaminata coll' eudiometro una miſura di queſt' aria, ed una d' aria nitroſa, queſte 200 parti furono ridotte a 160 cioè ne furono diſtrutte 40.

Un paſſero introdotto in una boccetta ripiena di queſt'aria ci viſſe 6 minuti e 30 ſecondi, ed una candela ſi ſpenſe.

Eſaminata queſt'aria dopo la morte dell' animale col mezzo dell'eudiometro, una miſura di queſta ed una d' aria nitroſa, cioè 200 parti furono ridotte a 170, cioè a dire ſolo ne furono diſtrutte 30, il che proverebbe qui, che l'animale ha viziato l'aria di un quarto.

Noi ſappiamo che un animale meſſo nell'aria fiſſa ci muore in pochi ſecondi, e che l'aria fiſſa unita colla nitroſa non produce diminuzione veruna.

ARIA INFIAMMABILE.

Nell'aria infiammabile, dentro la quale reſtò un fosforo per due giorni, introdotta una candela, queſta ci arſe alcune volte come nell' aria comune, alcune volte ne infiammò l' aria ſenza che abbia potuto riconoſcere la cauſa di queſte variazioni.

Eſaminata coll' eudiometro, queſta fu notabilmente diminuita. Un animale poſto in queſt' aria ci viſſe molto più, che nell' aria comune.

Parendomi molto intereſſante l' eſaminare queſto fatto, ripetei più volte la ſperienza, e, come diſſi, eſaminata colla candela non ſempre ne infiammò l'aria, ma ſempre però la candela reſtò acceſa.

Eſaminata coll' eudiometro una miſura di queſta ed una d'aria nitroſa, cioè 200 parti furono ridotte a 175, cioè ne furono diſtrutte 25.

Una ſeconda miſura d'aria nitroſa non produſſe più diminuzione veruna.

Diverſi animali introdotti in queſt' aria non ſolo ci viſſero un tempo conſiderabile, ma alcuni un doppio tempo di quello che vivono nell' aria comune.

Eſplorata dopo la morte dell'animale queſt'aria colla candela, queſta ritrovai che alcune volte s'infiammò, altre volte ſi ſpenſe.

Eſaminai quindi queſt'aria dove morì l' animale, una miſura di queſta ed una d' aria nitroſa, oſſia 200 parti furono ridotte a 165; ne furono dunque aſſorte 35 cioè 10 di più della ſteſs' aria nella quale non era morto l' animale.

Queſto ſingolare fenomeno, che l' aria dove morì un animale eſplorata coll'eudiometro moſtri un grado maggiore di ſalubrità della ſteſſa aria non viziata dalla reſpirazione, mi ſarebbe paruto ſorprendente, ſe già non aveſſi oſſervato che l' aria deflogiſticata, dove un animale è morto, unita alla nitroſa produce una diminuzione maggiore aſſai della ſteſſa aria pura (*a*).

Cercando d' indagare la ragione perchè l' aria infiammabile, che è micidiale di ſua natura, qualora ſtia per 48 ore in contatto con un pezzo di fosforo, poſſa diventare reſpirabile, ed alimentare la fiamma, non dalla fosforeſcenza di queſta pietra calcinata, ma da' componenti di queſta parendomi doverſi ripetere; e penſando che queſta contiene una ſpecie di fegato di zolſo unito alla terra peſante, mi cadde in penſiero di eſaminare l' aria infiammabile dentro la quale foſſe ripoſto un pezzo di ſegato di zolſo d' eguale volume e peſo del fosforo impiegato.

Ripoſi dunque in una boccetta ripiena d' aria infiammabile un pezzo di ſegato di zolſo d' egual volume del fosforo impiegato.

Dopo 48 ore eſaminata l' aria colla candela fu leggiermente infiammata.

Un paſſero ripoſto dentro quell' aria ci viſſe preſſochè lo ſteſſo tempo che nell' aria atmosferica.

Eſaminata quindi coll' eudiometro, oſſervai che una miſura di queſt'aria, ed una miſura d'aria nitroſa, cioè 200 parti furono ridotte a 170, così che ne furono diſtrutte 30.

La ſteſs' aria nella quale morì l' animale eſaminata pure coll'eudiometro nella ſteſſa maniera, 200 parti furono ridotte a 160, così che ne furono diſtrutte 40, cioè a dire 10 di più che nell' aria dove non era morto l' animale; riſultati preſſo che conformi a quelli ottenuti col fosforo di Bologna.

Non devo omettere di far oſſervare, che nel tempo che

(*a*) Leggaſi la citata Diſſertazione ſopra alcune ſingolari eudiometriche eſperienze (Memoires de la R. Acad. de Scien. de Turin pour les années 1784 e 1785).

il pezzo di fegato di zolfo era appeſo per un filo al turaccio della boccetta ripiena d' aria infiammabile, ſi vide coperto d' umidità, e che cadevano poi di tempo in tempo alcune goccie giallo-roſſigne, che altro non erano che la ſcompoſizione del fegato di zolfo operata dalla parte acquoſa dell' aria, ma non ho eſaminato queſto liquore.

Sperimentai pure quale effetto avrebbe prodotto un miſcuglio di limatura di ferro con zolfo impaſtato con poca acqua.

Avendo dunque laſciato per 48 ore nell' aria infiammabile detto miſcuglio, eſaminatane quindi l' aria colla candela, queſta ſi acceſe.

Un paſſero introdotto dentro una boccetta ripiena di queſt' aria, morì in un minuto.

Eſaminata quindi coll' eudiometro una miſura di queſt' aria, ed una d'aria nitroſa, 200 parti furono ridotte a 180, così che ne furono diſtrutte 20.

E l'aria, dentro la quale morì l'animale in sì breve tempo, fu ciò non oſtante più diminuita, poichè 200 parti furono ridotte a 173, coſicchè ne furono diſtrutte 27 cioè 7 di più che la prima.

ARIA NITROSA.

L' aria nitroſa (ricavata dalla diſſoluzione del ferro nell' acido nitroſo), nella quale ripoſi un fosforo per 48 ore, quando fu aperta la boccetta, che la conteneva, più non parve rutilante coll' aggregazione dell' aria comune, nè più ſi ſentì odore veruno d' acido nitroſo, come già diſſi.

Introdotta una candela acceſa, queſta immediatamente ſi ſpenſe.

Un paſſero introdotto in queſt'aria ci viſſe 2 minuti, cioè a dire qui viſſe un qualche benchè menomo tempo, quando nell' aria nitroſa ſola un animale non conta che 5, o 6 ſecondi di vita.

Dopo la morte dell' animale la candela ſi è pure ſpenta.

Eſaminata quindi coll' eudiometro l'aria nitroſa dove ſtette il fosforo, cioè meſcolando una miſura d' aria nitroſa pura con una miſura di queſta, 200 parti furono ridotte a 180, così che furono diſtrutte 20.

E paſſando ad eſaminare la ſteſs' aria in cui morì l' animale, 200 parti furono ridotte a 175, cioè furono diſtrutte 25 in vece di 20.

Ripetei più volte queſta ſperienza, ed i riſultati furono ſempre conformi ai ſopraddetti.

Nella vita degli animali non ci fu variazione che di pochi ſecondi.

Non provai nemmeno differenza veruna ne' riſultati, qualora in vece dell' aria nitroſa ricavata col ferro impiegava quella fatta con l' ottone ſia per le prove eudiometriche, ſia per riempire la boccetta.

I riſultati conformi ottenuti nell' aria infiammabile dal foſforo e da un pezzo di ſegato di zolfo mi determinarono a ſperimentare qual effetto avrebbero prodotto nell' aria nitroſa.

Rinchiuſo perciò un pezzo di ſegato di zolfo nell' aria nitroſa e laſciatolo per tre giorni, vidi queſto ne' primi momenti ricoprirſi d' umidità, e formarſi delle goccie traſparenti come acqua, le quali cadevano di tempo in tempo.

Aperta la boccetta, penetrantiſſimo fu l' odore dell' acido nitroſo, la candela ſi ſpenſe, ed un animale morì in pochi ſecondi; eſaminata l' aria coll' eudiometro, queſta non ſoffrì che una diminuzione di $\frac{6}{100}$ d' una miſura.

Il pezzo di ſegato di zolfo, laſciatolo ſeccare ad un moderato calore, moſtrò una confuſa criſtallizzazione; raccolto queſto ſale, e gettandone alcun poco ſopra un ferro rovente, parte s' infiammò con fiamma cerulea laſciando un odore di zolfo, e parte ſi fuſe con ſibilo moſtrando di eſſere un compoſto di zolfo e di ſal nitro.

Le differenze oſſervate nel miglioramento dell' aria nitroſa ed infiammabile m' induſſero ad eſaminare quale effetto avrebbe prodotto un pezzo di ſegato di zolfo nell' aria fiſſa.

Laſciato dunque un pezzo di ſegato di zolfo rinchiuſo per tre giorni in una boccetta ripiena d' aria fiſſa, indi eſplorata colla candela, queſta ſi ſpenſe.

Una miſura di queſt' aria, ed una di nitroſa, cioè 200 parti furono ridotte a 150, così che ne furono diſtrutte 50.

Un paſſero introdotto in queſt' aria morì in meno di due minuti. Eſaminata l' aria dopo la morte dell' animale, una miſura di queſta ed una d' aria nitroſa, cioè 200 parti furono ridotte a 130, cioè 70 furono diſtrutte, oſſia 20 di più della ſteſs' aria dove non vi fu l' animale.

ARIA DEFLOGISTICATA.

L'aria deflogiſticata ricavata dal nitro, dentro la quale reſtò un pezzo di fosforo per 48 ore, eſaminata colla candela acceſa, queſta di viviſſima luce fu riſplendente.

Un paſſero meſſo in queſt' aria viſſe tre in quattro volte più che nell'aria comune, cioè un egual tempo, che nell'aria deflogiſticata pura.

Dopo la morte dell' animale la candela ſi ſpenſe.

Un ſecondo paſſero meſſo in queſt'aria, dove il primo morì, viſſe ancora un' ora ed un quarto. Eſplorata dopo la morte dell' animale colla candela, queſta ſubito ſi ſpenſe.

Meſſo quindi un terzo paſſero nella ſteſſa aria, queſto viſſe tre quarti d' ora, la candela ſi ſpenſe pure.

Vidi da queſte ſperienze, che l' aria deflogiſticata, dove reſtò un fosforo, era preſſochè egualmente atta alla reſpirazione animale, come l' aria deflogiſticata pura, ma ſolo era nociva alla fiamma.

Ho dimoſtrato altrove colla ſperienza (*a*), che alcune volte un' aria che è buona e reſpirabile eſtingue la fiamma, ed altre volte un'aria quantunque allunghi la fiamma e la renda vivace, e riſplendente, rieſce mortifera per gli animali, i quali vi muojono in pochi ſecondi (*b*).

Ho particolarmente oſſervato nelle varie aggregazioni da me fatte dell'aria deflogiſticata colle diverſe arie infette, che in quelle viziate dal vapore del zolfo, dal miſcuglio della limatura di ferro col zolfo, o dal fegato di zolfo, quantunque gli animali nella durata della lor vita ſeguiſſero la ragion diretta della maggior quantità d'aria pura impiegata nel miſcuglio, ciò non oſtante introdotta la candela acceſa dopo la morte dell' animale ſempre ſi ſpenſe.

Ora nel noſtro caſo de' fosfori Bologneſi credo doverne ripetere la ragione dal fegato di zolfo, che ſi trova in eſſi.

(*a*) Diſſert. journ. de Phiſique (aouſt 1784).

(*b*) Mémoires de l' Académie R. de Turin pour les années 1784 1785.

Paſſai ad eſaminare coll' eudiometro codeſt' aria deflogiſticata in cui reſtò un fosſoro rinchiuſo, come pure la ſteſs' aria dopo la morte dell' animale: e ſiccome ſappiamo che l' aria pura non vien ſaturata da una ſola miſura d' aria nitroſa, ne miſi nell' eudiometro fino a ſaturazione; ſiccome pure i riſultati ſono anche diverſi dalla diverſa bontà dell' aria deflogiſticata impiegata, eſſendo per così dire impoſſibile di eſtrarla dal nitro, o dalle altre ſoſtanze ſempre allo ſteſſo grado di bontà, così rapporterò le ſperienze fatte con due diverſe qualità d' aria deflogiſticata.

	Miſure d' aria deflogiſticata	Nitroſa	Parti	Aſſorte oſſia diſtrutte	Reſtano	
Primo ſperimento.	1	1	200	135	65	
		1	300	250	50	
		1	400	250	150	cioè ſaturata
	Miſure d' aria deflogiſticata dove ſtette un fosforo 3 giorni.					
	1	1	200	145	55	
		1	300	170	130	
		1	400	270	230	cioè ſaturata
Secondo ſperimento.	Miſure d' aria deflogiſticata pura.					
	1	1	200	125	75	
		1	300	248	52	
		1	400	275	125	
		1	500	275	225	cioè ſaturata
	Miſure d' aria deflogiſticata dove reſtò un fosforo 3 giorni.					
	1	1	200	130	70	
		1	300	225	75	
		1	400	225	175	cioè ſaturata
	Miſure d' aria deflogiſticata dove reſtò il fosſoro, e dentro la quale morì un animale.					
	1	1	200	133	67	
		1	300	133	167	cioè ſaturata

Si oſſerva dalla inſpezione della tavola antecedente, che l'aria deflogiſticata in cui reſtò un fosforo, fu maggiormente diminuita nell' eudiometro, che la ſteſs' aria pura, e che quella poi dove morì un animale lo fu maggiormente ancora.

Deſiderando di oſſervare quali riſultati il fegato di zolfo ripoſto nell' aria deflogiſticata avrebbe ſomminiſtrato, due furono gli ſperimenti da me fatti. Mi ſervii in entrambi della ſteſſa qualità d' aria deflogiſticata, ma nel primo l' aria fu eſplorata dopo tre, e nel ſecondo dopo dieci giorni che il fegato di zolfo vi fu rinchiuſo.

Nel primo ſperimento l' aria eſplorata con una candela, queſta vi ardè con viviſſima luce.

Un animale viſſe un' ora circa, cioè a dire (relativamente alla capacità del vaſo impiegato) doppio tempo che nell' aria comune. Dopo la morte dell' animale la candela ſi ſpenſe.

La diverſa diminuzione di queſte arie coll' aggregazione dell' aria nitroſa ſi oſſerva nella tavola ſeguente.

	Miſure d' aria deflogiſticata dove reſtò un pezzo di fegato di zolfo per 3 giorni.	Nitroſa	Parti	Aſſorte oſſia diſtrutte	Reſtano
Primo ſperimento.	1	1	200	45	155
		1	300	80	220
		1	400	120	280
		1	500	160	340
		1	600	200	400
	La ſteſs' aria dove morì un paſſero.				
	1	1	200	55	145
		1	300	90	210
		1	400	120	280
		1	500	135	365
		1	600	140	460
Secondo ſperimento.	Miſure d' aria deflogiſticata dove ſtette 10 giorni un pezzo di ſegato di zolfo.				
	1	1	200	115	85
	Una ſeconda miſura d' aria nitroſa non produſſe più la menoma diminuzione.				
	La ſteſs' aria dove morì un paſſero.				
	1	1	200	40	160
	Una ſeconda miſura di aria nitroſa non produſſe più veruna diminuzione.				

I riſultati della prima ſperienza ſono molto conformi a quelli ottenuti col fosforo di Bologna, colla ſola differenza che nell' aria dove reſtò il fegato di zolfo ſono ſtate neceſſarie cinque miſure d'aria nitroſa per la completa ſaturazione, in vece che nell' aria ove reſtò il fosforo baſtarono tre, la diminuzione della ſteſs' aria dove morì un animale fu anche maggiore nelle prime miſure d' aria nitroſa.

Quanto al ſecondo ſperimento, quantunque ſia ſtata molto diminuita l' aria dove reſtò per 10 giorni un pezzo di fegato di zolfo, ſi oſſerva che la medeſima aria in cui è morto un animale non produſſe una maggior diminuzione coll' aria nitroſa, ma all' incontro eſſa fu minore.

Io ne attribuiſco la ragione al più lungo tempo, che vi reſtò il fegato di zolfo, ed alla quantità d' aria fiſſa che vi riconobbi nell' agitarla coll' acqua di calce.

Il compleſſo di queſte ſperienze ci ſomminiſtra le ſeguenti rifleſſioni:

1. Che i fosfori Bologneſi introdotti ne' diverſi fluidi aeriformi ne alterano e ne cangiano la natura.

2. Che rendono atta, per un breve tempo, alla reſpirazione l' aria fiſſa e l' aria nitroſa.

3. Che non ſolo rendono reſpirabile l' aria infiammabile, per un corto ſpazio di tempo come le precedenti, ma che la rendono migliore dell' aria comune.

4. Che ſi oſſerva una ſpecie di rapporto tra i riſultati eudiometrici di alcuni fluidi aeriformi, in cui reſtò un animale, quando vi ſia ſtato un fosforo, cioè che l' aſſorzione oſſia la diſtruzione di una miſura di queſte arie con una d' aria nitroſa è maggiore che nelle ſteſſe arie dove non reſtò nè il fosforo nè l' animale.

5. Che in tutte le arie nelle quali è morto un animale ſi produce dell' aria fiſſa, poichè eſplorate coll' acqua di calce ſempre vi fu precipitata la terra calcare, il che non ſuccede nelle ſteſſe arie dove reſtò un fosforo (*a*).

6. Che quantunque diverſi fluidi aeriformi ſiano reſi migliori per la reſpirazione animale mediante il contatto del fosforo, tali però non ſembrano, ſe ſolo colla fiamma s' eſplorano.

7. Che le emanazioni del zolfo ſono più nocive alla fiamma, che alla reſpirazione animale, qualora eſſe ſono frammiſchiate con altre ſoſtanze aeriformi.

8. Che col fegato di zolfo introdotto nelle diverſe arie fattizie s' ottengono de' riſultati molto conformi a quelli del fosforo Bologneſe.

9. Che i fluidi aeriformi contengono tutti un principio acquoſo abbondante, il quale meriterebbe di eſſere attenta-

---

(*a*) Senza rapportare in fine d' ogni ſperienza la prova fatta coll' acqua di calce, ho giudicato meglio comprenderle qui tutte in queſta ſpecie di corollario.

mente eſaminato, poichè queſt' eſame contribuirebbe aſſaiſſimo a riſchiarare queſta ſcienza; ſopra tutto dopo le nuove teorie della converſione dell' acqua in aria.

10. E per fine reſta chiaramente dimoſtrato 1. che le ſperienze eudiometriche ſono molto fallaci per giudicare della bontà dell' aria riſpetto alla reſpirazione, 2. che l'arder della candela non è ſempre un indizio ſicuro della bontà dell' aria per l' economia animale, 3. che le proprietà dell' aria atmosferica ſono molto diverſe da quelle di tutte le fattizie aggregazioni che ſi ſono ſinora tentate con i varj fluidi aeriformi per imitarla: verità che ho già altrove con altri ſperimenti dimoſtrate.

Se difficile riuſcirà la ſpiegazione di molti fenomeni da me deſcritti, e particolarmente perchè l' aria deflogiſticata, mediante la reſpirazione animale o col contatto del fosforo Bologneſe, venga maggiormente diminuita nell' aggregazione della prima miſura d' aria nitroſa che non fa l' aria deflogiſticata pura, avrò almeno moltiplicati i fatti, e ſcoperte nuove proprietà ne' fluidi aeriformi, i quali potranno un giorno contribuire a formare una ragionata teoria ſopra queſto nuovo ramo di Scienza.

ADDIZIONE

Sopra alcune Pietre Fosforiche.

Avendo conſumato nel corſo di queſte ſperienze la maggior parte de' fosfori Bologneſi, e non oſando più tentare nuove ſperienze con quelli che nelle diverſe ſoſtanze aeriformi già furono più volte introdotti, e che avevano perduto in parte la facoltà fosforica, anſioſo per altro di continuare, e ripetere le intrapreſe ſperienze nell' aſpettativa di nuovi fosfori, che gentilmente mi furono ſubito ſpediti da Bologna dal Dott. *Camillo Galvani*, intrapreſi di ſperimentare, ſe preparando lo ſpato peſante nella ſteſſa maniera della pietra Bologneſe, l' aveſſi reſo fosforico: feci pertanto a tale oggetto le ſeguenti ſperienze.

Lo ſpato peſante del Rochery in Moriana (*a*) polverizzato, ed impaſtato col bianco d' uovo allungato con acqua, indi calcinato frammezzo a ſtrati di carbone, divenne fosforico: la ſua luce fu viva, ma più bianca che la pietra Bologneſe.

Collo ſpato peſante del Monferrato (*b*) feci de' fosfori ſimili al primo, la di cui luce era viva, ma biancaſtra; aveva queſto fosforo l' odore di fegato di zolfo come quelli di Bologna.

Collo ſpato peſante *et puant* del Rochery nella Savoja (*c*) ottenni de' fosfori con luce più viva de' due primi; l' odore di fegato di zolfo era anche più intenſo.

Cercando d' indagare ſe la fosforeſcenza di queſte pietre dipendeſſe particolarmente dalla terra peſante, che ne è la baſe, oppure dall' acido vitriolico in eſſe combinato, eſaminai

1.° La terra peſante pura; queſta divenne fosforica (*d*).

2.° Lo ſpato peſante rigenerato dalla terra peſante coll' acido vitriolico, il quale divenne fosforico egualmente, e non ſi oſſervò nella loro luce alcuna differenza.

3.° La terra peſante, la quale conteneva qualche porzione d' aria fiſſa, ed eſſa divenne egualmente fosforica.

4.° La terra peſante pura calcinata con fegato di zolfo, la quale divenne pure fosforeſcente, ma molto meno che la terra peſante pura (*e*).

Dal che mi pareva poterſi conchiudere che nella terra peſante riſiedeſſe ſolo la virtù fosforica. Ma avendo poi conſultato due eccellenti Memorie del Sig. *Margraff* negli atti della Reale Accademia di Berlino (*f*), di cui non aveva no-

---

(*a*) Scoperto dal Sig. Intendente Cav. di S. Real Corriſpondente della R. Accad. delle Scienze, a cui deve la medeſima molte importanti ſcoperte.

(*b*) Fu queſto ſpato ſcoperto dal Dott. *Bonvicino* Socio della R. Accad. delle Scien. di Torino, alla gentilezza di cui devo le preparazioni della terra peſante per gli ſperimenti qui appreſſo.

(*c*) Queſto ſpato ſi trova nell' iſteſſo monte dell' altro.

(*d*) Ho preparato la terra peſante nella ſteſſa maniera che la pietra Bologneſe.

(*e*) Eſaminai pure la terra degli oſſi, la quale contiene ancora una porzione dell' acido fosforico, ma queſta non divenne in verun modo fosforica.

(*f*) Tom. 6, 7 pour les années 1749, 50.

tizia, oſſervai che quel valente Chimico dopo un'eſatta analiſi della pietra Bologneſe ha compoſti molti fosfori artificiali col mezzo di diverſe pietre, e concrezioni calcaree; come pure collo ſpato fuſibile, col *glacies mariae* &c.

Per accertare il fatto, ſarebbe neceſſario di ripetere molte delle ſperienze fatte dal *Margraff* e colla ſcorta delle nuove ſcoperte fatteſi da' Signori *Bergman*, e *Scheele* ſopra la terra peſante, eſaminare ſe alla ſola ſoſtanza della terra peſante, la quale è ſpeſſo frammiſchiata nelle diverſe pietre eſaminate dal celebre Accademico di Berlino, deggiaſi la proprietà fosforeſcente; oppure ſe queſta ſi debba all'acido col quale ſono ſaturate dette pietre, come pensò il *Margraff*.

Il Sig. *Dufay* nelle Memorie dell' Accademia di Parigi (*a*) aſſicura che tutte le pietre calcaree, o contengano acido vitriolico, o ne ſiano affatto prive, poſſono diventare fosforeſcenti.

Queſta opinione ſembra coincidere co' pochi ſperimenti da me fatti, colla differenza per altro che io gli ottenni colla terra peſante ſcevra d' acido, ed egli colla terra calcarea,

Io non entrerò in ulteriori diſcuſſioni a queſto propoſito, non eſſendo queſto l' oggetto principale delle mie ricerche: ſolo mi ſono contentato di accennare quanto da me ſi è fatto (quaſi per accidente) per riſvegliare forſe in qualche Chimico il penſiero di analizzare attentamente da qual principio dipenda la fosforeſcenza delle diverſe pietre, e ſe queſto carattere poſſa conſiderarſi come eſſenziale per far claſſificare queſte pietre in una categoria particolare.

(*a*) Année 1730.

OSSERVAZIONI FISICHE

ISTITUITE

Nell' Iſola di Citera oggidì detta Cerigo

Dal Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Profeſſore di Storia naturale nell' Univerſità di Pavia, e indirizzate

Al Sig. CAVALIERE LORGNA.

LA lontananza, che per sì lungo intervallo mi ſepara dall' Italia, non può fare ch' io non torni ſovente ad eſſa col penſiero, e che io non conſervi viva nel cuore la ricordanza de' miei cari, ed illuſtri Amici, fra' quali ella, Sig. Cav. ornatiſſimo, tiene un sì onorevole luogo; e che nel tempo ſteſſo io non ſia ricordevole a me medeſimo delle promeſſe a lei fatte prima di laſciare Pavia, cioè a dire di mandarle, durante il mio ſoggiorno qui in Pera, qualche ſcritto fiſico da pubblicarſi nel Terzo Tomo della *Società Italiana*, ove per ventura io m' abbatta in qualche ſoggetto non affatto immeritevole di aver luogo in sì ſplendida, e riſpettabil Raccolta. E al certo negare non poſſo che prima anche di giungere a Coſtantinopoli ſiaſi a me offerta più d' una opportunità, onde intraprendere qualche nuova, e forſe non del tutto diſpregevole oſſervazione: mediante la protezione, e il favore dell' illuſtre Bailo Veneto, col quale ho avuto l' onore di viaggiare, preſſo il quale ho l' altro di ſoggiornare, propenſiſſimo a ſecondare tutti quei deſiderj, che tornar poſſono a vantaggio della Fiſica, e de' geniali miei ſtudj. (*a*) Io qui adunque voglio comunicarle alcune curioſità

(*a*) L' Eccellentiſs. Cav. *Girolamo Zulian*, Miniſtro ragguardevoliſſimo, che ad un fino guſto per le tre Arti Sorelle, e per ogni maniera di amena, e di ſcientifica letteratura, accoppia una rara modeſtia. Non potrò mai eſprimere abbaſtanza quanto io debba a queſto illuminato ſoggetto, al quale finchè io viva profeſſerò la mia più ſincera, e più devota riconoſcenza.

naturali preſentatemiſi in viaggio, e nate in certa guiſa da uno di quegl' infortunj, cui pur troppo non infrequentemente va ſoggetto chi naviga il mare. La ſera de' 29 ſettembre proſſimo ſcaduto lietamente da noi veleggiavaſi ſu la nave Bailera nell' Arcipelago, e quando con favorevole maeſtrale ci luſingavamo in poco più d'un giorno di giungere al Tenedo, un'improvviſa furioſiſſima tramontana accompagnata da un orrido temporale, ſopraggiunta alle due ore della notte, e continuata fino al giunger dell' alba, ebbe poco meno che a perderci tutti. Non già che la burraſca foſſe qualcoſa di ſtraordinario. Ma la terribile circoſtanza di trovarci da una parte nelle vicinanze della Morea, e di eſſere dall' altra nel mezzo d' un boſco d' iſole e di ſcogli, la totale oſcurità della notte, che affatto ci toglieva il veder queſte terre, la nave che, per non eſſerſi potuto per la repentina violentiſſima forza del vento ammainar tutte le vele, ricuſava di ubbidire al timone, e quindi invece di andare innanzi con la prora, veniva dall' ira del vento, e dai colpi del mare per traverſo cacciata, ci mettevano nel più imminente pericolo di fatalmente rompere a qualche terra. Non è di queſto luogo il deſcriverle i' orrore, la coſternazione, e diciam anche l' avvilimento, onde fummo compreſi, a riſerva di ben pochi, degli altri più coraggioſi, tra' quali non ſi vuol tacere l' Eccellentiſs. Bailo, che con univerſale ammirazione ſi portò, durante tutta l' orribil tempeſta, con imperturbabilità, e fermezza d' animo niente inferiore a quella dei più ſperimentati ſul mare; e ſolamente laſciò vedere di non andare eſente da quel prudente timore, che in ſimili traverſie non diſſimulano gli eroi. Le dirò ſolo, che a' miei dì non evvi ſtata notte che paruta mi ſia più lunga di quella, nè aurora che ſoſpirato abbia con tanta impazienza quanto la vegnente, la quale in un con le tenebre sgombrò dall' animo coſternato i noſtri ben giuſti timori. Siccome però il vento nord, avvegnachè più rimeſſo, non deſiſteva all' indomane di ſoffiare con empito, noi fummo aſtretti con la nave a tornare addietro, e dopo l' aver perduto più di cento miglia di cammino già fatto, ſi diede fondo preſſo la ſpiaggia di Citera, dove alcune ore appreſſo approdò eziandio l' altra nave di guerra, che accompagnava la noſtra, ma con gli

gli alberi rotti, e le vele ſquarciate, e così mal concia per la ſofferta tempeſta, che ſi reſe inabile a potere ſeguirci dappoi. L' uno dei due vaſcelli, che venivano di conſerva con le navi, non ci raggiunſe, che dopo un tempo lunghiſſimo, e fummo in timor grande, che fatto non aveſſe naufragio, dopo l' avere inteſo che in quell' orribile notte molti baſtimenti eran periti. L' eſſerci noi dunque ancorati a quella ſpiaggia, e l' avere dovuto reſtarvi otto giorni pe' venti alla noſtra navigazione contrarj, fu cagione ch' io poteſſi replicatamente, e in più ſiti oſſervare Citera; e tali oſſervazioni formeran l' argomento di queſta lettera.

All' udire, ch' io ſono per recarle nuove di Citera, probabilmente ella penſerà che tali nuove ſieno liete e piacevoli, per partire da un paeſe, che a giudizio dell' antichità è ſtato ſempre a Venere cariſſimo. Non dirò io già che vero ſia quanto leggiadramente ci narra *Virgilio* intorno all' accorto penſiere di queſta amabile Dea, di quivi trasferire Aſcanio addormentato, nel tempo che Amore ſotto le ſembianze di lui lo inviava a Cartagine per innamorare l' infelice Didone. Neppure io ſo ſe ſuſſiſta l' aſſerzione di altri, che Venere in Citera ſortiſſe i ſuoi natali, o che, pervenutavi da giovinetta, in tal luogo fermaſſe ſua ſtanza. Ma a me ſembra bene non poterſi rivocare in dubbio quanto ci fa ſapere Pauſania, che parlando di Venere Urania dice, che a' ſuoi giorni eſiſteva in Citera un tempio a lei ſacro, riputato il più antico, e il più celebre di tutti quelli ch' ella avea nella Grecia, e che in queſto tempio rappreſentavaſi armata la ſtatua della Dea. Quindi, s' io diritto eſtimo, ne viene che queſt' iſola allora doveva eſſere ſpeſſo viſitata da' foreſtieri, e per la divinità, che vi preſedeva, non potea non eſſer tenuta in ſommo onore da tutti. E però non è a maravigliare ſe anche adeſſo il nome di Citera riſveglia ſubito in noi idee gioconde, idee vantaggioſe per eſſa. Ma ſe creder dobbiamo che una volta ſalita foſſe a tanta riputazione, io poſſo dirle con tutto il candore, che preſentemente non ne conſerva che il nome. Del tempio sì famoſo non appariſce più veſtigio di ſorta. Si ignora pur anche il ſito dove eſiſteva. Solamente da' peſcatori ſi moſtrano ſulla ſpiaggia in luogo poco diſtante da quello dove ſi gittò l' ancora i bagni di

Venere (*a*). Ma che ſono mai coteſti bagni ? Un rozziſſimo anguſto cavo lavorato dall' arte dentro una rupe, con qualche apparenza di ſolajo formato di pietre, ſenza che quivi ſtagni o gema la più picciola quantità d' acqua, e che ſembra più che altro un chiuſo per garantirvi dalla pioggia il minuto armento. Nè l' iſola ſi può chiamare punto delizioſa, nè tollerabilmente ferace. Qui il clima è a vero dire aſſai dolce e ſoave, eſſendo voci ignote ghiacci e nevi nel verno. Qui evvi paſſaggio grande di quaglie ne' meſi d' agoſto, e ſettembre, ed io a tempo vi giunſi per potere guſtarne di quelle, che furono più tarde a pervenirvi, e le ho trovate ſaporitiſſime. E' probabile, che da queſt' iſola tragittino a dirittura alle coſte dell' Africa. Ma di primavera ritornando in Europa battono altra ſtrada. Non così è delle tortore, che due volte l' anno, cioè in ſettembre ed in marzo, fanno la loro comparſa in Citera quantunque meno aſſai numeroſe delle quaglie. Ma queſti uccelli di paſſaggio qui ſi arreſtano ſoltanto alcuni giorni, più per una ſpecie di neceſſità, cioè a dire per trovarvi un punto d' appoggio, onde dar bando alla ſofferta ſtanchezza, e così prepararſi a valicare tratti più lunghi di mare, che per trovarvi l' eſca a loro proporzionata, eſſendo l' iſola ſopra ogni credere ſteriliſſima. Delle quattro parti ſi può dire che tre ſono nudo ſcoglio. E quella porzione ancora, che dai coloni viene coltivata, ſiccome riſtrettiſſima, non produce che poco grano, e poche uve, l' uno e l' altre però di eccellente qualità. Quindi è che gli abitanti mal grado l' ampiezza dell' iſola, che in giro s' eſtende a ſeſſanta miglia, trovano appena di che ſuſſiſtere nelle produzioni che qui raccolgono. E però non è a ſtupire, ſe ne' tempi addietro Citera dir potevaſi la Siberia de' Veneziani, dove cioè veniva rilegata la feccia della nazione.

Le notizie fin qui eſpoſte, quantunque in sè non diſutili, non ſono però quelle per cui ora le ſcrivo. Quattro oggetti hanno per preferenza fiſſata la mia attenzione, e mi ſono paruti meritare quella del pubblico: ſottoponendoli però prima al

---

(*a*) La ſpiaggia preſſo cui approdammo ſi denomina S. Niccolò.

ſavio giudizio di lei, che oltre l'eſſere artefice ſovrano nelle Matematiche, è giudice abiliſſimo nelle Scienze naturali. Entro adunque ſenza più nell' eſpoſizione di queſti oggetti, e le dico di avere ſcoperto, 1. che l' iſola di Citera è vulcanica, 2. che nelle materie vulcaniche, che la compongono, ſi trovano incaſtrati moltiſſimi oſtraciti d' inſigne grandezza, e più pettiniti, gli uni e gli altri mirabilmente petrificati, e niente dalla violenta azione del fuoco pregiudicati, 3. che un' intiera montagna è piena d' oſſa umane e belvine impietrite, 4. che un lato dell' iſola preſenta una ſotterranea grotta rabeſcata, e adorna di materie ſtalattitiche molto curioſe, e molto iſtruttive. Eſaminiamo a parte a parte queſti fenomeni.

I. La maſſima parte dell' iſola riſulta, come già diſſi, di nudi ſcogli. Ciò ſi ſcorge prendendoſi la pena di ſcorrerla in molti luoghi. Queſti ſcogli non ſi poſſono veder meglio, e nella maggiore loro ampiezza, e in ſito più adattato ad eſpiarne l' interno, quanto eſaminandoli davvicino ſul mare. Quivi appariſcono a guiſa di muraglie di ſtraordinaria altezza, per lo più perpendicolari all' orizzonte, le quali continuando con le parti di dentro dello ſcoglio vengono a produrre enormi montagne. La perpendicolarità è nata, a mio avviſo, da' violenti colpi di mare, che dal battere continuo corroſe avendo le parti più baſſe degli ſcogli, hanno obbligato le più alte e pendenti a cadere, giù ſtraſcinate dal proprio peſo. Queſte verticali muraglie non preſentano alla viſta quell' ordine di ſtruttura, che è ſtato da me oſſervato in diverſi altri ſcogli che attorniano il mare, ed in quelli ſopra tutto, che circondano il famoſo golfo della Spezia, o che ſono littorali alle due riviere di ponente e levante di Genova. Colà gli ſcogli e le montagne ſono un compoſto di ſtrati ſoprappoſti a ſtrati, di groſſezza, di andamento, d'intreccio, di compoſizione diverſi (*a*). Somigliante tenore di ſtruttura è ſtato da me notato a Corfù, e al Zante in mol-

---

(*a*) Veggaſi la mia ſeconda lettera relativa a diverſi oggetti foſſili e montani, ſtampata nel Tomo ſecondo della *Società Italiana*, e riprodotta negli *Opuſcoli ſcelti* di Milano.

tiſſime di quelle rupi lapidee e ſcoſceſe, che ſopraſtanno al mare. Ma non ſi ravviſa il più picciol ſegnale di ſtrati ne' monti, e negli ſcogli di Citera. Sembran tutti formati d'un pezzo ſenza avere tante volte ne' loro componenti la più picciola ſenſibile differenza. Solamente le loro parti pare che ſieno ſtate inſieme unite tumultuariamente da un principio agente affatto irregolare. Ma non ſi può eſprimere quanto informi, quanto orridi ſieno quegl' immenſi gruppi di montagne e di ſcogli: oltre al non permettere l' appigliarviſi ſopra vegetabili di ſorta, non offrono alcun piano, alcun declive, ma ſi ſollevano preſſochè tutti in angoli, e in punte aguzze, coſicchè tanti in certa tal guiſa ſomigliano infinitamente in grande ad una pina, che dopo l' eſſere ſtata eſpoſta al ſole, per l' aprimento delle ſue cellette ſi rende tutta quanta armata di punte. Il color dominante è il roſſo, più o meno carico, più o meno sbiadato. E di qui penſo nato l' equivoco di qualche antico ſcrittore, che forſe per nobilitare vie più queſt' iſola a Venere ſacra ha decantati i ſuoi monti ſopraricchi di porfidi. Non evvi favola più favoloſa di queſta. In genere di pietre vetriſcibili, e di altre analoghe io non vi ho trovato che alcuni pezzetti di diaſpro, de' quali cadrà meglio il deſtro di ragionare più ſotto. Senza fallo il color roſſo, comune alla maggior parte dei porfidi, e ai ſiti ſcoglioſi e montuoſi di Citera, avrà impoſto a queſti ſcrittori. Cotal roſſo fioriſce il più ſu pietre margacee, ed eſaminato ben bene, comincia a far ſoſpettare che tali pietre ſofferta abbiano l' azione del fuoco. Almeno in vicinanza de' vulcani non rade volte ſi trovano pietre, o terre tinte di quel colore; e allorchè feci queſta prima oſſervazione in Citera, mi vennero alla mente alcune ſcorie veſuviane, che ſi conſervano nel pubblico Reale Muſeo di Pavia, ſomigliantiſſime nel roſſo alle noſtre. Il mio ſoſpetto andò poi creſcendo, e ſi fece in fine una pruova completa dai ſeguenti fatti. 1. In alcuni luoghi dell' iſola rompendoſi co' picconi diverſe pietre per far calce, replicatamente ho potuto oſſervare, che nella corteccia, ed anche in qualche parte del loro interno ſono mezzo calcinate, coſicchè con la punta d' un coltello, ed anche talvolta con l' unghia ſi rompono o radono; e quivi appajono cenerognole; il nocciolo poi, che è d'un berrettino livido, e che trovaſi di molto più duro, non è punto calcinato. 2. Frequentiſſime ſono le pomici quivi oſſervate. Mai o quaſi mai non ſi trovano ſparſe ſul ſuolo, ma ſono aderenti ai monti, e agli ſcogli, o a parlare più filoſoficamente, vengono a formare una porzione di eſſi. Manifeſtano ben chiaro i principali caratteri di queſto poro igneo. Sono poroſiſſime, aſpre al tatto, mezzo bruciate, poco o nulla muovonſi dagli acidi, e alcune ſi oſſervano leggiere in modo, che non vanno al fondo dell' acqua marina. Queſte pomici riſaltano ſopra tutto da certe corroſe cavità qua e là ſparſe nelle montagne, tanto in quelle che torreggiano ſul mare, quanto nell'altre che s' internano nell' iſola. 3. A chi con rifleſſione mira con l' occhio e pondera con la mente queſti luoghi deſerti, ſi diſaſcondono le aperte veſtigia de' già ſpenti vulcani. Nel picciol viaggio da me fatto per viſitare la caverna, di cui più baſſo dovrò parlare, mi ſi preſentarono tre bocche o crateri, che avevano tutta l' apparenza di avere un giorno vomitato fuoco. Oltre al color roſſo, e alle pomici quivi più ſpeſſe, avevano attorno in più d' un luogo ammaſſamenti di materie, che dal più ſuperficiale eſame fattovi attorno non iſmentivano la natura di lave. Sono di quelle già ſtate in buona parte fuſe, e che hanno un aſpetto tra il terreo e lo ſcoriaceo. Livido oſcuro ſi è il loro colore. Rompendone alcune ed eſaminandole in più luoghi, parte ſi trovan formate d' una paſta omogenea, e parte di altra eterogenea, la quale merita d' eſſere brevemente deſcritta. Oltre a buon numero di pagliette micacee, che vi luccicano dentro, queſta qualità di lava eterogenea è un compoſto di pietruzzole nericcie, amorfe, le più piccole appena diſcernibili dall' occhio ignudo, le più grandi niente maggiori d'un granel di pepe; che moſtrano chiaramente di avere ſofferto un grado di fuſione, ſenza però avere del tutto perduta l'irregolare lor forma. Oltre a queſte ve ne ſono delle più grandi, di figura tondeggiante, ma più o meno calcinate. E tanto le prime pietruzze quanto le ſeconde vengono avvolte ed inzeppate da una ſottile materia lapidea, la cui natura coll' occhio ſolo non è conoſcibile. Ma gli acidi minerali danno a vedere, ch' eſſa è margacea, sì però che l' argilla viene ſuperata d' un terzo circa dalla calce. Le pietruzze piccole e grandicelle teſtè menzionate ſottopoſte alla medeſima analiſi offrono gli ſteſſi riſultati. Ed il ſimile ſi vuol pur dire di quelle lave, che ricevuta avendo maggiore cottura ſono di paſta omogenea. Queſte ultime però non ſono ſtate da me trovate, che attorno ai tre mentovati vulcani. Ma le lave eterogenee, quelle che dimoſtrano avere meno ſofferta la forza ignea, ſono prodigioſamente abbondanti in Citera.

Per tutte queſte pruove vede adunque l'occhio perſpicace di lei, Sig. Cavaliere pregiatiſſimo, vero eſſere quanto in primo luogo ho aſſerito, cioè a dire queſta tanto celebrata iſola eſſer vulcanica. A pienamente perſuaderne chi leggerà queſta lettera, mi è piaciuto di eſporle con qualche dettaglio. Per altro chi è conoſcitore di queſte materie, ed ha veduto vulcani o ſpenti, o che ardono, oppure in qualche naturale Muſeo ha ſtudiato le pietre vulcaniche, e dall' abitudine ha avvezzo l' occhio a conoſcerle ſenza equivoco, e a diſtinguerle dall' altre che non ſono tali, al primo metter piede in Citera, maſſime dalla ſpiaggia dove noi ci arreſtammo, ſi accorge ſubito di queſto fatto della natura: e per tale è ſtato altresì toſtamente conoſciuto dall' Eccellentiſſimo Bailo, per quella ſperimentale cognizione da lui acquiſtata negli eruditi ſuoi viaggi al Veſuvio, e in altri ſiti vulcanici preſſo Napoli.

Di ſopra ho detto trovarſi in Citera qualche picciol diaſpro. Queſta pietra ha un miſto di verdognolo e di roſſo, e ſi trova in pezzuoli ſtaccati e ſparſi ſulle montagne, oltre a qualche ciottoletto alle ſponde del mare, ritondato dall' agitazione dell' onde. Diverſi poi di queſti pezzi dalle contratte ſcrepolature, per cui facilmente ſi rompono, e dai perduti colori non oſcuramente danno a conoſcere di avere provata la preſenza del ſuoco.

II. Entriamo adeſſo a parlare del ſecondo fenomeno, che riſguarda i teſtacei rinchiuſi o aderenti alle materie vulcaniche. Da noi è già ſtato accennato eſſer queſti oſtriche e pettini. I ſecondi non ſi veggono tanto frequenti, e la loro grandezza è mediocre. Le prime ſono numeroſiſſime, e dire ſi ponno di ſtatura giganteſca. La lunghezza in alcune oltrepaſſa i nove pollici, e la larghezza s' eſtende al mezzo piede. La groſſezza vuole altresì eſſer notata, che arriva più volte ad un pollice e mezzo. Ne' pettini non ho mai trovato le due valve inſieme unite, e come ſi veggono quando ſono abitate dall' animale. Non così dell' oſtriche, diverſe delle quali ſono in contatto con le due valve, e la cerniera connette e lega ſtrettamente l' una con l' altra. Di queſte ne può veder una di mezzana grandezza rappreſentata nella Tavola dalla Fig. I. dove appajono le due valve di volume diſeguale, come appunto è proprio d' un tal genere di teſtacei. Miraſi di profilo la valva maggiore piena di creſpe, e come embricata. Nei molti e diligenti eſami fatti attorno a queſti teſtacei, mi ſono ſempre appariti nel maggior grado petrificati, ſenza manifeſtare il più picciolo indizio di calcinazione, o d' altro vizio o leſione ſofferta per l' azione del fuoco.

Queſto doppio genere di conchiglie occupa differenti ſiti nella pietra vulcanica. Ve n' ha taluna aderente alla ſua ſuperficie, e che ſubito ſi preſenta alla viſta dell' oſſervatore. Ma ve ne ſono altre naſcoſte dentro di eſſa, e che in conſeguenza non ſi manifeſtano, che ſpezzando la pietra, e queſte ſono in numero molto più grande delle ſuperficiali. Ove la mano operi con qualche deſtrezza, ſe ne eſtraggono molte d' intiere, ed in tutte le loro parti beniſſimo conſervate. Ve n' ha però altre, che avuta anche queſta avvertenza, ſi ſcoprono rotte, anzi vi ſono più maſſi, che in buona parte non riſultano che dei loro frammenti.

Il fenomeno del trovarſi teſtacei petrificati su i monti, e dentro di eſſi, non ha niente di nuovo, niente di ſingolare in natura; che anzi queſto è un fatto frequentiſſimo ad oſſervarſi, e di eſſo ſon pieni i libri de' naturali Scrittori. Ma a me ſembra ben nuovo, e affatto ſingolare che v' abbia teſtacei intatti dentro alle pietre vulcaniche; nè io ſo ſe da altri ſia mai ſtato oſſervato ſimil fenomeno. E di vero ſembra inconcepibile come l' azione del fuoco alterando più o meno le terre e le pietre, fino a produr in eſſe un grado di vetrificazione, non abbia pur danneggiato i teſtacei col calcinarli, e col ridurli anche in polvere, come ſi oſſerva nel fuoco ordinario. Che ſe l' erudita curioſità di lei mi chiedeſſe, come qui dunque è ita la coſa, io non eſiterei un momento a confeſſarle la mia ignoranza, e ſolamente a guiſa di dubbio o ſoſpetto io le eſporrei come concepiſco che andata ſia la faccenda. Due, a mio avviſo, eſſer poſſono le ipoteſi intorno ai vulcani di Citera; o che queſti hanno eſercitato il loro potere nell' iſola già preeſiſtente, ovveramente che è ſtata da eſſi prodotta. Nella prima ipoteſi fa meſtiere ſupporre che quando il fuoco ha agito nell' iſola, ſi trovaſſero già in queſta i teſtacei, eſſendo affatto inveriſimile per non dir repugnante, che quell' agente ſtruggitore ve gli abbia recati. Ma in queſta ſuppoſizione io non ſo capire come i più non ſieno ſtati diſtrutti, e gli altri notabilmente alterati, talchè queſti non manifeſtino anche adeſſo evidenti ſegni di calcinazione più o meno inoltrata. Vero è che non ſi trovano mai attaccati o ſeppelliti nelle pomici, e nelle lave perfette, dove cioè le materie hanno provata la piena fuſione del fuoco, ma in quelle ſoltanto, che ricevuto hanno un primo grado di cottura. Tuttavia io non comprenderò mai come queſto grado, che è ſtato abile a cagionare un principio di fuſione nelle pietre, non abbia più o meno danneggiati queſti corpi calcari. Nell' altra ipoteſi poi a me parrebbe il fenomeno di non sì malagevole ſpiegazione. Suppongaſi adunque che Citera sbucata ſia dal mare in grazia d' uno o più vulcani. I fuochi ſotterranei adunque cominciato avendo con immenſa forza ad agire ſotterra, avranno a poco a poco ſollevato il fondo del mare, ſul quale par naturale che ſi trovaſſero quelle due qualità di conchiglie, le quali in conſeguenza ſi ſaranno ſollevate eſſe pure, e ſaranno uſcite dall' acqua all' uſcirne dell' iſola ſteſſa. Il fuoco poi non avrà potuto recare ad eſſe ſenſibile oltraggio, per eſſerne ſtata rintuzzata la forza dall' elemento dell' acqua, non oſtante che nelle parti interne di que' grandi aggregamenti di terra, che hanno ſervito alla formazione dell' iſola, abbia proſeguito ad agire, e quindi a ſollevare gli aggregamenti fuori dell' onde marine fino ad una data altezza. Ne abbiamo un parlante eſempio nell' oſtriche niente pregiudicate dal fuoco avvegnachè trovate ſu la naſcente *Iſola nuova*, quando nel 1707 per l' azione d' un vulcano attualmente uſciva dall' Arcipelago. Vero è che dagl' indicati indizj di vulcani ſpenti nell' iſola ſembra non poterſi negare, che l' attività del fuoco ſiaſi eſercitata

ſercitata per qualche tempo ſulla ſuperficie poſteriormente alla ſua formazione. Ma vero è non meno, che dove eſiſtono quelle bocche vulcaniche, non eſiſtono conchiglie, le quali tutte ſono raccolte, ſiccome ho detto, dove la potenza ignea è ſtata minore. Ma in queſta ipoteſi le oſtriche e i pettini quando uſciron dell'acque erano nel loro ſtato naturale, non in quello di petrificazione, ſiccome ſono al preſente. Queſto cangiamento facilmente ſi ſpiega ſol che rifletta ſi, che reſtate eſſendo ſeppellite dentro la terra, i ſucchi lapidifici, che cangiato hanno queſta in pietra, hanno fatto il ſimile per rapporto ai teſtacei; e gli acidi comprovano in effetto eſſere la loro petrificazione calcare, voglio dire della natura delle pietre, dentro cui ſi trovano avvolti.

Non ho omeſſo d' interrogare gli abitanti di Citera, e in iſpecie i peſcatori, ſe quel tratto di mare, che attornia l'iſola, dà ricetto a pettini e ad oſtriche ſimili alle trovate fra le materie vulcaniche, e la riſpoſta concordemente è ſtata negativa. Quindi argomentar ſi potrebbe, che le ſpoglie di queſti animali foſſero piuttoſto di paeſi ſtranieri, e che quivi ſieno ſtate recate dal mare. Senza negare la poſſibilità della coſa io crederei più naturale il penſare, che in tempi rimotiſſimi moltiplicaſſero in quel fondo di mare coteſti viventi, ma che coll' andar del tempo ſiaſi perduta la razza, o perchè diſtrutta affatto dagli uomini, o perchè mancati gli alimenti atti a nodrirla, o per qualunque altra a noi ſconoſciuta cagione. Volendo noi conſultare i viaggiatori filoſofi, e gli ſtorici più accreditati, non mancano eſempli di fatti conſimili, e voglio dire di peſci, e d'altri animali acquajuoli, che una volta venivan peſcati in certi tratti di mare, o in certi fiumi e laghi, quantunque oggidì in quei luoghi ſteſſi non ſe ne prenda pur uno. E la medeſima coſa ha pur luogo negli animali terreſtri. Un eſempio valga per tutti, tratto dalla ſteſſa Citera. Non ſono più di trent'anni, che, per atteſtazione di quegl' iſolani, i ſuoi monti più elevati abbondavano di groſſi avoltoj, che davano gran pena ai paſtori, per predare gli agnelli allora quando in que' luoghi paſcolavan le greggie; e che fino all' oſſa ſpolpavano le pecore, i cavalli, i buoi, ſe qualcuno di tai quadrupedi per malattia perito veniva abbandonato ſu qualche luogo deſerto. Eppure adeſſo per loro aſſerzione non ſi trova pur uno in tutta l'iſola di queſti ingordi e ſozzi volatili. E perchè adunque lo ſteſſo non può eſſere accaduto ai pettini, e all' oſtriche, di cui ora parliamo? Tanto più che i teſtacei di queſte ſpecie, ſe a mancar vengano in un ſito, non poſſono eſſere ſurrogati da altri più lontani; non eſſendo come i peſci, che col beneſizio del nuoto ſi trasferiſcono agevolmente da luogo a luogo nell' acque dolci o ſalſugginoſe: ma i noſtri teſtacei ſi poſſono chiamar prigionieri di quel punto di ſpazio ſu cui ſono nati, reſtando ivi eternamente fiſſi, nè avendo altro moto che quello di aprire, e di chiudere la croſtoſa loro caſetta.

Tolta di mezzo queſta difficoltà che mi poteva eſſer fatta, la ſincerità mia non mi conſente il diſſimularne un' altra, o almeno di toccare un queſito, che nel leggere la mia lettera verrà a lei probabilmente in animo di propormi. Queſto ſi è, ſe io abbia fondamento di prove, che i fuochi ſotterranei, piuttoſto che d' eſſere uſciti dall' iſola già eſiſtente, l' abbiano generata eglino ſteſſi, mentre il fenomeno delle conchiglie, che meglio s' intende nella ſeconda ſuppoſizione che nella prima, non è per un Filoſofo una prova di queſta generazione.

Su queſto oſcuriſſimo punto io le eſporrò quelle leggieri conghietture, che fatta mi hanno preferire tale opinione. In più luoghi ho voluto eſpreſſamente ſu d' una barchetta coſteggiar l' iſola, per vedere ſe que' monti e quelle rupi, che naſcondonſi nel mare, finiſcono d'eſſer vulcaniche prima di arrivarvi; ed ho ſempre trovato che continuano ad eſſer tali anche ſott' acqua, fin dove può giunger la viſta. Tal coſa io ho potuto nettamente oſſervarla tanto in que' dirupi che verticalmente s' internan nell' acque, quanto in quegli altri che piegano, e formano dentro al mare un piano inclinato. Un tal fatto mi ha dunque indotto a credere, che i fuochi sbucati ſieno di ſotto al mare, e che ſollevati v' abbiano que' gran cumuli di terra convertitiſi in ſeguito in pietra, i quali parte s' inalzan ſull' acque, parte ſi occultano nel loro ſeno. Quaſi ſul principio di queſta lettera ſi è notato, che i monti e gli altri luoghi dell' iſola non ſono a ſtrati, ma rappreſentano come un gran tutto, le cui parti hanno l' apparenza d' eſſere ſtate inſieme accozzate da una cagione affatto irregolare. E tal cagione io non ſaprei meglio rinvenirla che nel fuoco, che con moto violento e tumultuario balzando all' insù l' iſola, non le abbia conceduto di venir formata di ſtrati, o ſuoli, come ſi oſſerva nella più parte delle montagne. L' eſempio d' altre iſole dell' Arcipelago prodotte da vulcani mi ha fatto vie maggiormente prediligere queſta ipoteſi. Riferiſce *Strabone* (la cui autorità ne' racconti della Grecia è di sì gran peſo) che al ſuo tempo fra le due iſole Teraſia, e Tera era già uſcita dal mare un' iſola di dodici ſtadj, prodotta da ſotterranei fuochi; e che in ſeguito i Rodiani approdarono a queſt' iſola, e vi ſabbricarono ſopra un tempio dedicato a Nettuno (*a*). L' iſola nuova teſtè accennata riconoſce ella pure la medeſima origine vulcanica, ed è molto probabile che dallo ſteſſo principio ſieno ſtate una volta prodotte l'altre due iſole, che tengono in mezzo la nuova, cioè la piccola, e la grande *Cammeni*, denotando appunto queſto greco vocabolo, quantunque corrotto, *bruciata*. Per le oſſervazioni da me inſtituite in altri luoghi di queſto mare io avrei con che abbondantemente confermare il mio aſſunto; ma queſte notizie fiſiche unite ad altre diverſe mi riſerbo a miglior tempo di renderle pubbliche.

III. Intanto facciam parola del terzo fenomeno, ch' è quello dell' oſſa foſſili. Queſte alla maniera de' teſtacei hanno un ſito determinato dove eſiſtono, che è un'erta montagna fatta a cono troncato nell'apice, ſituata al mezzodì dell' iſola, e poſta in vicinanza del mare, lontana poco più di mezzo miglio dalla città, o piuttoſto dal meſchino villaggio, che ritiene il nome dell' iſola, e diciaſſette miglia dal luogo dei teſtacei. Dove cominciano l' oſſa la montagna ha il giro d'un miglio, e di lì andando fino alla ſua cima non evvi parte tanto alla ſuperficie, quanto nel ſuo interno (fin

---

(*a*) *Inter Theram, & Theraſiam e pelago prorupere flammæ, quæ per dies quatuor mare totum æſtuans atque ardens reddiderunt. Tum educta altius ſenſim velut machinis inſula, & ex fluitantibus terris compoſita exhalavit, quæ duodecim ſtadiorum circuitum continet. Inde ceſſante caſu, tum imperantes mari Rhodici primum capta fiducia ad locum navigantes, templum Tutori Neptuno in inſula ædificarunt. Lib. 1.*

dove almeno ſi può ſcavare) che non ſoprabbondi di queſte ſpoglie animali. Gli abitanti ſteſſi chiamano un tal ſito *la montagna dell' oſſa*. Con picconi ed altri arneſi ne ho fatto trar da più parti, cercando, quando ho potuto, di averle unite alla matrice petroſa, dentro cui ſono immerſe, curioſo di ſapere a qual genere di animali appartengano, quale ſia il loro ſtato, e quello della pietra a cui ſono legate. Non evvi ſtato meſtiere di molto ſtudio per conoſcere che la più parte ſono umane. Credo di averlo potuto chiaramente comprendere da alcune falange delle dita, da qualche pezzo di radio e di tibia. L' eſatta convenienza di queſt' oſſa con le naturali trovata nella ſuperficie, nella grandezza, e figura, nella ſoſtanza, e direzione delle parti, non ce ne laſcia, a mio avviſo, dubitar punto. Di più il medico condotto di Citera, uomo che per una certa ſemplicità di coſtumi, e naturale ingenuità, mi è ſembrato degno della maggior fede, mi aſſicura di aver veduta ſcavata da quel monte una mandibola umana corredata de' ſuoi denti, e un pezzo di cranio umano con le ſuè diſtinte ſuture. Ho detto che la più parte di coteſti oſſi appartengono alla noſtra ſpecie, per indicare che alcuni ſono belvini, quantunque non abbia potuto conoſcere di qual genere ſieno di animali, e ſolamente ſono determinato a credere, che appartengano piuttoſto a quadrupedi che ad altri viventi. Il loro colore sì all' eſterno che nell' interno è bianchiſſimo a riſerva di andare talvolta offuſcata la ſuperficie di macchiuzze dendritiche, come ſpeſſo ſi oſſerva ſu le lamine o ſtrati che compongono l' avorio foſſile. Non ſono punto calcinati, ma interamente impietriti; quindi hanno la durezza, e il peſo delle pietre. Le oſſa ſpugnoſe conſervano la naturale ſpugnoſità, e le fiſtuloſe l' interno lor cavo. Coteſto cavo non è mai riempiuto da materia terroſa, molto meno dalla propria midolla impietrita, ſapendoſi già che le parti animali dotate di molta mollezza, come la midolla dell' oſſa, non vanno mai ſoggette ad impietramento, per la troppa facilità d' infracidare, e guaſtarſi. E per la ſteſſa ragione non è a domandare, ſe nell' eſame de' teſtacei nell' antecedente articolo mentovati mi ſia abbattuto in qualcuno corredato del ſuo oſpite petrificato. Rompendo minutamente alcuni groſſi pezzi di pietra dove annidano l' oſſa , vi ſi trovano dentro ſeminate per tutto , altre intiere (queſte però aſſai ſcarſe), altre ſpezzate , altre ridotte in minuzzoli . Nella figura II. ſta di profilo eſpreſſo al naturale un oſſo rotto, e rinchiuſo nella ſua petroſa matrice, e nella figura III. il medeſimo oſſo mirato di proſpetto. Tanto la pietra matrice che l'oſſa partecipano della natura calcare; e la prima talmente ſerra, e quaſi diſſi ferrumina le ſeconde , che a formar vengono un corpo ſolo , e da queſta fortiſſima adeſione ne viene la ſomma difficoltà di ſtaccarle intatte dalla matrice. Si fa dunque chiaro che queſt' oſſa , non altrimenti che i deſcritti teſtacei , ſono ſtate una volta inviluppate e ſepolte in una molle terroſa materia, la quale dal petrificarſi che ha fatto, cagionato ha lo ſteſſo effetto ſull' oſſa. Si è anche in qualche ſito cavernoſo conformata in piccioli ed eleganti criſtalli ſpatoſi, che a queſte petrificazioni conciliano bellezza maggiore.

Ma qui trovo un divario rilevantiſſimo tra la ſoſtanza lapidea , che imprigiona i teſtacei , e l' altra che imprigiona le oſſa ; ed è che queſt' ultima non fa conoſcere il più picciolo indizio d' eſſer vulcanica . E' un compoſto d' una paſta margacea indurita, giallo-roſſigna, e di picciole pietre altresì margacee , quantunque tal paſta ſia talvolta ſolitaria . Queſto compoſto non ha niente di ſimile per ciò che appartiene ai contraſſegni del fuoco nè con la pietra a teſtacei , nè con ciò che di caratteriſtico ſi oſſerva nell' altre pietre vulcaniche. Non è mai ch' eſſo appariſca in qualche parte fuſo oppur calcinato.

Ma qual ſiſico agente traſportò mai ſu quella montagna tanta moltitudine d' oſſa ? ed eſſendo la più parte umane , come e d' onde ſi ſono raccolti in un luogo ſolo tanti individui della noſtra ſpecie? S'ella, Sig. Cavaliere ornatiſſimo, mi faceſſe mai queſte domande , le riſponderei che ſe molti capi di queſta lettera le ho finora ſcritto con mano tremante per l' arduità ſomma della materia, il timore a più doppj in me ora ſi accreſce, accorgendomi di doverle dir coſe, che poco ſoddisfacendo me ſteſſo, molto meno ſaranno per soddisfare il virtuoſo ſuo genio. Ciò nondimanco m' accingo ad ubbidirla luſingandomi che preſſo me potrà valere di qualche ſcuſa l' oſcurità del ſoggetto. Eſſendo l' oſſa dentro a materie non ſottopoſte agli ardori del fuoco, ſembrami che potrebbe egualmente intenderſi come ſi trovano ſu quel monte e nel ſuo interno, tanto ſupponendo che eſiſteſſero prima ſul ſondo di mare dove ora è Citera, e che ſieno ſtate in alto ſollevate al formarſi dell' iſola, quanto immaginando che alla medeſima già formata ſienſi unite e meſcolate in appreſſo. Solamente ad iſpiegare l' impetramento dell' oſſa d' uopo ſarebbe in entrambi i caſi ſupporre che le medeſime non ſieno rimaſte a fior di terra (poichè allora eſpoſte all' azione dell' aria, e delle meteore ſi ſarebbero inſenſibilmente ſcompoſte e diſtrutte); ma ſibbene che ſieno ſtate profondate e naſcoſte nella terra molle, dalla quale reſtando a poco a poco penetrate, ſieno paſſate dallo ſtato animale al lapideo. Di fatti coſa richiedeſi perchè un corpo, ſia vegetabile, ſia animale, paſſi alla condizione di pietra? Niente altro, a giudizio mio, ſe non che dall' acqua, onde rimane ſotterra penetrato, venga ſpogliato delle parti fluide ſaline ed analoghe, ritenuto ſoltanto il teſſuto conſiſtente fibroſo; che gli ſpazietti laſciati vuoti dalle accennate particelle già uſcite, vengano riempiuti dalla terreſtre glutinoſa materia petrificante; e che tal materia a poco a poco ſi diſſecchi, ed induri.

Se ſi doveſſero aſcoltar gl' iſolani, converrebbe dire che dove adeſſo eſiſton le oſſa, una volta vi foſſero i cimiterj del paeſe. Queſta almèno è l' opinione univerſale, la qual però a me non quadra per più ragioni. Primieramente oſſervo che i cimiterj, quantunque d' antichiſſima origine, ſogliono eſſere diſadatti alla petrificazione dell' oſſa. A comprovare la mia aſſerzione potrei recare in mezzo più fatti, ma per ſervire alla brevità mi contenterò di due ſoli. Giunti eſſendo noi li 12 ottobre con la nave Bailera in faccia al principio dell' Attica, alla diſtanza di 21 miglia da Atene, nè potendo per un forte rovajo proſeguire il viaggio, ſi gittò l' ancora preſſo al *Capo Colonne*, che è un Promontorio così chiamato per 14 belliſſime colonne di marmo, piantate ſulla ſua cima, le quali ſono l' avanzo di un tempio famoſo, per detto di Pauſania e di altri, conſecrato a Minerva Suniade, la qual Dea portava tal nome da quel Promontorio denominato Sunio. Intendentiſſimo, ſiccome è, d' ogni bell' arte S. E. *Zulian*, recatoſi ſul luogo in compagnia di me e di altri pochi, oltre l' aver fatto prendere il diſegno di quel prezioſo reſto di antico ſabbricato, ordinò anche di far ivi ſcavare in più d' un luogo, ſe mai qualche baſſorilievo, od altrettale nobil pezzo ſi foſſe per avventura diſotterrato. Ma l' eſito non corriſpoſe al lodevole ſuo deſiderio; ed in quella vece ad una data profondità non ſi cavaron che oſſa umane, e tra l' altre una tibia intiera e qualche cranio. Erano nello ſtato naturale di oſſa ſenza apparire punto petrificate. Non è già veriſimile che foſſer d' uomini ivi ſepolti allorchè quel tempio era da' Greci tenuto in grande venerazione; penſerò piuttoſto che succeduto ciò ſia in tempi aſſai poſteriori, e de' Greci criſtiani, che convertendo nel proprio lor culto quel tempio, deſſero dentro di eſſo ſepoltura a' defunti. In tal ſuppoſizione, che a me pare ragionevole, egli è al certo qualche migliajo d' anni che eſiſtono nel Promontorio ſotterra quell' oſſa, ſenza avere contratto un primo principio d' impietrimento, per mancare le condizioni a queſta metamorfoſi neceſſarie.

Ma io poſſo fornirle l' eſempio d' una ſerie d' anni maggiore, e tuttavia inetta alla petrificazione dell' oſſa ne' cimiterj. Parlo di quelle recentemente ſcoperte nel Ducato di Modena, e nominatamente nel territorio di Scandiano. Quivi adunque alla profondità di più piedi ſmuovendo il ſuolo, ſi ſcopre in certi luoghi una terra nera ſoffice e sbriciolata, che per eſſer margacea è un eccellente ingraſſo pei prati, e pe' campi. Queſti tratti di terra, che non ſono però di molta eſtenſione, nè molto profondi, rinſerrano più urne, la più parte ſpezzate, con oſſa umane dentro, oltre a molte altre oſſa congeneri di mezzo a quella terra diſſeminate. Tra la medeſima ſi oſſervano pure molti carboni non foſſili, ma di legna bruciate, o come diciam di fornace. Chi ha qualche notizia delle uſanze romane relative ai defunti, facilmente comprende il reſto. Quell' oſſa dunque erano le reliquie de' cadaveri, le quali con certe miſterioſe cerimonie ſi collocavano dentro dell' urne, ed in alcuni determinati ſiti ſi riponevan ſotterra. Siccome poi non poche ſi trovano anche fra la terra diſperſe, è d' uopo dire che non tutte ſi rinchiudevan nell' urne. Egli è noto che la qualità dell' urna, cui ſi affidavano l' oſſa, ſoleva eſſere proporzionata alle facoltà di quelli, a' quali apparteneva il defunto. Se ricchi, quel funereo arneſe era di granito, di diaſpro, di porfido, d' alabaſtro ecc. Se poveri, veniva lavorato di ſemplice terra. Dire adunque biſogna, che l' urne diſotterrate nello ſtato di Modena proveniſſer da gente non facoltoſa, mentre che tutte ſono di terra. S' intende anche facilmente perchè cagione in que' cimiterj ſi rinvengan carboni. Senza fallo erano il reſtante delle legna bruciate, che ſervito avevano pe' roghi, ſu' quali ſi erano poſti ad ardere e a conſumarſi i defunti. Venendo poi al propoſito degli oſſi, io che ſu tai cimiterj ho inſtituite le fin qui eſpoſte oſſervazioni, non ne ho trovato pur uno petrificato fra tanti che ho rotti ed eſaminati. Ritengon ſempre lo ſtato naturale di oſſo, e i più ſottili, come i cranj, acquiſtato hanno qualche grado di friabilità. Eppure la diuturnità del tempo non era loro mancata, onde contrarre ſe non una compiuta, una iniziale almeno petrificazione. Il difetto di queſta lenta operazione della natura, così ne' due accennati cimiterj, come in tanti altri, deriva, a quel ch' io penſo, dalla mancanza del ſucco glutinoſo e lapidifico; e quindi è che in tai ſiti la terra non è mai o quaſi mai indurata in pietra. All' oppoſito di quel che veggiamo, dove ſi ſcoprono petrificazioni vegetabili od animali, le quali il più ſogliono aver ſede dentro alle pietre ſciſſili, calcari, o margacee, e non rade volte ſelcioſe.

A queſta grave difficoltà contro l' opinion popolare, che quel monte pieno d' oſſa umane in Citera foſſe anticamente il luogo dove ſi ſeppellivano i defunti, ſe ne aggiungon due altre di egual peſo, ſecondo ch' io ne giudico, che m' ingegnerò di eſporre con la maggior brevità. Si è detto che quella montagna è conica, che la baſe dove cominciano ad apparire le oſſa ha il circuito d' un miglio, e che queſte s' eſtendono a gran numero fino alla cima, tanto nelle parti eſterne, che nelle interne. Non è improbabile che anche il nocciolo della montagna ſia ricco di queſti corpi ſtranieri. Ma anche independentemente da queſta ſuppoſizione, volendo noi attenerci a quello che appare, ogn' un vede il numero ſterminato d' uomini che quivi dovevano eſſer raccolti per averſi quell' immenſa moltitudine d' oſſa, il qual numero ſembra di gran lunga ſuperiore a quello che formano i cadaveri de' cimiterj delle più popoloſe città.

Per ultimo ſe quella vulgare credenza foſſe verace, ſiccome per una lunghiſſima ſucceſſiva ſerie di anni ſi avrebbe ſeguitato a ſotterrare i morti in quel luogo, così il grado di petrificazione nell' oſſa non ſarebbe eguale in tutte: ma le prime quivi ſeppellite godrebbero d' un maggiore impietramento dell' altre conſegnate alla terra in tempi poſteriori; quelle poi degli ultimi tempi eſſer dovrebbono le meno petrificate di tutte. Ma niente di ciò ſi ravviſa in queſt' oſſa, le quali ſono tutte ad un modo petrificate, cioè perfettamente petrificate. Queſta è dunque una prova dimoſtrativa, che tutte quante ſono ſtate ad un tempo rinchiuſe in quel luogo, profeſſando io poi d' ignorare altamente, come, in qual tempo, e per qual cauſa ſiaſi quivi potuta ragunare tanta moltitudine d' uomini. Poſſiamo ſoltanto con ſicurezza dedurre, che queſta cauſa è ſtata violenta, rinchiuſe avendo l' oſſa a molta profondità, il che non poſſiamo capire ſenza ammettere che quella montagna ſia ſtata allora conſiderabilmente ſmoſſa e ſconvolta. Quell' oſſa poi, che ſi ſtaccano dalla ſuperficie, non è già che quivi ſi ſieno in pietra convertite, eſſendo coſa certiſſima, e confermata dall' eſperienza, non darſi petrificazione nè vegetabile nè animale, che ne' luoghi ſotterranei, dove cioè niente può la viva azione dell' aria. Ma ſi ſono reſe ſuperficiali dal corrodimento delle pietre ſopraſtanti, cagionato a poco a poco dall' acido aereo, e dalle meteore.

Il fenomeno degli oſtraciti, e pettiniti dentro alla pietra vulcanica mi è paruto ſingolare, nè mi ſuggeriſce la memoria d' aver letto in altri autori ſimile combinazione. Ma non è lo ſteſſo dell' oſſa umane petrificate, eſſendovene diverſi eſempli preſſo i Naturaliſti, tra' quali merita diſtinta menzione il celebre mio amico Abb. *Fortis*, che parla d' un ſimil fatto nel ſuo libro ſopra Cherſo ed Oſero, ſcritto con tanta eleganza di ſtile, e profondità di dottrine. E qui laudo il prudente ſuo riſerbo di non volere nulla decidere intorno all' oſſa da lui ſcoperte, eſſendo queſti in realtà oſcuriſſimi fenomeni, volendo riſchiarare i quali, non poſſiam giocare che ad indovinarla, e piaceſſe a Dio che l' indovinaſſimo in bene. Quantunque qual coſa evvi fra le petrificazioni animali che non abbia il ſuo miſtero, e che non ſia avvolta da impenetrabili nebbie? E non è forſe di queſto genere il fenomeno dell' oſſa d' elefanti, diſotterrate nelle più fredde regioni del nord, e per conſeguenza in luoghi tanto remoti ai nativi di queſti enormi quadrupedi? E non hanno egualmente il loro malagevole, il loro arduo, le petrificazioni dei peſci, e di tanti altri animali, maſſimamente per eſſere la più parte eſotici a que' paeſi, di dove ſi eſtraggono? Ma i due fenomeni a mio avviſo più difficili a comprenderſi, più ſorprendenti e più ſtrani ſono gli oſſervati da me, l' uno gli anni addietro nella Riviera di ponente di Genova, conſiſtente in una infinita congerie di pettini impietriti componenti una ſerie di montagne dell' eſtenſione al di là di ſettanta miglia, de' quali pettini è in buona parte formata quella nobiliſſima città marittima; l' altro fenomeno veduto ultimamente in Troja, e a Coſtantinopoli, giacchè le immenſe ruine della prima città, e le ſtrade, gli acquedotti, e la maſſima parte delle fabbriche della ſeconda coſtano d' un marmo biancheggiante, non d'altro generato che di ſole telline petrificate. Maraviglia non picciola ella è ſenza fallo che queſte tre grandioſe ed illuſtri città ſieno ſtate fabbricate di ſpoglie animali, e l' oſſervazione giungerà ſicuramente nuova al lettore. Ma la maggior maraviglia, per non dire ſorpreſa, e il fatto di più difficile ſpiegazione ſi è per mio avviſo, come un numero di teſtacei ſopra ogni credere sì grande, sì ſterminato, quale ſi è quello che ha ſervito di coſtruzione a quel lunghiſſimo tratto di monti liguſtici, e l' altro all' edificazione di Troja, e di buona parte di Coſtantinopoli, ſi riduca a due ſpecie nè più nè meno, eſſendo i pettini nel primo caſo, e le telline nel ſecondo d' una medeſima qualità, ſenza che altri pettini, altre telline ſpecificamente diverſe, ovveramente croſtacei d'altro genere vi ſi veggano mai meſcolati. Dopo tante e sì lunghe diſpute ſiam tuttavia nell' umiliante incertezza, ſe una generale agente cagione ſeppellito abbia ſotterra, e quaſi ad un tempo queſta prodigioſa quantità d' uomini, di quadrupedi, di peſci, e d' altri acquatici, e terreſtri animali; o più veramente ſe a produrre sì memorabili effetti concorſe ſieno più cauſe particolari, in diverſi tempi, e in diverſi modi operanti. Sappiam ſolamente, perchè l' eſperienza cel moſtra chiaro, che queſto od unico, o molteplice principio ha cagionato nel noſtro pianeta i maggiori ſconvolgimenti, e che ne' ſiti più elevati de' monti, e alle più profonde loro radici ha ſepolto queſti viventi, diſcoprendoſene le reliquie di alcuni, altre all' altezza di 10000 piedi ſulla ſuperficie dell' oceano, altre alla profondità di 14000 dentro gli ſtrati delle montagne. Ma ſe queſte rivoluzioni, ſe queſti violenti traſporti di animali in regioni ſtraniere, ſieno ſtate l' effetto o di qualche univerſal cataclíſmo, o di tremuoti, o di vulcani, o di altrettali tumultarj agenti, dobbiam confeſſarlo ſenza roſſore, che da noi totalmente s' ignora. In tanta oſcurità di coſe, e ſcarſezza di dati, a me ſembra che il miglior partito ſia quello di notare diligentemente, e ſenza prevenzione i naturali ſenomeni, avventurando al più qualche ſoſpetto o conghiettura, e proponendolo al lettore filoſofo per quello unicamente che vale. Forſe verrà un tempo che i materiali in più età raccolti ſervir potranno a' più tardi nipoti per architettare qualche più ragionevol ſiſtema degl' immaginati fino al preſente, ſe pure ſarà dato all' uomo il penetrare tant' oltre.

IV. L' iſola di Citera, che fin' ora è ſtata il ſoggetto de' noſtri diſcorſi, ci preſenta una quarta curioſità naturale, non men degna delle tre altre d' eſſer narrata. Queſta ſi è una ſotterranea caverna ſituata a ponente, non più di tre miglia lontana alla montagna dell' oſſa, ed un quarto di miglio al mare. Rozzamente ovale ſi è la ſua bocca al di ſuora, ma internamente rappreſenta un triangolo rettangolo iſoſcele, il cui angolo retto è alla ſommità della bocca. Queſta bocca, aſſai ampla, ſerve d' ingreſſo ad una ſpazioſa ſtanza, ſul cui piano ſi mira un meſchino altare circondato d'un muricciuolo poſticcio, nel quale qualche rara volta ſi celebra da' Greci la Meſſa, per eſſerſi, dicono, quivi trovata l' immagine di S. Sofia. Le pareti laterali, e la volta della ſtanza ſono di pietre calcari, ſenza che l'arte v' abbia avuta veruna parte, ſu le quali appajono più macchiuzze, che a prima giunta ſi crederebbon licheni, ma che meglio eſpiate non ſono che accozzamenti di granella ſtalattitiche attaccate a quelle pietre. E da queſto fatto ſi comincia ad accorgere, che la caverna preſenta un fenomeno niente diverſo da quello che in tante altre ſi oſſerva, voglio dire de' pori acquei. Quelle granella che nel roſſigno biancheggiano, e che hanno forma rotonda, ſe ſi rompano e microſcopicamente ſi oſſervino, ſi trovan formate di laminette concentriche, le une ſovraſtanti all' altre; e quindi appariſce che hanno appunto i caratteri di quell' acquee pietruzzole volgarmente dette *ooliti*.

Se dalle pareti laterali rivolgeremo l' occhio alla parete oppoſta alla bocca, qui i corpi ſtalattitici ſi preſentano in folla. Si può dire che quella parete ſia unicamente compoſta di eſſi. La parte adunque eſteriore di lei è formata d' un numero immenſo di ſtalattiti, non già coniche come le ordinarie, ma irregolariſſime nella figura, e piene di ſinuoſità, di bernoccoli, di tumori. Il reſtante poi della parete è una ſolida croſta della groſſezza di più piedi, ſtalattitica eſſa pure, e nell' eſterna apparenza fatta a onde ed a zone. Sul piano della ſtanza poſto in vicinanza della parete riſaltano altresì più rialzamenti ſtalattitici, generati dalle goccie d' acqua cadenti da quella volta. Rottine diverſi, ſi vede eſſere la primiera loro origine un picciol tumore, al quale ſono ſovrapposti altri e poi altri ſucceſſivamente più grandi. Sembra la loro geneſi eſſere preſſo a poco accaduta, come quando della cera fuſa o del ſevo ſeguitano a lungo a cadere ſopra d' un piano, oppure quando vi cade goccia a goccia dell' acqua, che per l' eceſſivo freddo via via ſi rappiglia, ed indura. Le goccie di quella volta ſono pregne di materia terreſtre: cadute ſul pavimento, il fluido acqueo a poco a poco ſvapora, le particelle terreſtri per la mutua attrazione ſi uniſcono, e in certa guiſa ſi coagulano, e da queſti ſucceſſivi indurati coaguli ne naſcono que' piccoli monticelli o tumori. Le ſtalattiti pendenti agli archi della ſtanza, le quali ſono eſſe pure a ſtrati ſopra ſtrati, come ne moſtra la rottura, ammettono un' analoga ſpiegazione, che è quella pure che dal *Wallerio*, e da altri ſi ſuole aſſegnare per conſimili acquei lavori. Nè da un principio diverſo ſi vuol ripetere il ſolito corpo croſtoſo, onde maſſimamente la parete è ſormata. Le acque, inzuppate di ſottile terreſtre materia, da prima probabilmente non hanno prodotto che ſtalattiti verticali, che coll' andar del tempo allungateſi, ſono giunte infine a toccare il ſuolo, e ad attaccarviſi. A queſte nel medeſimo piano ſonoſi aggiunte altre e poi altre, e dal mutuo loro accoſtamento ne è finalmente nata quella croſtoſa ſotterranea parete. La ſpiegazione per le coſe, che qui appreſſo dirò, riceverà ulterior grado di perſuaſione. Intanto avverto eſſere la materia, onde ſono compoſti i corpi ſtalattitici mentovati, e gli altri da mentovarſi, calcareo-ſpatoſa. Proſeguendo il cammino dentro la grotta, ſi entra in una ſeconda ſtanza alquanto men capace della prima, mentre che queſta ha di larghezza interna 72 piedi, e 59 di lunghezza, quando la larghezza della ſeconda ſtanza è di piedi 38, e la lunghezza di 46. Qui la coſa più oſſervabile ſi è un tramezzo ſtalattitico che divide la ſeconda ſtanza da una terza, groſſo molti piedi, traforato irregolarmente, e che in più d' un luogo ſembra formato come di groſſi tronchi, che ſi dividono in rami; e i tronchi ſi ſollevano dal pavimento, e i rami vanno a piantarſi negli archi della caverna. Qui pure ſi fa manifeſto eſſere ſtata la formazione di quel tramezzo una conſeguenza dell' acque cadenti dall' alto, e generanti con le terreſtri loro particelle da prima delle ſtalattiti, le quali col decorſo degli anni creſciute di numero e ingroſſate, e ſteſeſi fino a terra, hanno formata quella ſpecie di tramezzo. E ſiccome queſto fu da me trovato veſtito d' un ſottil velo acquoſo, ad onta dell' aridiſſima autunnale ſtagione, egli è fuor di dubbio che in avvenire que' fori per le aggiunte terreſtri materie ſi andranno chiudendo, e che in fine quella parete o tramezzo verrà ad eſſere interamente ſolido e tutto d' un pezzo. Non più che due ſtanze mi rimanevano da oſſervare per poter dire di aver veduto tutto l' interno della caverna, cioè una terza ed una quarta: e qui dirò con Dante, che queſte due ſtanze ſono mute di luce; per conſiderar le quali vi fu dunque biſogno di fiaccole acceſe, e non mancarono entrambe di preſentarmi nuovi curioſiſſimi oggetti. I lavori, gli ſcherzi, le bizzarrie cagionate dall' acque ſono innumerabili, e conoſco mancarmi le parole per adombrarne alcune. Oltre a gran numero di ſtalattiti giù pendenti dalle curve volte, ed altre riſaltanti a foggia di coni ottuſi dal terreno, ſi veggono più colonne qua e là occupanti il vano di que' tenebroſi orrori, altre diritte, e quaſi dalla natura fuſate, altre biſtorte bernoccolute o ſcabroſe, altre liſcie e sfuggevoli, altre ſaglienti alla ſuperficie per cordoni che longitudinalmente le corrono; e tutto quel colonnato ſembra il poſſente ſoſtenitore di quegli archi minaccievoli e lordi. Nè qui mancano baſſorilievi che rozzamente ſomigliano ad uomini e ad animali, o che hanno l' ombratile ſembianza quando di alberi forniti di pedale, di rami, di ramuſcelli, quando di padiglioni, e perfino d' organi corredati delle lor canne. Termina poi quella incantata ſcena nel più interno della montagna ſenza ulteriore apertura o sfogo, che prolunghi al non mai ſazio ricercatore il piacere di contemplare come la ſagace natura ne' più cupi ſeni della terra ſa operar maraviglie, ſenza curar punto la gloria d' eſſer veduta.

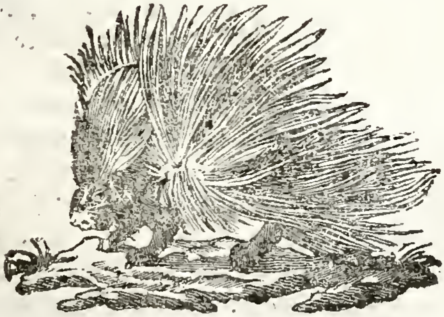
Reſtrignendo in poco le coſe in queſt' ultimo capo già eſpoſte, col ridurle tutte alla conſiderazione de' pori acquei, onde riccamente è fornito quel ſotterraneo ſpeco, raccolgo che la materia che li compone non è della più nobile, nè della più ricercata, non eſſendo nè criſtallina, nè biancheggiante, come ſi ſcorge in più altre caverne, e come negli anni ſcorſi emmi apparita quella d' una cava ſcorrente ſotto i filoni de' prezioſi marmi carrareſi. Coteſti pori tuttavia preſentano un fenomeno che molto intereſſa il penſatore filoſofo. Concerne eſſo la lunghezza del tempo impiegatavi per eſſer prodotti. Ve n' ha alcuni, precipuamente nella quarta ſtanza, formanti delle maſſe groſſe per ogni verſo più di 30 piedi. Qual prodigioſo numero di ſecoli vi ſarà egli ſtato richieſto per l' attuale formazione di eſſe? Un fatto riferito dal *Vallisneri*, e ragguagliato ad un mio, metterà più in chiaro la coſa. Queſto rinomatiſſimo mio concittadino viſitato avendo nel 1705 ſull' Appennino di Modena una caverna chiamata la *Grotta che urla*, e tra l' altre coſe veduto avendovi ſul piano di eſſa in vicinanza della bocca un monticello di materia ſtalattitica, generato da goccie cadenti dalla ſommità della caverna, riflette nel ſuo Trattato delle fontane, che ſe quel ſotterraneo ſtillicidio proſeguirà a cadere ſul monticello, queſto a poco a poco s' aggrandirà in guiſa, che giungerà un giorno a chiudere il varco ai curioſi. Nel 1783 eſſendomi io recato alla Grotta che urla, cioè 78 anni, da che venne deſcritta da queſto Naturaliſta, ebbi il compiacimento di ritrovarvi lo ſteſſo monticello, ma tuttavia aſſai umile, e ben lontano dal far ſoſpettare d' eſſer vicino a vietar l' ingreſſo alla grotta. Se adunque nello ſpazio di 78 anni noi ſiamo autorizzati a penſare che quel cumulo ſtalattitico ſi è di poco accreſciuto; di quale innumerabile moltitudine d' anni ſarà ſtato meſtieri per generare quell' ammaſſo lapideo di 30 e più piedi? Tanto più che lo ſtillicidio cadente ſul cumulo della Grotta che urla è molto maggiore di quelli che danno origine ai corpi ſtalattitici della grotta di Citera. Venendo poi queſta grotta, e la montagna, dentro cui ſi naſconde, a conſtituire una porzione dell' iſola, non è a dubitare ch' ella pure ſia ſopra ogni credere antichiſſima.

Una breve conſiderazione ponga fine a queſta lunga mia diceria. Quella Citera, che preſentemente miraſi dal paſſeggiere qual rifiuto della natura, per non eſſere che un ſeminario di pietre vulcaniche, di ſcogli, di deſerte montagne, penſerem noi che tale ſia anche ſtata dalla primiera ſua origine? O più veramente che cangiata la natura del ſuolo, di fruttiſera e deliziosiſſima ch' ella era da prima, abbia degenerato a poco a poco, ridottaſi in fine alla preſente miſerabile ſquallidezza? Non nego io già che queſte degenerazioni ſieno uno di que' tanti accidenti, cui vanno ſoggette le parti del globo. Siavi un paeſe internamente pieno di ſcogli, ed eſternamente veſtito d' una groſſa croſta terroſa. Queſta, per eſſere montuoſo il paeſe, venga corroſa, e via recata ne' fiumi dall' impeto delle pioggie, a tal che dopo un lunghiſſimo giro di anni più non rimangan di eſſo che i nudi ſcogli. Allora quel luogo ſarà ridotto a ſomma ſterilità, e ad orridezza, quando per lo innanzi eſſer potea fecondiſſimo ed ameniſſimo. Ma io preſumo che niente di ſimile ſia avvenuto in Citera. Concioſſiachè s' ella originalmente è derivata da vulcani, ſiccome penſo di avere baſtantemente moſtrato, quel diſguſtoſo, quello ſquallido, che preſenta oggigiorno all' occhio, doveva preſentarlo non meno ne' ſuoi principj. Che anzi io porto opinione che allora foſſe più deſerta, più ributtante, notiſſimo eſſendo, che le lave e l' altre produzioni vulcaniche dopo un lungo intervallo in parte ſi ſcompongono in terra; e da queſto ſcomponimento credo io derivati que' breviſſimi tratti di terra, che empiono alcune picciole valli, alcuni baſſi fondi dell' iſola, e che mal corriſpondono ai voti dell' avido agricoltore. Citera dunque ne' tempi che fioriva la Grecia eſſer doveva quale a un di preſſo la veggiam oggi: e il tempio a Venere ſacro che nel ſuo ſeno accoglieva, e i frequenti ſacrifizj che offerivanſi alla Dea, e la copia de' foreſtieri che vi accorrevano, hanno ſenza fallo cotal luogo levato in fama e celebrità, fattaſi anche maggiore dalle penne amplificatrici de' Greci.

Eccole quelle poche oſſervazioni, e lieviſſime conghietture che ho potuto raccogliere intorno a Citera, che in buona parte ho ſcritte ſul mare, e che giunto a Coſtantinopoli ho il piacere di mandarle. Cercherò di comunicarnele qualche altra, ſe pure avrò ozio baſtante, prevedendo di dover eſſere quindi innanzi occupatiſſimo, non tanto nella continuazione di mie ricerche ſopra coſe naturali, e ſegnatamente marine, quanto per mettere inſieme nuove raccolte, onde arricchir maggiormente il pubblico Reale Muſeo di Pavia, per ubbidire ai ſuperiori ordini dell' Imperial Corte di Vienna, e del Reale Governo di Milano, queſto appunto eſſendo ſtato il doppio oggetto de' miei viaggi in Levante.

Ella continui a volermi bene, ch' io continuerò ad eſſere con la più alta conſiderazione, e col più parziale affetto.

Pera 8 Novembre 1785.



SOPRA

Fig: III.

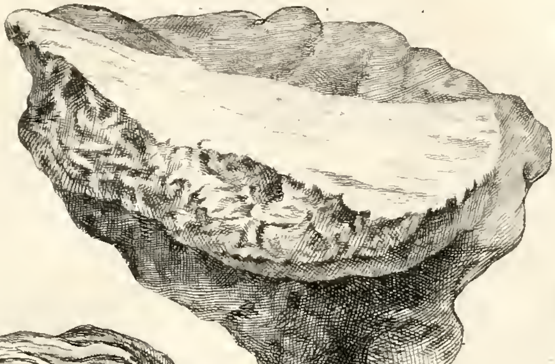
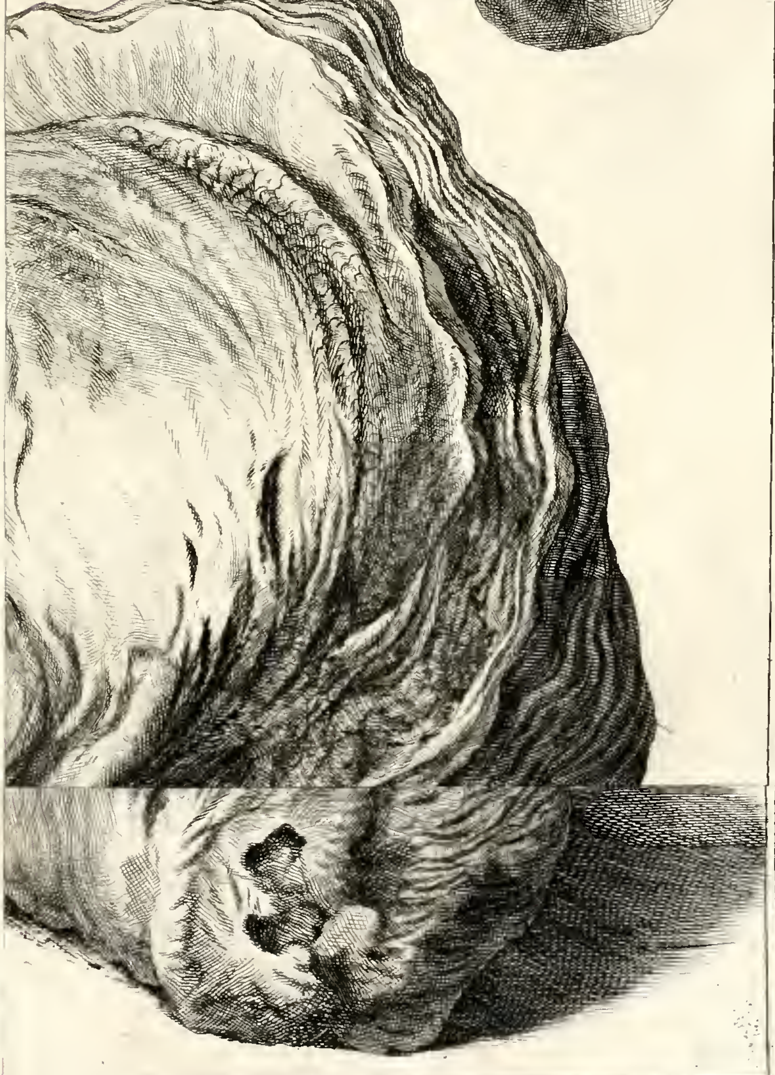


Fig: I.



c

ℑ

plan

chè

ne

di f

(a)

(b)

(c)

Fig: II.

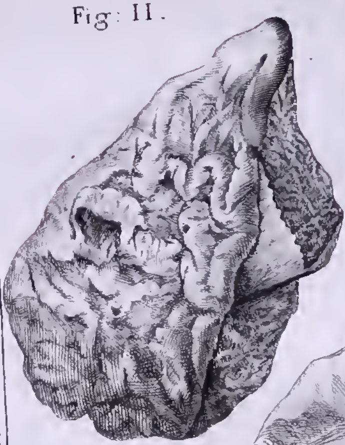


Fig: III.

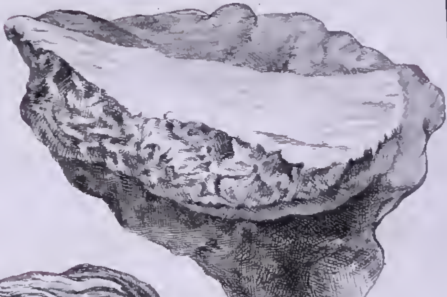
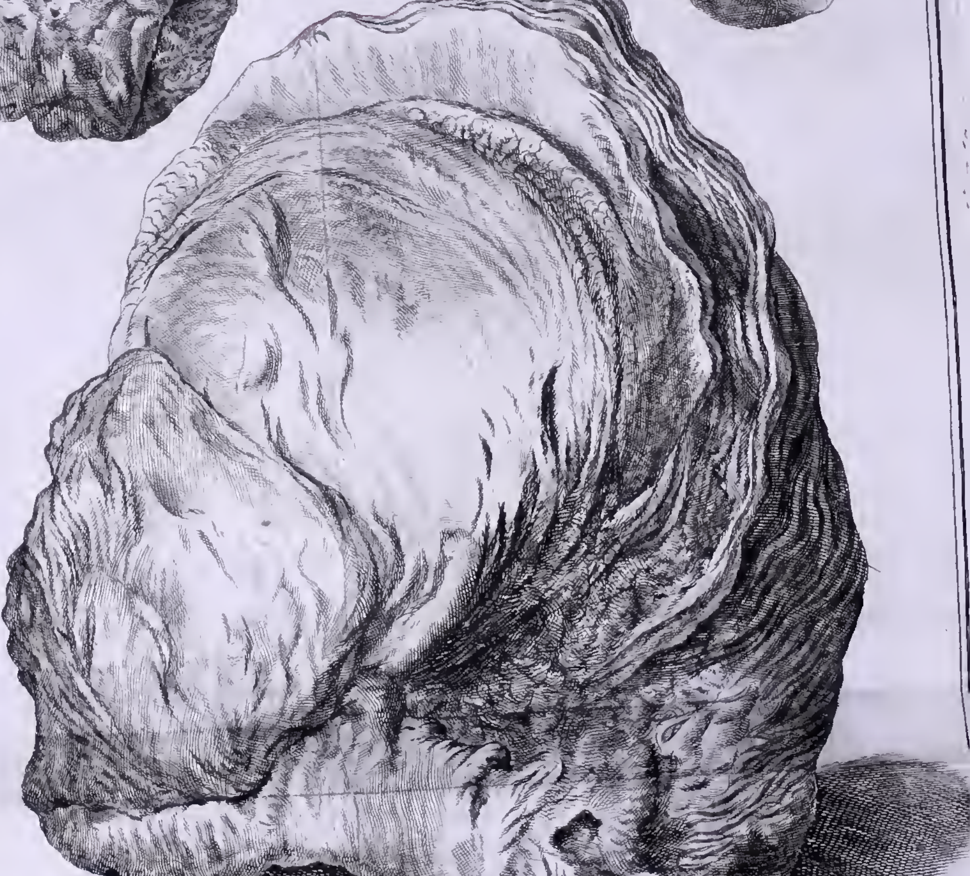


Fig: I



SOPRA

IL

VELENO DEI FUNGHI.

Del Sig. Dott. GIOVANNI VERARDO ZEVIANI.

PARTE PRIMA.

In che conſiſta il veleno dei funghi.

Siccome da baſſi e vili principj ſorgono coll'andare dei ſecoli fra gli uomini le più diſtinte e riputate famiglie; così è addivenuto dei funghi: che riputati un tempo ſozze produzioni della putredine, vengono ora aſcritti al numero delle altre vere e legittime piante. Fu *Plinio* il primo che chiamolli eſpanſioni del putrido muco degli alberi: *fungorum lentior natura, & numeroſa genera, ſed origo nonniſi e pituita arborum* (*a*). Fu *Girolamo Trago* che infamolli per figli della corruzione e della putredine: *cæterum neque plantæ, neque radices, neque flores, neque ſemina ſunt: ſed nihil aliud quam terræ, arborum, lignorum putridorum, aliarumque putrilaginum ſuperfluæ humiditates* (*b*). Fu *Giovanni Coſteo* che li diſſe eſcrementi della terra: *ſane imperfecti ſunt generis... & fungi.... quos excrementa potius terræ eſſe putes, quam plantas* (*c*). Così fu creduto da tutti per molti ſecoli, finchè nel preſente il *Lanciſi* ed il *Valliſneri* una loro opinione produſſero; che altro non foſſero i funghi che porzioni di fibre vegetabili prolongate ed organiche: *neque vero ſemi-*

(*a*) Hiſt. nat. lib. 22. cap. 23.
(*b*) Hiſt. Plant... lib. 1.
(*c*) De ſtirp. nat.

nibus ad fungorum generationem opus eſſe videtur, cum iidem nequaquam naſcantur ſeparatim; verum ſemper derivatis fibrillis, ſuccoque nutritio ab aliquo vegetante, vel vegetabili corpore ... (a). Così penſai io pure quando da fanciullo vidi da un trave di pioppo, liſcio ed appianato, che ſoſteneva in chiuſa ed altra camera un tetto, ſortiti dei funghi, quali naſcer ſogliono alle morte radici di quell' albero: e così creder dovea il *Lemery* quando da liſcie aſſicelle di melo vide molti funghi ſortiti, in tempo che quelle ſi uſavano a cuſtodia e fermezza di una gamba rotta (b). Ma il *Turneforzio* ſin dal cominciamento di queſto ſecolo ſoſpettò che foſſero i funghi vere piante prodotte dai loro proprj minutiſſimi ſemi (c). Senonchè la gloria di averli veduti e rimarcati riſervata era a *Pietro Antonio Micheli* fiorentino; il quale diligentemente li deſcrive non ſolo nei veri funghi, ma negli agarici ancora, nei tartuffi, e nelle altre ſimili piante (d).

Ma queſti funghi, queſte vere e legittime piante, per quanto tolti ſiano in queſto ſecolo da una ſozza origine, non è però tolta da eſſi l' infamia di eſſere alle menſe degli uomini, dove ſono ſaporito e ricercato cibo, perigliosa vivanda, e qualche volta mortiſero veleno: *Fungorum eſus*, dice Galeno, *quibuſdam mortem intulit: nonnulli in mortis diſcrimen adducti diarrhæis correpti, aut choleris aut ſtrangulata periclitantes* (e). *Plinio* nomina delle famiglie intiere disfatte dai funghi mangiati (f), onde il *Kirchero* chiamolli *vivas toxici burſas* (g). Noi ſteſſi ai giorni noſtri veduto abbiamo frequentemente ſe non eſtinte, a perioglioſi paſſi ridotte molte perſone; benchè migliori modi ſian noti al dì d' oggi di prepararli alla menſa, e più certi metodi ſi abbiano di ſoccorrere con la medicina agli afflitti. Non è gran tempo che io fui chiamato a viſitare una ragazza, abbandonata dal Medico in mano de' Religioſi per diſperata, come tocca da una forte apopleſſia. Avea per vero dire da molte ore tutti li ſenſi eſterni ed interni ſopiti. Pure alcuni ſegni mancavano a doverla dire apoplettica. Soſpettai di veleno, e rilevai procedere il morbo da gran quantità di funghi mangiati. Fui a tempo di ſoccorrerla con i preſidj dell' arte.

(a) Lanciſ. op. tom. 2. pag. 80.

(b) Tratt. univ. pag. 135.

(c) Mem. de l' Acad. an. 1707.

(d) Nova Plant. Gen. Ridicola è l' opinione di M. *Paliſſot* che vuole i funghi altro non eſſere che malattie dei vegetabili: e così quella del Barone di Munchauſen, che pretende ch' eſſi altro non ſieno in realtà che veri animali. Vedi lo Eſprit des Journaux, maj 1785.

(e) De ſuc. bon. cap. 4.

(f) Hiſt. nat. lib. 22. cap. 22.

(g) Scrut. Peſt. ſect. 1. cap. 6.

Oltre la diarrea, la collera, lo ſtrozzamento di gola di ſopra nominati da *Galeno*, ſi oſſervano ancora fra i ſintomi del veleno di funghi, il ptialiſmo, la colica, la diſſenteria, l' itterizia: ed in un veleno più penetrato e forte i deliquj d' animo, la proſtrazion di forze, l' agghiacciamento delle membra, le convulſioni, la febbre, il delirio, il letargo, l' apopleſſia, la morte. Nel cadavere di una fanciulla uccisa da' funghi infetti trovò il Lemonnier verſo il piloro infiammato il ventricolo, turgidi i vaſi ſanguigni del duodeno, leggermente macchiato all' interno, e corroſo, e inferiormente ſtrozzato, voti gl' inteſtini, oſtrutto il condotto del fiele, roſſo e gonfio il fegato, e la bile tinta di un verde atro colore (*a*).

Or in che conſiſte propriamente il veleno dei funghi? *Ex eduliis his omnibus*, dice Galeno, *fungis frigidiſſimus*, *&* *glutinoſiſſimus*, *craſſuſque ſimul ſuccus ineſt* (*b*). Queſta dottrina di *Galeno* è ſtata, come di ogni altra ſua avvenne, per tutt' i ſecoli dopo da ciaſchedun ricevuta; ed il danno che recano i funghi, o ſia il loro veleno, è ſtato da tutti creduto non in altro ſtare che in un ecceſſo di frigidità inſuperabile dalle forze dello ſtomaco in cui entrano e ſi ricevono. Quindi non ſi è penſato ad altro per cura de' ſuoi micidiali effetti che a preſcrivere non ſo con quanta utilità volatili rimedj, focoſi, ed aleſſifarmaci. Ma un freddo alimento, viſchioſo e craſſo, quantunque copioſo, non può nello ſtomaco altro produrre, che inappetenza e gravezza; non mai ſintomi che dentro paſſino ad offendere i nervi. Quindi è che i moderni nella introdotta libertà di filoſofare hanno più toſto una contraria opinione imaginata ed accolta: che

---

(*a*) V. *Morgagni* de ſed. Morb. epiſt. 59. art. 14. e Sauvages Noſol. tom. 2. pag. 187.

(*b*) De ſucc. bon. cap. 4.

il veleno de' funghi cioè conſiſta anzi, tutto all'oppoſito, in una ſottile focoſa e cauſtica acrimonia. *Utut quædam fungorum ſpecies inter edulia concedi poſſint*, dice l'Offmanno, *tamen non plane expertes ſunt malignæ cujuſdam acrimoniæ, præſertim ſi non bene elixentur vel præparentur*; e poco dopo: *ſymptomata, quæ celeriter in ventriculi & inteſtinorum tunicis, & cæteris corporis membranaceis & nervoſis partibus fungi concitant, ab acrimonia ſubtili cauſtica provenire, vel id argumenti eſſe poteſt, quod exſiccati & bene cum aqua calida eloti non ita nocent &c.* (*a*). I ſintomi per verità, che i funghi infetti producono, ſono ſintomi e ſegni di acrimonia; e di un' acrimonia veneſica, ſe ſi attendano quelli che s' aggirano d' intorno ai nervi e conturban lo ſpirito. Ma queſta acrimonia poi, queſto veleno non dimoſtrano eſſi nello ſtato lor naturale, nè all' odore acuto, nè al ſapore ingrato, nè al brugiore che facciano in bocca. Anzi tutto all' oppoſito ſembrano del tutto inſipidi e freddi: *prope accedunt ad cibos inſipidos*, dice Galeno, *& nulla inſigni qualitate ſunt præditi* (*b*). Conſultiamo l' analiſi chimica per vedere ſe qualche coſa di più ci dimoſtri. Queſta l' abbiamo eſatta e compiuta nel Geoffroy. *Ex fungorum campeſtrium vulgatiſſimorum, eſculentorum, recentium lib. v. per retortam deſtillatis, prodierunt humoris limpidi, fungorum odorem & ſaporem referentis, magis ac magis ingrati, ac tandem pauliſper urinoſi obſcure alcali & ſubſalſi lib. j. unc. XIV. dr. vij. gr. XX. humoris limpidi minus odori & ſapidi, ſubſalſi & alcali urinoſi unc. xj. dr. vij. gr. xij. humoris ruſi, deinde fuſci, empyreumatici ſale volatili urinoſo copioſo impregnati unc. j. dr. ij. gr. XLvij. olei fluidi & limpidi dr. vj. gr. XLij. ſalis volatilis urinoſi concreti dr. ij, gr. X. maſſa nigra in retorta reſidua pendebat unc. j. dr. IV. gr. LXI. quæ rite calcinata cinerum reliquit ʒ. vj. gr. XLviij. ex quibus lixivio ſalis fixi mere alcali dr. iij. gr. XXIX. in calcinatione dr. vj. gr. viij.* In queſta prova non ſi rileva nei funghi tanta acrimonia, quanta ſe ne trova in altre ſoſtanze acri, che non nuocono allo ſtomaco e ai nervi: ed i volatili e ſtimolanti principj che pur

---

(*a*) Med. Syſt. tom. 2. pag. 152.

(*b*) De alim. fac. lib. 2. cap. 69.

vi ſono, ſono da gran copia di flemma contemperati. Tale è anche il ſentimento dello ſteſſo *Geoffroy*. *Fungi ſalem ammoniacalem eſſentialem continere videntur, cujus acidum ſale volatili urinoſo copioſo ſaturatum eſt, & cum oleo copioſo ac pauca terra conjunctum. Hæc principia magna phlegmatis copia diluuntur* (*a*). Dunque l' acrimonia veneſica de' funghi non è ad eſſi naturale; e qualora l' abbiano, conviene di eſſa fuori di eſſi cercarne l' origine e la cauſa.

Li 15 ottobre dell' anno 1784 quattro perſone ebbero al pranzo de' funghi di varia ſpecie, per la maggior parte tutti bianchi, detti *funghetti*. Con ogni cautela furon queſti purgati e nettati, e poi in molta acqua bolliti, e poi con olio al ſolito ricotti e fritti. Tutte quattro queſte perſone ebbero poco dopo dolori di ſtomaco e di ventre, gonfiezza enorme di queſte parti: tre ebber vomiti perpetui e perpetuo ſcorrimento di ventre. Paſſarono la notte in veglia, e la mattina del dì ſeguente ſono io ſtato chiamato alla lor cura. Preſcriſſi ad ognuna una buona doſe di ſciloppo di roſe ſolutivo, allungato con acqua ſtillata di meliſſa: raccomandando loro che aveſſer cura di bere fra il giorno una gran quantità di ſiero di latte ſemplicemente colato. Servì il medicamento di purgante inſieme e di emetico; e nel vomito tre mandarono fuora rimaſugli di funghi indigeſti. Guarirono tutti felicemente, fuorchè ad una Signora più avanzata in età rimaſe una ſtupefazione nel cerebro, che per qualche giorno dappoi la tenne ſonnacchioſa e ſtordita. Ebbi campo di eſaminare un reſiduo de' medeſimi funghi per ſorte reſtati ancor crudi. E trovatili per niente patiti o corroſi, li riſervai chiuſi in una camera ben diſeſi e cuſtoditi dalle moſche. Dopo tre giorni ſenza dar ſegno di corruzione mandarono fuori una gran quantità di piccioliſſimi vermi corti, tutti bianchi col capo nero, alquanto minori del baco da ſeta quando eſce dall' uovo. Ecco in che conſiſte il veleno de' funghi: nelle uova cioè, o ne' vermetti che dentro di eſſi ficcano o depongono i vermi o le farfalle; ovvero ſia in quel fetido ſtoma-

---

(*a*) Mater. Med. par. 2, de veget. ind. pag. 263.

chevole liquor ſeminale che ſpruzzano le madri nel deponere i figli o le uova, il quale per ventura ſerve a tener lontane le altre beſtiole dal cibarſeli . E' dunque il veleno de' funghi veleno d' inſetti: a cui ſe piaccia aggiungere il piſcio o la bava d' altri venefici animali, ciò non repugna al noſtro ſiſtema. E' noto come quaſi tutti gl' inſetti ſiano velenoſi, e gli ſcrittori, che parlano univerſalmente dei veleni, fanno parte de' loro trattati il velen degl' inſetti. *Inſecta plurima*, dice il *Sauvages*, *vires fere venenatas habent* (a). Sembra dato il veleno agl' inſetti, inermi che ſono, per propria difeſa, e per offeſa d' altrui; ſtantechè come canta un Tedeſco

Dieſs iſt in die natur gegeben,
Und jederzeit der Welt ihr Lauf:
Der eine muſs vom andern leben,
Der gröſſre friſſt den kleinern auf.
Wer nicht die macht hat ſich zu wehren,
Der laſs ſich mit Geduld verzehren.
E' legge di natura ſtabilita:
Così van le faccende in ſu la terra.
Ognuno della altrui vive ſua vita;
Il grande al piccol fa perpetua guerra.
Chiunque forza non ha che lo difenda,
Si laſci divorar, e grazie renda.

Non fu raro accidente che io mi abbia veduti vermicini uſcire dai funghi. Le donne, che cercano e preparano alla cottura i funghi, il ſanno; le quali rigettano i fracidi o troppo adulti, gli ſpaccano per oſſervarli diligentemente, perchè appunto ſono facilmente verminoſi. Quindi è che io non nella ſola ſpecie de' vermetti capineri da me veduti, ma in altre ſpecie ancora ripongo il veleno de' funghi: ognuno ſapendo, per poco che ſia verſato nella ſtoria naturale, che ove ſono per terra ſoſtanze molli, ſemiputride, moccioſe, ivi le farfalle volentieri depongono i loro parti, perchè ſiano naſcoſti agli altri che li divorano, e perchè nati abbiano toſto onde nutrirſi. Ma nella ſteſſa maniera che io non determino il veleno ad una ſpecie d' inſetti ſola, nè meno l' affiggo ad ognuna di eſſi : potendo darſi facilmente che qualcuna più, qualche altra meno, qualche altra niente ſiano nocevoli: come nei peſci ſi trovano uova innocenti, ed uova veneſiche: quali ſono ſegnatamente quelle del barbio.

(a) Noſol. tom. 2. pag. 338.

E' dunque il veleno de' funghi propriamente veleno animale. E però come i funghi ſono ſtati liberati dall' infamia di una ſozza o ſpuria origine; meritano altresì giuſtamente di eſſere diſcolpati dall' eſſere per ſe ſteſſi periglioſi e veneſici. Che ſe molte ſpecie di funghi ſi danno, le quali, anche non verminoſe, non ſono atte a mangiare; queſto è perchè ſono diſguſtoſe alla bocca, ed inette allo ſtomaco, non già perchè contengan veleno. A nuocer vengono in copia ingollate, ed i danni che recano non ſono offenſivi de' nervi e della vita. Veleno è ciò che toglie la vita ſotto minima quantità: *venena eatenus dicuntur, quia ſub minima mole ſtrages in corpore excitant* (a).

Trattandoſi qui d' un veleno animale, procedente forſe da varia ſpecie di animali, inviſibile, ed in minima quantità ſommamente nocevole, ſono diſpenſato dal definire la ſua indole ſpeciale, e le ſue differenze: mentre non cade eſſo ſotto ai ſenſi, nè ſoggiacer puote a chimico eſame, nè eſaminarſi quando, e quantunque volte ſi voglia. Mi baſta dire ch' eſſo è una ſoſtanza ſommamente inimica della natura dell' uomo, ed offenſiva de' nervi e degli ſpiriti: contro di cui con tutta la loro poſſanza s' allarmano, introdotto che ſia, le forze vitali, per ſtaccarlo, dividerlo, invoglierlo, ſterminarlo fuori del corpo. Dirò di più, ch'è una ſoſtanza indomabile, e così tenace della propria indole, che ſpeſſo a tante forze reſiſte, ed uccide. Non è glutine che con acquoſi ſi ſtemperi, non è acre che con acidi ſi attutiſca, non è acido che con alcalici s'ammanſi, non è ſale, non è zolfo, che con ſale, con zolfo ſi uniſca e ſi aſſocj. Egualmente irrita i nervi, e gli affaſcina: egualmente riſcalda il ſangue in acute, e lo ritarda in rigorifiche febbri. Fa ſonnacchioſo l' uomo, e lo tiene ſvegliato: lo fa cadere in deliquio, e lo agita in convulſioni: lo fa furibondo, e lo rende ſtolido e ſcimunito. Fa dolori acutiſſimi, e fa egualmente una morta ſenſibilità. Da queſti contrarj effetti non vien permeſſo al più acuto filoſofo il penetrare qual ſia la ſua indole, quali qualità fra le note predominino in eſſo.

(a) Sauvag. Noſol. tom. 2. pag. 337.

Se non che potrei per ventura dolermi di aver taciuto anzi tempo, ſe almeno non cercaſſi, ſe i vermetti vivi introdotti nello ſtomaco vengano a nuocere in noi in quanto ſon vivi. Secondo le dottrine del *Vallisneri* non poſſono far gran danno, perchè a lungo viver non poſſono. *Se inghiottiamo*, dic' egli, *le uova de' vermi de' frutti, delle bevande, de' cibi, dell' aria, come certamente moltiſſime ne inghiottiamo, o non naſcono in noi, o ſe pure ancora naſceſſero, che non credo, gli appena nati teneri vermicelli per difetto del proprio alimento, e del loro nido proporzionato, o dell' aria aperta e sfogata, perirebbono; o dal noſtro calore e fermenti attiviſſimi ſarebbono uccisi... Non vivono quei de' pomi, ſe levandogli dal frutto volete far loro mangiare delle foglie degli ſteſſi pomi; o quei delle foglie ſe vorrete che ſi cibino de' frutti, e così dica di tutti gli altri; e poi vorranno che entrati nel noſtro corpo, cangiando in un ſubito genio e natura ſi nutriſcano di ſughi non ſolo totalmente differenti ma ancora contrarj* (*a*)? Sia però detto con pace di tanto uomo, non ſembran forti queſte ragioni. Si vuol qui ſtretta la natura a leggi e confini, ch' ella forſe non tiene e conoſce. Mal ſaria proveduto alla ſuſſiſtenza delle ſpecie, ſe mancato un tale determinato cibo, un altro non ſe ne poteſſe ſoſtituire. Veggiamo le piante, cangiato clima e terra, cambiar figura, ma pur almeno per qualche anno ſuſſiſtere. Una Donna, a cui io avea ordinato un emetico, reſe me preſente in un forbito bacile con molta flemma una tarma da farina grande ed adulta: e reſtò con ciò ſtabilmente libera di una colica che da qualche tempo la moleſtava. Un bruco nel mio orticcino, cangianteſi in nero ſcarafaggio, divorò tutte le foglie di un perſico: morinne la pianta, e nel ſeguente anno comparſe il bruco in terra a paſcerſi ſopra il lappaccio, e vi ſubì tutti

---

(*a*) Oper. tom, I. pag. 119. 134.

tutti i ſuoi cangiamenti. Simili fatti furono contrappoſti al ſiſtema del *Valliſneri* dal Padre *Borromeo* (*a*). Alla giornata ſi veggono uſcire dal corpo dell' uomo e per vomito e per feceſſo, e per tumori aperti, vermi che non ſomigliano alle note ſpecie proprie di lui. Ed i vermi abitatori della pelle detti *crinoni* e *comedoni*, rariſſimi a vederſi nelle noſtre contrade, ſi trovano frequentiſſimi e moleſti in certe miſere popolazioni che dormon per terra, e ſi credono da tutti provenir dalla terra. Dalla terra ſi crede non ſenza ragione che ſi inſinuino nelle narici delle pecore certi vermi ad eſſe comuni; e quelli ancora che paſſano nel loro fegato a farlo pieno di tumoretti verminoſi. Il pretendere queſti vermi ed altri cotali, che s' inſinuano nell' ano de' cavalli, figlioli di altri che prima erano eſſi pur nati colà dentro queſti animali, è dura coſa il doverlo credere. Quanto poi alla chiuſa aria de' noſtri corpi, al calore noſtro, ai fermenti del noſtro ſtomaco, tanto poco queſte coſe ſono temute dai vermi, che ſi trovano queſti talvolta abitare dentro le tonache delle grandi arterie preſſo al cuore, ſenza libero commercio coll' aria eſterna, e nel maggior bollore del noſtro ſangue (*b*). E dentro lo ſtomaco e gl' inteſtini di più ſpecie abitano i vermi, che non temono d' inſinuarſi talvolta, non ſi ſa come, ſin dentro la veſcica urinaria, d' onde vivi ſortire ſenza ſegni d' interna leſione, come qui abbiamo veduto in un Fantolino: che non temono d' inſinuarſi ne' canali климатиоſi ſin dentro al fegato, con dar morte ad un Cavaliere: che non temono d' inſinuarſi per le trombe di *Euſtachio* e ſortire per le orecchie, come abbiamo parimenti veduto: che nè la piccante urina ſalata, nè l' amaro fiele o il cerume ſon da eſſi temuti.

Ma per un' altra più forte ragione ſiamo neceſſitati a rinunciare alla credenza, che il veleno de' funghi conſiſta nella offeſa che fanno allo ſtomaco vermetti viventi. La ragione che fa una inſuperabile oppoſizione ſi è, che funghi ſpac-

---

(*a*) Valliſn. ib. pag. 319.
(*b*) *Morgagni*, epiſt. anat. 9. n. 46.

cati e diviſi, fatti bollire lungamente nell' acqua, e poi fritti nell' olio, conſervano non oſtante il loro veleno. Queſte sì ſon cauſe che fanno morire gl' inſetti: e tolgono alle lor uova la voglia di naſcere. Il ſolo calore del ſole eſtivo ammazza ne' bozzoli l' aurelia del baco da ſeta, ne' grani di frumento eſtingue quell' uovo, che occultamente produce un verme, che riſcalda il grano, e tutta ne divora la ſoſtanza interna, da cui eſce poi volando a primavera. Il calore dell' acqua che bolle, è maggiore del calore del ſole, e quello dell' olio bollente ſupera di gran lunga quello dell' acqua. Non iſtà adunque nella vita degl' inſetti la forza del veleno de' funghi.

In queſto noſtro ſiſtema ſi rende facil ragione di alcuni fenomeni che accadono nel propoſito del veleno de' funghi, e ſi ſpiegano felicemente gli effetti che dentro il corpo noſtro produce. Si rende facil ragione perchè niun tempo, niun ſito, niuna ſpecie di funghi vada ſicura ed eſente dal veleno: cioè perchè ſon tutti i funghi e ſempre, e dovunque eſpoſti agl' inſetti. Si rende facil ragione perchè fra cento volte che ſi mangiano funghi, una ſola volta s' incontri a trovarli infetti: cioè perchè rade volte nella effimera lor vita s' incontrano pronti inſetti che gli avvelenino. Si rende facil ragione perchè la loro malizia non vada a gradi d' infezione minimi e maggiori, ma per ſalto dalla innocenza alla velenoſità: cioè perchè o è, o non è ſtato a loro comunicato il veleno. Si rende ragione perchè eſſi ſotto un buono aſpetto ſiano nocevoli: cioè perchè ſotto il miglior aſpetto poſſon covare il veleno. Si rende in fine ragione perchè ben lavati, bolliti e fritti, non oſtante poſſano ritener il veleno: cioè perchè non conſiſte queſto in alterazione dei loro ſughi, ma perchè è vero veleno, tenace della propria ſua mala natura ed infezione.

Inghiottito coi funghi queſto veleno, le prime impreſſioni ſue ſon nella bocca e nella gola. Queſte parti roſſigne per natura e ſenza cute ſi caricano di un roſſo più atro ed illividiſcono. Lo ſteſſo, chi poteſſe vedere, ſuccede dentro l' eſofago. E però ben toſto accolto il veleno, ſi ſente qui lungheſſo un prurito, un calore mordace, uno ſtrignimento ſoffocativo, per l' irritamento e per la contrazione delle fibre nervee e muſcolari; che intereſſano il reſpiro con tirare in conſenſo la faccia poſteriore della trachea dov' è conneſſa con l' eſofago, e manca degli anelli, o frammenti di circolo, cartilaginoſi, che la tengono aperta. Queſto è un ſintomo molto ordinario del veleno dei ſunghi, notato fra i primi e principali dallo ſteſſo *Avicenna*: *Et accidunt ex eis ſtrangulatio & conſtrictio anhelitus* (*a*). Queſto ſintomo ben tre volte l' ho veduto ſuccedere all' uſo di quel grano, volgarmente detto *fava di S. Ignazio*. Uſando io di queſto rimedio o veleno che ſia, per cura delle febbri periodiche, fo bere per due o tre giorni di ſeguito una tazza d' acqua in cui per un giorno intiero ſia ſtata infuſa la fava. Serve molto bene all' intento, ſenza produrre veruna moleſtia, nè veruna ſenſibile evacuazione. Ma un Giovane che per errore bevè tal acqua dove la fava fu infuſa per due giorni intieri, fu a pericolo di ſoffocarſi, e già ſi tenne per iſpedito per avere tutta la macchina in convulſione. Eſcì in breve ora di pericolo, e fu libero d' antiche febbri moleſte. Una fava nuova non più uſata con la ſemplice infuſion breve di dodici ore produſſe il medeſimo pauroſo effetto a due Fantolini, uno afflitto dalla terzana, e l' altro dalla quartana, a troppo caro coſto liberandoli dalla febbre. Si vede con quanta ragione gli Autori ne beſtemmino l' uſo in ſoſtanza, la quale vien ricordata da alcuni grattugiata al peſo di otto o dieci grani. Un giovine Geſuita in Parma, il quale non ſon molti anni facevane diſordinato uſo, fu trovato morto a piè del letto. Ad una Signora travagliata da febbri periodiche fu data da un Frate una mezza caſtagna dell' Ipocaſtano, grattugiata in tazza d' acqua. Sentì queſta eſſa pure poco dopo lo ſtrozzamento deſcritto con tanto affanno e paura, che mi aſſerì coſtantemente che ſaria morta, ſe per fortuna nell' atto ſteſſo non aveſſe per vomito rigettato l' inſano medicamento. Soprattutto però fu ordinario e comune nell' anno 1782 queſto moleſto ſenſo di ardore ſoffocativo lungheſſo al collo e allo ſterno, nel catarro epidemico univerſale. Tal fu nell'

(*a*) Op. tom. 2. pag. 207.

epidemia dell' anno 1743 ſecondo l' *Huxham*, ed in quella dell'anno 1762 ſecondo M. *Saillant*. *Omnibus adfuit pectoris quædam ſtrictura & gravitas permoleſta* (*a*). „ Tous en général ſentoient une ardeur très-vive le long de la trachée-„ artere juſqu' au cartilage xiphoide: quelques-uns la reſſen-„ toient le long du goſier juſqu'à l'eſtomac, comme ſi l'eſo-„ phage eût été enflammé de même que la trachée-artere (*b*). Ippocrate ſteſſo notò queſto primo effetto de' funghi: *Pauſaniæ filiam ex crudi fungi eſu anxietas tenebat, ſtrangulatio, dolor ventris* (*c*).

Dov' è uno ſtimolo, un irritamento, ivi accorrono non ſo per quale meccaniſmo in copia affollati gli umori. S' intende queſto ſe ſiano preſenti numeroſi canali che ve li portino; altrimenti i ſiti irritati ſi contraggono e riſſeccano. In bocca, e nell'eſofago, e dentro lo ſtomaco ſono naturalmente aperti molti canali che dan luogo a fluire in copia la ſcialiva, e gli umori gaſtrici; maſſimamente in tempo che ſi maſtica il cibo, e s' inghiotte. Tocche queſte parti dal veleno, piovono copioſa umidità glutinoſa; ed ecco come dai funghi infetti naſca e producaſi una copia abbondante di ſcialiva e di muco, che fa un facile ptialiſmo, e ſi rigurgita dallo ſtomaco: che è parimenti uno de' primi effetti del loro veleno.

Il terzo effetto meſſo da *Ippocrate* ſono i dolori di ſtomaco e di ventre. Ma io credo che ſia da preporre con *Avicenna* ai dolori la diſtenſione flatuoſa: mentre i dolori più che da altro dal flato provengono. Diſceſa allo ſtomaco la velenata maſſa, ed in parte diſtribuita per il lungo tortuoſo canale degl' inteſtini; ſecondochè più o meno è applicata e ſi ferma ad irritare le interne tonache, mette qua e là coſtrizione e ſpaſimo che rinſerra a certi tratti l' aria: che quindi per eſſere elaſtica ſi dilata e creſce, ed enormemente diſtendendo forza le fibre con loro dolore ad allungarſi. Così in un tempo ed il flato naſce, e tormentano i dolori. Queſti dolori ſono da *Avicenna* ſpiegati col nome di pungimen-

---

(*a*) De aer. obſ. 1743.
(*b*) Tabl. pag. 75.
(*c*) Epid. 7. n. 89.

ti, ma più ſomigliano al morſo. E queſto è per l'irritamento e calore che fa il veleno inchiuſo e fermato. Queſta diſtenſion flatuoſa, queſti dolori furono molto maggiori in una delle quattro nominate perſone; nella quale fu tardo il vomito e niuna la diarrea. Il *Boeravio* cerca perchè mai certi veleni più offendano lo ſtomaco che le altre parti del corpo. Non ſa di queſto fenomeno altra miglior ragione trovare, che in credere i nervi del ventricolo dotati di ſpeciale e più viva ſenſitività: *ergo ventriculus ejuſque nervi ab auctore naturæ donati ſunt poteſtate inexplicabili ex natura nervorum, ita ut venenum in ventriculo, tale non ſit alibi* (a). Io credo però che queſto ſia unicamente per l' ampiezza e poſizione del ventricolo ſtrettamente ſerrato al piloro; per cui fan dimora più lungamente le velenoſe ſoſtanze, e maggior impreſſione. Si vede che queſte diſceſe agl' inteſtini non ceſſano di eſſer dannoſe, ma eſſi pure offendono, diſtendono, corrodono e sfracellano; producendo borbottamenti, coliche crucioſiſſime, diarrea e diſſenterie micidiali: eſſendo colà dentro, come nello ſtomaco, egualmente ſenſibili i nervi. Spiego io in queſta maniera la diſtenſione del ventre, non trovando ne' funghi quelle qualità che poſſano dare aria elaſtica o fiſſa, fermentando o putrefacendoſi. *Ventriculi*, dice l' Allero, *a veneno ſumpto irritati, & clauſa habent accurate oſtia, & ſunt diſtentiſſimi: ea venena aerem non generarunt, ſed irritarunt ventriculum* (b).

Sviluppandoſi a poco a poco il veleno dentro allo ſtomaco, ed applicandoſi inceſſantemente all' interna ſua ſuperficie, s' accreſce per l' irritamento la forza contrattile delle ſue tonache, e tirato in conſenſo il diaframma, ed i muſcoli dell' addomine, alla forzata coſtrizione del ventricolo ſuccede il vomito: ottimo provedimento della natura per liberarſi per la via più breve di ciò che dentro le nuoce. Come degli uomini chi più chi meno (ſecondo hanno in una o altra maniera configurato il coſtato davanti, e ſecondo hanno più o

---

(a) De morb. nerv. pag. 183.
(b) Phyſich. tom. 6. p. 185.

men forti i muſcoli, ſenſitive od irritabili le fibre) ſono inclinati e facili al vomito: in chi queſto prontamente e pienamente ſuccede, ſottraeſi l' eſca al foco, previenſi l'infiammazione e la cangrena; e preſto, tolta la cauſa del male, ſon ſalvi dal rio veleno. Rade volte però così fortunatamente accade prima che una porzione della venefica materia, dal primo irritamento ſollecitata per la diretta via, non paſſi a far ſentire i ſuoi triſti effetti agl'inteſtini. Onde il più delle volte ben preſto al vomito ſuccede la diarrea, e la diſſenteria. Evacuazioni anch' eſſe utili, ma non tanto quanto il vomito: perchè nel lungo tratto e nella tortuoſità degl' inteſtini ſi dà campo al veleno di ſvilupparſi del tutto, e di ſpiegare internamente ogni ſua rabbia. Se ſuperficiale ſia e paſſeggiera di uno in altro ſito la infezione, ſi viene in fine ajutando l'accorſo perenne, che ivi ſi fa di umori, a brevemente uſcire di pericolo: altrimenti s' infiammano le parti tocche dal veleno, e le vicine; e s' infiammano di tal ſorte d' infiammazione, che preſto paſſa il morbo alla cangrena ed alla morte.

Più difficile ſi è render ragione della itterizia che gli Autori riferiſcono di aver qualche volta veduto a ſuccedere al veleno dei funghi. Se queſta è paſſeggiera e breve, può ſpiegarſi per una convulſione che ſtringa e ſerri il condotto del fiele all' inteſtino duodeno. Ma ſe ſtabil rimane anche dopo diſtrutto il veleno, dobbiamo ad altra cauſa ricorrere, che una convulſion breve non può nè onninamente nè ſtabilmente chiudere il detto canale. Io ſono più inclinato a credere che in tal caſo ſi debba incolpare un qualche calcolo che ſia per accidente nella veſcichetta del fiele. Facile è allora il conoſcere come per forza di uno ſpaſimo, che ſerra, venga forzato il calcolo nel condotto bilioſo e ſtabilmente del tutto l' otturi: onde ſia coſtretto il fiele a rigurgitare nel ſangue: dove depoſitato alla pelle la tinga di un color dorato; per cui i latini diſſero il morbo *Aurigo*. Quel colore però ch'è bello a vederſi nell'oro, è brutto nella pelle, *non enim hominem decet, quod in lapide pulchrum fuerit*, come diſſe l' *Areteo* a queſto propoſito (*a*). E' coſa molto ordinaria il trovarſi di queſti calcoli ne' cadaveri anche di quelli che in vita non aveano patito d' itterizia. Il *Morgagni* nell'ultima ſua grande Opera ne accenna diecinove eſempj da sè ſolo veduti (*b*). Nel ſopra addotto caſo di M. *Lemonnier*, perchè l' itterizia ſucceſſa al veleno dei ſunghi non fu per calcolo, fu effimera di poche ore.

Ma già un altro ordine di ſintomi cominciano ad apparire, che tutta rivolgono a sè la noſtra attenzione; eſſendo tali che ben chiaro dimoſtrano eſſere il veleno dallo ſtomaco penetrato a contaminare il ſangue, ad infettare gli ſpiriti, a convellere i nervi. Primi ſono i deliquj d' animo. In queſti ſi rallenta il reſpiro, ſi oſcura il polſo, ſi perdono le forze, e ſi copre il volto di un pallor di morte. Naſcono per l' indebolimento dei moti alterni del cuore per cauſa di venefiche particelle oſtili che iſtupidiſcono i nervi. Son facili ad accadere anche per il ſolo difetto dello ſtomaco, quando per viziofe fermentazioni ſi forma in eſſo un' aria fiſſa nemica dello ſpirito vitale. In tal caſo preſto ſi ſciolgono, quando l' aria eſce per rutto o paſſa agl' inteſtini. Le donne dicono che ſi ſtacca qualche coſa dallo ſtomaco. Chiunque voleſſe ſapere qualche coſa di più ſu queſto articolo, legga la grande Opera di M. *Senac* al libro quarto, capo decimo terzo. Oppure il libro in forma di Catechiſmo, ultimamente ſtampato in Parigi per ordine del Governo, ſcritto da M. *Gardane*, in cui degli ſvenimenti unicamente ſi tratta.

Da queſto ſtupore o intormentimento dei nervi naſcono la proſtrazione di forze, e l' inſuperabile ſenſo di frigidità agli eſtremi. Contro di queſti ritardamenti ſi rialza la natura con movimenti convulſivi idonei a rimovere un fatale riſtagno di umori. Gli ſtimoli di una materia irritante ſparſa nel ſangue, e forſe anche ne' nervi, eccitano le arterie ed il cuore a più frequenti contrazioni, onde naſce la febbre: ma queſta nel tempo ſteſſo è impedita dagli ſpaſimi, e dalla freddezza de' nervi. Non può perciò alzarſi il polſo, che malgrado la febbre ſi rimane piccolo e riſtretto. In queſto contraſto

---

(*a*) Lib. 1. cap. 15.
(*b*) Epiſt. anat. med. 37. art. 27.

di oppoſte forze patiſce l' infermo anguſtie ed affanni intollerabili, freme, delira, e teme; o vinto dal morbo dorme tranquillamente di un mortale ſopore inſuperabile, come ſe foſſe apoplettico. Se muore, ha prima delle macchie livide o gialle nella ſuperficie del corpo; e dopo morte ſi ſcoprono nel ſuo ſtomaco e negl' inteſtini nere impreſſioni, che ſono ſegni di una univerſale cangrena. Chi ſopravvive a tanta pena, attribuir dee la ſua ſorte al vomito, alla diarrea, al facil ſudore, che ſoli poſſono aſportare con sè dal corpo il rio veleno introdotto: ma porta con sè a lungo i ſegni d' eſſerne ſtato tocco e malaffetto.

L' oppio fa il ſonno, il lauro ciliegio la paraliſia, la tarantola voglia di ballare, il ranuncolo ſcellerato il riſo ſardonico, le cantaridi il brugior d' urina; e molti altri veleni ſingolari e ſpeciali effetti producono. Il ſolo veleno dei funghi contiene in sè la malizia di tutti, e varj moltiplici effetti produce ſecondo che è in maggior copia ingollato, ed in maggior copia dentro le vene s' intrude.

PARTE SECONDA

Qual ſia il Preſervativo del veleno dei Funghi.

Un rio veleno atro indomabile, che ſta naſcoſto ne' funghi, dal ſolo uomo non temeſi. I buoi, le capre, le pecore, i cavalli, che ſi nutrono ſenza paura d' ogni ſorte di piante, il ſolo fungo, che pur è pianta al pari dell' altre, e dai ſuoi proprj ſemi naſce e creſce, il ſolo fungo riſpettano, e lo laſciano qualunque ſia e di qualunque ſpecie intatto ne' campi e ne' prati, per paſtura di vermi, e delle formiche: quaſi per paura del ſuo veleno. L' uomo non per neceſſità di vitto, ma per non ſo quale ghiottoneria, ſtanco e ſazio di cibi eletti migliori, ne fa alle menſe ſue parte: e ſi legge tal cibo deſiato ogni giorno da Papi e Imperadori. Vedete là Tiberio Ceſare cruciato da dolori dopo mangiati i funghi eſalare lo ſpirito (ſe pur d' altra ſpecie non fu il velen che l' uccise). Nerone il ſa, e vede nella ſua corte ammazzati dai funghi il prefetto de' vigili, i tribuni, i centurioni; ma non ceſſa per queſto di chiamare i funghi cibo degli

degli Dei. Papa Clemente VII. il ſa, ma vuole ogni giorno tal vivanda alla menſa, ſinchè egli ſteſſo, per quanto alcun penſa, avvelenato ne muore. Gli uomini da queſti e da altri quotidiani eſempj moltiſſimi avviſati non imparano ad aſtenerſene: che ſembra innata la preſunzione nell' uomo di affrontare più toſto che di fuggire i pericoli. Quindi veggiamo teneri fantolini arrampicarſi ſu alti e fragili alberi, sdrucciolare ſu gelate acque, traſcorrere vive fiamme acceſe, attraverſare cavalli in corſo. Nè ſon più ſaggi gli adulti, che nulla temendo di eſſere sbranati, ſommerſi, precipitati, lottano con beſtie irate, premono ſu tarlati legni il dorſo al mare, s' alzan nell' aria appeſi a mal ſicuri palloni.

Abbondano nelle piazze venali d' ogni ſorte, ed in ogni ſtagione i funghi, perchè trovano compratori. Nè li Magiſtrati che vegliano alla ſalute de' popoli tal merce proibiſcono:

Argentum atque aurum facile eſt, lænamque, togamque
Mittere, boletos mittere difficile eſt. Mart.

Voluttuoſo veleno, chiamolli Seneca (*a*), e Plinio, *quæ voluptas tanta ancipitis cibi* (*b*)?

Poichè adunque da tanti eſempj, in tanti ſecoli non ſi ſono perſuaſi gli uomini a laſciare tal cibo, poca ſperanza è che lo laſcino in avvenire. Umana coſa è dunque il cercare ſe ſiavi in natura un qualche preſervativo che lo renda meno nocevole, e trovatolo inſegnarlo ad eſſi per loro ſalvezza.

Ai ſeguenti capi ſi può ridurre e reſtringere il preſervativo dai funghi avvelenati

1 Alla ſcelta della ſpecie, 2 al ſito ove creſcono, 3 al tempo della loro età, 4 al purgarli bene, 5 al farli lungamente bollire, 6 allo ſperimento del loro ſapore, del pane, e dell' erbe con eſſi bolliti, 7 al friggerli in olio bollente, 8 agl' ingredienti correttivi, 9 al mangiarli dopo altre vivande, 10 al mangiarne parcamente, 11 al ſoprabbere copioſa umidità, 12 all' eſercizio del corpo dopo il paſto.

Franceſco Seguieri ad otto ſommi generi riduce tutt' i fun-

(*a*) Epiſt. 95.
(*b*) Hiſt. nat. lib. 22. cap. 23.

ghi, che ſi uſano per cibo in queſte contrade. Il fungo propriamente detto, il porcino, il boleto, il pſeudoboleto, il coralloide, l' agarico, il licoperdo, il tartuffo. Queſti ſi dividono quaſi tutti in altre ſpecie. Vi ſono quattro ſpecie di fungo propriamente detto. 1 *Fungus pileolo lato & rotundo.* C. B. Pin. 370. che diceſi volgarmente *funghetto.* 2 *Fungus anguloſus & veluti in lacinias ſectus.* C. B. Pin. 371 volgarmente detto fungo giallo, e *ſpongiola gialla.* 3 *Fungus eſculentus, pileolo ſuperne rubro, inferne primum albo, deinde obſcure luteo, pediculo longiore & craſſiore ſemper albo.* Mich. N. Pl. Gen. 155. volgarmente *fungo roſſetto.* 4 *Fungus eſculentus, ex uno pede multiplex, ſeu lutei palleſcentis coloris, pileolo ſemiorbiculato, viſcido, pediculo cilindrico.* Mich. N. Pl. Gen. 191 volgarmente *funghi chiodetti.*

Il porcino è di una ſpecie ſola. *Suillus eſculentus, ſuperne pulchre fulvus, inferne citrinus & ſubtiliſſime perforatus.* Mich. N. Pl. Gen. 128 n. 9 volgarmente *preſſanella.*

Del boleto vi ſono tre ſpecie. 1 *Boletus eſculentus, rugoſus, fulvus.* Mich. N. Pl. Gen. 203 volgarmente *ſpongiola.* 2 *Boletus eſculentus, rugoſus, albicans, quaſi fuligine infectus.* Mich. N. Pl. Gen. 203. 3 *Boletus eſculentus rugoſus, amplior & orbicularis.* Mich. N. Pl. Gen. 203.

Del pſeudoboleto è una ſpecie ſola. *Phalloboletus eſculentus, pileolo parvo conico, ex fulvo ſubobſcuro, pediculo leucophæo fiſtuloſo.* Mich. N. Pl. Gen. 203.

Il coralloide è pur un ſolo. *Coralloides flava.* Mich N. Pl. Gen. 209 volgarmente *manine.*

Sei ſpecie ſono di agarico. 1 *Agaricum eſculentum caſtaneæ adnaſcens, latiſſimum, hepatis facie, ſuperne ex rubro ferrugineum, interne ſanguineum, ſubtus ochroleucum.* Mich. N. Pl. Gen. 117. 2 *Agaricum eſculentum, ſquamoſum glabrum, ſuperne obſcurum, inferne ſubalbidum & lamellatum* Mich. N. Pl. Gen. 122. 3 *Agaricum, ſive fungus laricis.* Mich. N. Pl. Gen. 110. 4 *Agaricum igniarium, agarici officinalis facie, ſed non amarum, ſuperne ex albo cinereum & glabrum, inferne primum ejusdem coloris, deinde obſcurum, argutiſſime & denſiſſime perforatum foraminulis rotundis.* Mich. N. Pl. Gen. 118. 5 *Agaricum quercubus & ilicibus adnaſcens, ferrugineum & glabrum, inferne album, argutiſſime & denſiſſime perfora-*

tum foraminulis rotundis. Mich. N. Pl. Gen. 118 volgarmente lingua di rovere. 6 *Agaricum ſquamoſum, ſuperne cinereum & glabrum, inferne lamellatum & album*. Mich. N. Gen. Pl. 123.

Il licoperdo è di due ſpecie, in certi ſiti ſolamente uſato per cibo. 1 *Lycoperdum alpinum maximum, cortice lacero*. Inſt. R. H. 563. 2 *Lycoperdum vulgare*. Inſt. R. H. 563.

Il tartuffo è un ſolo, e diceſi *tuber*. Matth. 544. Il *Micheli* lo divide in *tuber brumale, pulpa obſcura odora;* ed in *tuber æſtivum, pulpa ſubobſcura minus ſapida ac odora*. N. Pl. Gen. 321.

Fra tutti queſti generi e tutte queſte ſpecie di funghi il ſolo tartuffo è ſempre innocente, e ſenza veleno. Queſto ſuo pregio ſi ſpiega ottimamente nel noſtro ſiſtema. Cioè perchè naſcendo eſſo e creſcendo ſotterra, è al coperto dalle moleſtie che gli potrebbono recare le moſche e le farſalle. Volgarmente però non ſi tiene, nè ſi nomina per un fungo. Fra i funghi così volgarmente detti, il più ſicuro e rade volte infetto ſi è ſempre creduto e ſi crede il boleto. *Omnium igitur fungorum hi minimum ſunt noxii*, dice Galeno (*a*). Lo *Stentzelio* pretende che il nome di boleto altro non voglia dire in greco, che fungo di prato (*b*). Ma egli s' inganna, mentre altro non ſignifica che *globoſo*: provenendo da βῶλος, gleba (*c*). *Boletus eſt plantæ genus ad fungos accedens, a quibus differt capitulo circa pediculum clauſo:* dice il *Seguieri*. Per queſta chiuſura accoſtandoſi alla rotondità diceſi globoſo, *boletus*. Per avventura queſta ſua chiuſura lo fa di una ſuperficie dappertutto difeſa e coperta di dura pelle, non tanto facile ad eſſere penetrata dalle punture degl' inſetti che cercano di depoſitare le loro uova in parti tenere e mocciofe: e da queſto ritrae la ſua innocenza. Come veggiamo i moſcherini volar dattorno ad un pero, e riſpettarlo ſe è d' intatta ſcorza, e roderlo dove ſia mancante. Non è però del tutto impenetrabile il boleto, e però eſſo pure

---

(*a*) De alim. fac. lib. 2. cap. 69.
(*b*) Not. in Lindeſt.
(*c*) Vid. Scapula.

qualche volta fu trovato infetto dallo ſteſſo Galeno: *equidem novi quemdam cui, poſt boletorum non ſatis elixorum (qui innocentiſſimi eſſe putantur) uſum largiorem, os ventriculi preſſum ac gravatum, coarctatumque fuit, difficilem habuit reſpirationem, & in animi deliquium incidit, ſudoremque frigidum ſudavit* (*a*). Il ſecondo luogo fra i funghi innocenti hanno, ſecondo Galeno, Avicenna, Paulo ed altri, quelli che i Greci chiamavano *amanitæ*. Non ſi ſa quali foſſero, e di quale ſpecie. Preſſo noi dopo il boleto tienſi per ſicuro il porcino. Ma per eſſo leggermente ſenza preparazione arroſtito, ho veduto ſei perſone in un tempo al ſommo maltrattate da diſſenteria: così che a gran pena con lunga cura ho potuto ſalvare ad eſſi la vita.

Quanto al ſito dove ſi colgono i funghi, i prati ed i campi aperti ſono da eleggerſi. Quivi l' aria è più battuta dal ſole, e moſſa dal vento, ed in conſeguenza è meno abitata dagl' inſetti: i quali più volentieri ſi raccolgono dove ſono alberi e ceſpugli, che li difendano dalle intemperie delle ſtagioni: *pratenſibus*, dice *Orazio*, *optima fungis natura eſt* (*b*). Sono anche in queſti ſiti meno frequenti le biſcie e gli altri animali ſoſpetti di veleno.

L' età de' funghi è di poche giornate. Quanto più giovani ſi colgono ed eleggono, tanto meno ſono ſoſpetti di veleno. Accoſtandoſi con la maturità ſempre più alla corruzione, e tempo ſi concede maggiore agl' inſetti di depoſitare in eſſi i lor vermicini o le uova; e dall' odore più forte che menano vi ſono tratti ed incitati. I migliori funghi, dice il *Lemery* (*c*), e più ſicuri ſono quelli che naſcono e creſcono in una notte.

Perciò è neceſſario purgarli attentamente; rigettando i troppo adulti, i macchiati, i corroſi; e ſpaccandoli per ogni parte, tanto per oſſervare ſe ſiano verminoſi, quanto perchè bollendo, più facilmente fuor n' eſca il veleno, ſe ſono infetti.

La bollitura ſopra tutto è il più utile e neceſſario argo-

(*a*) De alim. fac. lib. 2. cap. 69.
(*b*) Serm. lib. 2. ſat. 4.
(*c*) Tratt. univ. p. 136.

mento per iſpogliare i funghi della velenoſità. Perchè la figlia di Pauſania, preſſo *Ippocrate*, mangiò funghi non bolliti, fu per eſſi attoſſicata: *Pauſaniæ filiam ex crudi fungi eſu anxietas tenebat, ſtrangulatio, dolor ventris* (*a*). Il *Valleſio* vuol qui che Ippocrate abbia meſſo la parola di crudo, per ſignificare ed avvertire che non fu tolta ai funghi la naturale loro freddezza, con cui nuocono, col fuoco. *Mulierem hanc non eo læſam eſſe conſtat, quod venenoſum ederet, ſed quod crudum, ob id anxietas eam tenebat & ſtrangulatio, non potente ventriculo eum conficere, & flatu frigido inde verſus cor & reliquas corporis partes delato* (*b*). Ma gli accennati ſintomi ſon di veleno, e non puramente di grevezza di ſtomaco. Si dee dunque intendere della cottura, che vale a ſpogliare i funghi per quanto è poſſibile della loro velenoſità. Il boleto, benchè ſalubre, fu ſecondo *Galeno* nel caſo da lui accennato nocivo, perchè infetto non fu purgato con la bollitura: *non ſatis elixorum*.

Preparati così e lungamente bolliti in molta acqua i funghi da perſona fedele, che abbia intereſſe proprio nella quiſtione, dovendone eſſo ſteſſo mangiare, ſe ne dee di eſſi fare il ſaggio. Si devono ben bene e a lungo tenere in bocca e maſticare, per provare ſe mandino una ſottil acrimonia che laſci in bocca calore e brugiore. Queſto è un eſperimento fedele e certiſſimo: perchè non è probabile che funghi, i quali quieti dimorando nello ſtomaco poſſono in eſſo nuocere per eſſere avvelenati, bene agitati nella bocca infranti, e preſſi al palato, non tramandino verun ſegno della loro forza di nuocere. Nell'*Ildano* ſi legge come il loro ſemplice tocco ha prodotto nelle mani e nel mento moleſtiſſimo brugiore, e pauroſa eroſione (*c*). Non è perglioſo queſto ſemplice ſperimento, che lo ſciacquarſi la bocca con acqua ed aceto, con vino, con latte può togliere ben preſto quella prima impreſſione veneſica. Il riſervarſi a fare queſto eſperimento dopo la ſeconda cottura, quando ſono preparati alla menſa i fun-

---

(*a*) Epid. 7. n. 89.
(*b*) Comment. ib.
(*c*) Cent. 4. oſſ. 36.

ghi, non ha più luogo, perchè gl' ingredienti aromatici, l' olio, ed il ſale che allora ſi aggiungono, oſcurano la conoſcenza dell' acrimonia veneſica ſe è preſente, eſſi ſteſſi producendo calore e brugiore. La donna cuoca nel noſtro caſo aſſaggiando i funghi bolliti, ſentì in eſſi un inſolito ſapore, ed una inſoffribile amarezza: ma non paleſò il ſuo ſoſpetto, per troppa voglia che avea di mangiarli: con che ſe ſteſſa e gli altri avvelenò. Buono è lo ſperimento del pane bollito coi funghi, che poi ſi dà ai cani ed ai gatti: purchè ſi avverta di trar ſoſpetto dal loro vomito, e non dalla loro infermità: mentre queſte beſtie avendo facile e pronto il vomito, ſi liberano toſto dal veleno. Vomitò un gatto il pane coi funghi infetti bollito nel caſo noſtro narrato, ma non fu conoſciuto in tempo. Nè è da traſcurare l' altro uſato ſperimento del petroſemolo coi funghi bollito: mentre ogni erba ad ogni ſtranio tocco perde il ſuo bel verde, ed ingialliſce, o s' oſcura.

La ſeconda cottura in olio è di doppia utilità. Si ſa che la forza del fuoco è grandiſſima, e produce alterazioni e mutazioni ſenſibili nelle ſoſtanze. Come il fuoco altera, diſtempera, e conſuma ogni coſa migliore, così fa anche d' ogni altra coſa iniqua e peggiore. L' acqua bolle a gradi duecento e dodici ſopra la congelazione: ma l' olio prima di bollire riſcaldaſi a gradi ſeicento: è però due volte più dell' acqua bollente atto ad alterare le ſoſtanze che in eſſo bollono. Il *Boeravio* così ne parla. *Quando autem corpora oleo ebullienti injiciuntur ſubito, tum ocyſſime nanciſcuntur cruſtam duram, fere lapideſcentem, quæ colorem acquirit veluti oriri conſuevit ab igne nudo, flavum, rubrum, nigerrimum denique. Materies autem reliqua, quæ latet intra hanc cruſtam, magno illo calore ambientis olei ebullientis agitata, motu repercuſſo, impedito, atque ſuffocato quaſi mirifice intus mutatur, coquitur, digerit, matureſcit* (*a*). L' altro vantaggio, che ſi ritrae a far bollire i funghi nell' olio, è quello che per eſſo s' inviluppano le acri veneſiche particelle, e dentro ſi coprono le fibre dai loro ſtimoli.

(*a*) Elem. Chem. tom. 1. pag. 377.

Non ſo quanto dobbiamo fidarci dell'aglio, del pepe e degli altri ingredienti aromatici e focoſi, con cui ſi crede volgarmente di rimediare al veleno dei funghi. Queſti ſono ſtati imaginati dagli antichi: li quali ſtimavano di correggere con eſſi il veleno de' funghi, che ſtimavano freddo, craſſo, e viſchioſo. Ma dopo che oggi ſi ſa che qualunque ſia il lor veleno è acre e cauſtico, guardar bene dobbiamo di non accreſcere la ſua forza con tali ingredienti. Quando non foſſe che ſervano queſti a ſolleticare lo ſtomaco e gl' inteſtini a più preſto liberarſi dal nemico accolto: ovvero a confondere con le varie lor qualità ſenſibili la ſua malvagità.

Non può eſſere che ottimo provvedimento per meno riſentire il veleno de' funghi ſe per diſgrazia s'aveſſe ingollato, che trovi queſto lo ſtomaco pieno di cibo e di bevanda: così non tocca in un punto ſolo, e con tutta unita in un tempo ſteſſo la ſua forza, le fibre dello ſtomaco, e meno può nuocere. Sarà dunque cauto riſerbare i funghi ſul fin del paſto.

E' certo che nuocono i veleni non tanto per la qualità loro nemica, quanto a miſura della lor quantità. Pochi grani di oppio non ammazzano, e ſi tollera ſenza danno un grano ſolo di ſublimato corroſivo dilavato in molt' acqua. Si faccia dunque parco uſo de' funghi, che gran danno ad ogni triſto incontro non ſe ne ritrarrà. Per queſto dai riſeccati funghi, che ſi riſerbano a ſolo uſo di condimenti o ſalſe, non ſi è veduto mai che alcuno s' infermi: non già perchè privi ſiano di umidità; ma perchè così in piccola quantità s' ingollano.

Un fuoco che ſubitamente paſſa per vivo che ſia non abbrugia le veſti nè arroſtiſce le carni. Mangiati che ſi abbiano i funghi ſarà bene ſubito dopo il paſto muovere il corpo, diſtenderlo e ſcuoterlo con qualche blando eſercizio, acciocchè cangiata direzione al ventricolo, trovi il cibo più pronto l' eſito dal piloro, nè ſi fermi lungamente in eſſo ciò che può nuocere.

Chi non vede come queſti avvertimenti e provvedimenti non ſiano utiliſſimi ed efficaci a diſtinguere in tempo i funghi avvelenati dai ſani, per queſti eleggere, quei rifiutare; a prevenirne i cattivi effetti peggiori, ſe ſi abbiano per triſta ſorte mangiati gl' inſetti? Ingiuſta però è la ſentenza, irragionevole la condanna contro de' funghi pronunciata dal *Geoffroy*: *Hæc ſymptomata, quæ fungi adeo celeriter in ventriculi & inteſtinorum membranis & fibris nerveis concitant a particulis ſalino ſulphureis, ſubtilibus, acribus & cauſticis provenire videntur. Reipſa exſiccati, & bene cum aqua calida eloti non ita nocent, quia partes illæ acres cauſticæ exſiccatione vel lotione avolarunt, aut exſtractæ fuerunt. Nonnulli etiam eorum noxam emendare putant aceto vel oleo, quæ eaſdem particulas retundunt vel involvunt. Verum quoquo modo etiam ſumptuoſiſſimo præparati ad fimetum, unde oriuntur, relegandi ſunt; fugiendique cane pejus & angue ab omnibus ſanitatis ſtudioſis* (*a*).

PARTE TERZA.

Quali ſiano i più ſicuri rimedj al veleno dei funghi.

I Rimedj preſervativi da un qualche morbo, quantunque ſiano dagli Autori lodati come efficaci e giovevoli, laſciano ſempre qualche dubbio della lor forza; perchè non ſi è mai ſicuro ſe un morbo ſia veramente per naſcere, o no; ſe nato, ſarà benigno e lieve, ovvero forte e micidiale. Non è così di quelli che curano i morbi già nati e preſenti, perchè noti ſono gli ordinarj e conſueti andamenti e pericoli di ciaſchedun male; e puoſſi miſurare con la ſperienza qual forza abbiano contro di eſſi i preſcritti medicamenti. Ma fra un numero ben grande di varj medicamenti regiſtrati ne' libri come giovevoli, li più ſicuri certo ſaranno quelli che non ſolo nella pratica, ma che altresì nella teorica ſi conoſcono dover eſſere più adattati a diſtruggere dentro di noi le cagioni morboſe, qualora queſte ſian note. *Paratus ſum defendere*, dice l'Offmanno, *opuſc. med. Phyſ. pag.* 59, *omnem medicam praxim fallacem, infidam, confuſam, difficilem & periculoſam eſſe ſine theoria*. Si ha qui a fare con un veleno rodente

---

(*a*) Meter. med. par. 2. p. 265.

rodente infiammativo, nemico degli ſpiriti e de' nervi. Prima intenzione ſarà quella di toſto ſcacciarlo fuori del corpo. Seconda di ſtemperarlo e dilavarlo. Terza d' involverlo, e coprire le fibre dai ſuoi ſtimoli. Quarta di rimediare ai ſintomi e danni che internamente produce. Corriſpondono a queſte intenzioni i vomitorj, i purganti, i diluenti, gl' involventi, i ſudoriferi, i calmanti, il contravveleno. De' quali parleremo diſtintamente, perchè come avverte il *Boeravio*, niuno ſpecifico medicamento ſi dà in natura, che tale non ſia, per eſſere adoperato a tempo e luogo: *neque vero ipſe ullum ſpecioſum medicamentum agnoſco, quin ſolo tempeſtivo uſu tale fiat* (*a*).

I vomitorj fanno il doppio effetto deſiderabile: di ſtaccare cioè, con produrre un moto inverſo nel ventricolo, i funghi infetti ſe vi ſteſſero aderenti con la loro naturale viſchioſità; e nel tempo ſteſſo di portarli fuori per la via breve del vomito, onde paſſando al baſſo non portino il loro veleno agl' inteſtini. Coſtituiſcono perciò queſti il primo e principale medicamento al noſtro uopo; e giuſtamente quindi ſono lodati dagli Scrittori di tutt' i ſecoli. Biſogna però guardarſi da quei vomitorj, che ſono in ſe ſteſſi venefici, come i tolti dai minerali, e da certe piante nemiche. Perchè trattandoſi qui di peſſime impreſſioni che far poſſono i funghi avvelenati nello ſtomaco e negl' inteſtini, queſti ſteſſi trovando ſpoglie di mucoſità le interne tonache, o infiammate e corroſe, potrebbono accreſcere quel danno che ſi cerca con eſſi di togliere. Caſochè i primi ſintomi indicanti il veleno ſi ſcopriſſero di notte quando non ſono in pronto nè Medico nè medicamenti, ſi potrà comporre in attimo un vomitorio miſchiando ben bene in mezza libbra di acqua tiepida due o tre once di olio comune, o di butirro. Altrimenti ſe è in pronto, ſarà meglio ſervirſi nel modo medeſimo dell' olio di mandorle dolci: ajutando col dito in gola o con una penna il vomito ſe foſſe tardo o reſiſteſſe. Se con tali ajuti non ſucceda il vomito, con più forte ſtimolo ſi procurerà di ec-

---

(*a*) Aph. præf.

citarlo: uſando cioè due o tre once di oſſimele ſcillitico, miſto con eguale porzione di olio di mandorle dolci; oppure una mezza dramma d' ipecoacanna ſpolverizzata con uno ſcrupolo di nitro, dentro un lungo brodo di pollo. Ma come la ipecoacanna produce il vomito anche in doſi minori, ſarà cauto uſarla a tempo a tempo e partitamente, ſinchè ſe ne abbia il deſiderato effetto. Nelle quattro perſone da me ultimamente curate, non ho io creduto bene uſare l' emetico, perchè eſſendo ſtato chiamato venti ore dopo i funghi mangiati, quando era già nata e ſpeſſa la diarrea, ho creduto diſceſa agl' inteſtini la velenata maſſa, da doverſi per di ſotto purgare. Mi accorſi dell' inganno, quando il purgante preſcritto facendo l' effetto di vomitivo, ſortirono per eſſo pezzuoli di funghi indigeſti che ancora erano fermati nel ventricolo. Buono fu che il purgante abbia opportunamente al biſogno prodotto il vomito, che così più prontamente gl' infermi ſi ſono liberati dal male. Che giuſte non ſono le ragioni contro dell' emetico addotte dal *Rondelezio*, e ricordate dal *Foreſto*: *vult tamen doctiſſimus Rondeletius, licet in omnibus his, qui venenum ſumpſerunt, vomitus conveniat, in iis tamen qui ex uſu fungorum periculo ſuffocationis laborant, minus convenire, ſed potius clyſteribus, medicamentis purgantibus deorſum deturbandos eſſe, & os ventriculi claudendum adſtringentibus, ut malo cotoneo, pyro ſylveſtri* (*a*). L' ardor ſoffocativo di gola non è effetto del ſolo veleno de' funghi, come ſopra ſi è oſſervato, ma di altri ancora che ſian preſi per bocca. Come in queſti ſecondo *Rondelezio* il vomito è buono, così lo è in quello de' funghi. Fermandoſi eſſi nello ſtomaco a ſpargere in eſſo il veleno, per breve via eſcono col vomito: dove tratti al baſſo per gl' inteſtini, reſta ad eſſi tempo di tutta in eſſi ſpargere la loro velenoſità. I danni, che riſalendo far ponno all' eſofago, facilmente ſi tolgono con bevanda latticinoſa e rinfreſcativa. Non è così ſicuro e pronto l' effetto de' purgativi quanto quello de' vomitorj: mentre i purgativi non vagliono ſempre a portar fuori dello ſtomaco negl' inteſtini le materie che lo ingombrano; ma

---

(*a*) Obſ. tom. 1. pag. 579.

trovandole groſſe e aderenti, eſſi ſteſſi paſſano e queſte laſciano a dietro.

Importando moltiſſimo il ſottrarre il più preſto che ſi può la materia veneſica per ogni via e modo, quantunque lodevole ſia l' effètto de' vomitorj, e corriſponda all' eſpettazione, non ſon da omettere dopo quelli i purgativi, per vie meglio nettare lo ſtomaco, e ſopra tutto per portar fuori dal receſſo qualche porzione di morboſa inſetta materia diſceſa negl' inteſtini. Nè ſon queſti da ometterſi preſente lo ſcorrimento del ventre, ſul ſuppoſto che la natura faccia da sè quel che far deono i medicamenti. Quanto è più forte la diarrea, tanto indica maggiore la quantità e la forza del veleno agl' inteſtini diſceſo; e tanto maggiore la neceſſità di ſollecitamente portarnelo ſuori. Eſſendo per lo più in queſti caſi col ventre ſcorrevole uniti crucioſi dolori, queſti indicano che nel tratto inteſtinale mette il veleno delle ſpaſmodiche contrazioni, per le quali ritardaſi la ſeparazione dello ſteſſo, e v' è pericolo che con la dimora produca colà dentro peſſime impreſſioni fatali. Per queſto io amo in queſta circoſtanza i purgativi che operano per fermentazione più toſto che quelli che operano per una ſemplice virtù ſtimolante. Quelli ſervono a dilatare il tubo inteſtinale coll' aria e col flato che ſuſcitano, e così apreſi la via al nemico che paſſa: laddove i purgativi ſtimolanti mettono qua e là ſpaſimi e contrazioni che ritardano l' uſcita al veleno. La manna, lo zucchero, il miele, ſono i rimedj purgativi che dentro il corpo facilmente fermentano. Se ad eſſi aggiungaſi un qualche ſtimolo di altro purgante, rendeſi più ſollecita e ſicura la loro operazione, e per conſeguenza ſaranno meno durevoli que' dolori che eccitar poſſono col dilatar gl' inteſtini. Nelle botteghe ſtanno preparati molti rimedj in tal maniera compoſti; fra i quali i più uſitati al dì d' oggi ſono lo ſciloppo di fiori di perſico, lo ſciloppo roſato ſolutivo, il miele parimenti roſato ſolutivo: ogn' un de' quali ſi può uſare al peſo di quattro o ſei once dilavato con acqua cordiale. Con la manna, col cremor di tartaro, e con la ſena ſi lavora quella pozione che diceſi magiſtrale: queſta è il più pronto e meno incomodo purgativo che ſi abbia in medicina: accomodato ad ogni età e condizion di perſone, regolatane la doſe da tre once a ſette. Se all' uſo di queſti rimedj prontamente adoperati felicemente avvenga che tutto il morbo ceſſi, non ſarà uopo reiterarli. Ma ſe qualche ſintomo rimane che moſtri ſuſſiſtere ancora il biſogno di altra purga, ſi uſeranno allora rimedj più blandi che ſenza danno due o tre volte ſi poſſano replicare. La caſſia in queſto caſo, i tamarindi, il ſiero di latte raddolcito collo zucchero o col miele, l'olio di mandorle dolci, o di ſemi di lino, potranno baſtare. Con la caſſia, coi tamarindi, e con altri blandi ingredienti ſi lavora una conſerva detta del Donzelli, la quale ſta preparata al biſogno nelle botteghe. Sarà bene il prendere i detti medicamenti in bevanda per la loro più pronta operazione. Non ſo perchè il *Rondelezio* ami più toſto nel veleno de' funghi che ſi diano in forma di pillole *(a)*; le quali, maſſimamente ſe ſono inargentate, tardi ſi disfanno, non operano nel ventricolo, ma portano il loro effetto all' eſtremo degl' inteſtini. Di queſti rimedj purgativi ſi potranno anche far dei criſtieri: che ajuteranno a portar fuori del corpo le ſoſpette materie, le quali con danno nelle grandi cavità dei craſſi inteſtini ſi potrebbono naſcondere, ed occultarſi ai purgativi, che dall' alto diſcendono.

Quantunque ogni veleno ſia tenaciſſimo della propria indole e difficilmente ſe ne laſci ſpogliare, non oſtante ſparpigliato che ſia ed in molta acqua dilavato e ſparſo, meno è atto ad offendere. Il più potente veleno è il ſublimato corroſivo: ma queſto pure, ſe ſia in molta acqua o altra materia diviſo, tolleraſi dall' uomo ſenza danno; e ſe ne forma un prezioſo rimedio antivenereo, oggi decaduto di fama, ma non ſon molti anni lodato da molti per infallibile. Proccuriſi però nel veleno de' funghi di far uſo quanto ſi può maggiore di bevanda acquoſa qualunque ſia: eſſendo ſenza dubbio l' acqua l' unico forſe e miglior diluente. Perchè meno ſia rifiutata dallo ſtomaco, ſi potrà raddolcire o inacidire a talento e guſto di ognuno, con qualche conſerva, col miele, coll' aceto.

Gl' involventi ſervono al doppio fine: d' invogliere cioè le punte veneſiche, perchè meno feriſcano, e di coprire dalla lor forza le fibre. Si prendono dal cibo egualmente e dai medicamenti. Tutt' i farinoſi in generale, i gelatinoſi, i latticinoſi, gli olioſi ſomminiſtrano e cibi e medicamenti per queſta claſſe. Per nominarne alcuni almeno, ricordo il latte, il ſuo butirro, il ſuo ſiero. Le decozioni di orzo, di biada, di altea, di ſcorzonera. Gli olj di mandorle dolci, di ſemi di lino, di oliva. Le uova freſche ſorbili, il brodo ſcipito di pollo, di vitello, di rana. Le emulſioni di mandorle, e de' ſemi freddi. Le gelatine di avorio e di corno di cervio. La muccellaggine di ſemi di cotogno, la gomma arabica, lo ſpermaceti, il miele. Col purgativo, che ſervì di emetico, e con una larga bevuta di ſiero ſolamente colato, felicemente guarirono le quattro perſone tante volte rammemorate, ſenza che aveſſero biſogno di ricorrere inoltre a medicamenti.

(a) Meth. cur. morb. cap. 37.

I ſudoriferi comincieranno a farſi utili allora quando appariranno ſintomi del veleno introdotto nel ſangue: eſſendo in tal caſo il ſudore l'unica via per cui il veleno poſſa ſortire. Biſogna però qui avvertire che i più forti ed attivi ſudoriferi che ſi uſano con vantaggio in altri veleni introdotti per morſo o puntura, non ſono ſicuri nel veleno de' funghi introdotto per bocca. Perchè riſentendoſi di tal veleno i primi triſti effetti nello ſtomaco e negl' inteſtini, effetti che portano all' infiammazione e cangrena, con rimedj focoſi e volatili ſi verrebbono ad accelerare anzichè a togliere i danni del veleno. Sono però da eleggerſi fra i ſudoriferi quelli che più operano per quantità di liquido introdotto, che per virtù di droghe medicamentoſe; ſupplendo al difetto di queſte con le fregagioni, e con le coperte ſul letto, ovvero col bagno. Il te chineſe, il te di veronica, che diceſi Europeo, il te degli Svizzeri, in calda ſtagione ed in corpi diſpoſti al ſudore poſſono baſtare. Son più forti le infuſioni ſemplici, o le decozioni di altre erbe e fiori odoroſi aromatici: come la meliſſa, la menta, lo ſcordio, l' edera terreſtre, i fiori di ſambuco, di camomilla. Il ſolo ſpirito di vino, ſecondo avverte il *Boeravio* (*a*), ha il privilegio fra i medicamenti di penetrare a traverſo e a ſeconda de' nervi, e ſeco aſportare per la cute le infezioni più intime dello ſpirito o liquore de' nervi. Con eſſo ſi lavorano certe acque ſpiritoſe di meliſſa, della regina d' Ungheria, vulneraria, e ſimili, con qualche gocciola delle quali ſi poſſono le altre bevande rendere maggiormente ſudorifere: come ſi può fare altresì con lo ſpirito di ſale armoniaco, di corno di Cervio ſuccinato, e coll' olio animale del Dipellio. Nel caſo noſtro ove ſono preſenti convulſioni e ſpaſimi che impediſcono il ſudore, ſi rende neceſſario aggiungere un poco di oppio, ch' eſſo pure appartiene alla claſſe de' ſudoriferi, per la facoltà di ſedare le contrazioni de' canali, per cui ſono impediti i ſudori.

Fra li ſintomi che ſeco adduce il veleno dei funghi, altri ſono da ſorpaſſare, altri da calmare. Che non è ſempre vero quanto dice il *Boeravio* che *mitigando ſymptomata ſemper etiam aliquid de morbo primario tollitur* (*b*); nè quanto dice lo *Stalio*: *mitigando ſymptomata, numquam fieri poteſt, quin primario affectui præjudicium aliquod inde dependeat* (*c*). Son da calmare i dolori, la febbre, le convulſioni. Il ptialiſmo, il vomito, la diarrea non ſi deono impedire. Perchè quei primi ſintomi ſono d' impedimento al ripurgarſi delle venefiche particelle: queſti ſecondi ſono tante vie aperte al loro eſito. Baſterà qui veder brevemente qual uſo ſi debba far del ſalaſſo, e dell' oppio, che ſono i più pronti e forti calmanti fra altri che ſi potriano addurre. Teniamo fermo con i noſtri antichi Scrittori che il ſalaſſo direttamente non conviene contro qualunque ſiaſi veleno, che abbatte le forze e lo ſpirito, agghiaccia le membra, colliqua gli umori nutritivi e li diſperde per vomito, per ſeceſſo, per ſudore. Come però indirettamente non poco può contribuire a frenare la febbri che troppo vive portano alla cangrena, a mitigare i dolori del ventre che metton remora al ſeceſſo, a ſcemare le convulſioni impeditive del ſudore, a divertire il corſo degli umori al capo per evitare l' apopleſſia, non è da omet-

---

(*a*) De morb. nerv. pag. 79.
(*b*) Prælect. tom. 5. n. 1244.
(*c*) Obſ. de febr. pag. 53.

terſi del tutto, maſſimamente dove ſia o troppo copioſo il ſangue o troppo groſſo e tenace. Dell' oppio non è da farſene uſo al cominciamento del morbo, quando il veleno ancor ſi aggira a tormentare lo ſtomaco e gl' inteſtini. In queſto tempo noi abbiamo biſogno di portar fuori del corpo la velenata maſſa o ſia per vomito o ſia per ſeceſſo. A queſta eſſenziale e primaria intenzione la forza dell' oppio ſi oppone, che rallenta il moto periſtaltico, e ſeda anzichè promovere lo ſcorrimento del ventre. Se il morbo per tal via curato dapprincipio preſto finiſce e non oltrepaſſa, con l' oppio reſta ſuperflua ogni altra cura. Ma ſe penetrato il veleno dentro alle vene, ſi manifeſtino ſegni che moſtrino i nervi patire; allora già praticata a principio la neceſſaria purga comincia a farſi utile l' oppio, a ſedare le convulſioni e le veglie, ed a promovere la traſpirazione e 'l ſudore, per dove poſſa uſcire l' introdotto veleno. I buoni effetti veduti tal volta dalla triaca, dal diaſcordio, dall' Orvietano ſono da attribuire più di tutto all' oppio che contengono.

Fu univerſale credenza de' noſtri Antichi che ad ogni veleno abbia la natura in un altro veleno un antidoto preſtato: *Ea eſt natura ut hominem occidat, niſi invenerit quod in homine perimat. Cum eo ſolo colluctatur, velut pari intus invento. Sola hæc pugna eſt, cum venenum in viſceribus reperit: mirumque exitialia per ſe ambo cum ſint, duo venena in homine commoriuntur, ut homo ſuperſit* (*a*): onde cantò il Taſſo

Che sì come dall' un l' altro veneno
Guardar ne ſuol, tal l' un dall' altro amore.

Quindi l' aconito ſi è venuto a contrapporre allo ſcorpione, la mandragora all' elleboro, le cantarelle alla rabbia de' cani. Ma pur troppo la ſperienza coll' andare de' ſecoli ha fatto vedere l' inutilità di queſto metodo di medicare. Sorſa è ultimamente la Chimica; ed a me, diſſe, è riſerbata la gloria di trovare i veri contravveleni. Non ho trovato io la maniera di fare un ottimo medicamento dell' olio di vetriolo, e dell' olio di tartaro per deliquio, che ſeparati uno dall'

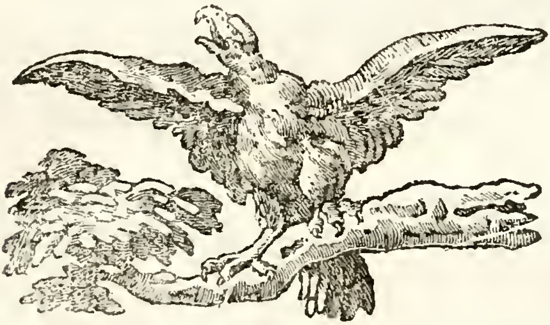
(*a*) *Plinio* hiſt. nat. lib. 27. cap. 2.

altro ſono micidiali veleni? Tengaſi per certo, dice *le Boe Silvio*, che la forza di ogni veleno conſiſte in una acrimonia. *Si quis autem venenorum effecta & ſymptomata, quæ in homine ſolent excitare, attenta mente conſideraverit, tandem agnoſcet illa omnia ortum ſuum ac efficaciam debere alterutri, vel utrique acri, cujus acrimonia vel patet, vel latet* (*a*). Con queſta fiducia ſi è paſſato a far l' eſame dei funghi. I funghi, dice il *Lemery*, contengono molto olio e ſal volatile e fiſſo, dunque io mi ſervo per contravveleno dello ſpirito volatile oleoſo aromatico (*b*). I funghi, direbbon M. M. *Paulet*, e *Parmentier*, contengono un' acrimonia alcalica, contro di cui varrà l' etere vitriolico: e per tale opinione ſono grandemente lodati da M. *Rozier*; il quale per la ſteſſa ragione ricorda l' uſo dell' aceto: “ aprés l' entiére évacuation des champignons, on fera prendre au malade, dans chaque verre de ſa boiſſon, un peu d' éther vitriolique. C' eſt a M. M. *Paulet* & *Parmentier* que l' on doit la découverte de ce rêméde. Je le répéte, ſouvent d' amples boiſſons acidulées par le vinaigre ſuffiſent (*c*) „. Ma M. *Sage* tutto all' oppoſito vuole che il veleno degl' inſetti, ch' è quello de' funghi, provenga da un acido foſforico che in eſſi trovaſi a nudo: vi contrappone però il ſuo alcali volatile *fluor* (*d*). Io non mi curo di riſolvere queſta queſtione. Mi baſta il dire che ſe è acrimonia quella per cui i funghi ſono venefici, non è acrimonia che con acidi, o alcalici ſi poſſa contemperare o diſtruggere. Nello ſtomaco dell' uomo per la digeſtione accorrono nella ſcialiva, nei ſughi gaſtrici, nel ſugo pancreatico, nella bile, acidi, alcalici, ſaponoſi d' ogni genere: ſe queſti non baſtano (come non baſtano certamente, che il veleno ad eſſi reſiſte) poca ſperanza abbiamo che per quegli altri contrappoſti ingollati debba cedere. Intanto eſſi ſteſſi produrranno nello ſtomaco i lor peſſimi effetti, e ſi aggiungerà pericolo ſopra pericolo. Come ben ſe ne avvide il gran

---

(*a*) Meth. med. lib. 2. cap. 29.
(*b*) Dizion. univ. pag. 135.
(*c*) Dict. univ. tom. 2. pag. 676.
(*d*) Eſper. pag. 46.

il gran Chimico *Boeravio*: laonde formò quell' aforiſmo: *In dandis antidotis ſingularibus, ſumma prudentia opus: quum enim hæc polleant ſingulari virtute corrigendi hujus, illiuſve veneni tantum, habent ut plurimum violentiam æque magnam, vel majorem, ac eſt illa, quam debellant. Ideoque hæc ſimul concurrentia in corpore ſe mutuo deſtruunt, inertia evadunt, nec multum nocent: ſi vero adſunt ſolitaria, æque noxia ſæpe deprehenduntur ac ipſa venena, quibus domandis exhibentur* (a). Un buono e ſicuro antidoto contro de' ſintomi almeno dal veleno de' funghi, e da qualunque altro veleno prodotti, paſſato che ſia il furore del morbo acuto, ſarà qualche ſorſo di vino puro noſtrale o navigato. Nè ſono da ſprezzare la triaca, il mitridato, il diaſcordio, l' orvietano, ed altri cotali rimedj ſpiritoſi ed aromatici uſati e lodati dai noſtri maggiori: come quelli che ſervir poſſono mirabilmente a confortare l' abbattuto ſpirito, a riordinare i forzati moti de' nervi e de' muſcoli, a dar tono alle rilaſſate fibre, a riſtorare le perdute forze, e a poner fine ai doloroſi guai.



(a) Inſtit. med. aph. 1130.

RICERCHE ANALITICHE

SOPRA DIVERSI SOGGETTI.

Del P. Gregorio Fontana delle S. P. Pubblico Profeſſore delle Matematiche Superiori nella Regia Imperiale Univerſità di Pavia.

ARTICOLO I.

Sopra la Rifrazione della Luce relativamente ad alcune formole del Sig. D' Alembert *ne' ſuoi* Opuſcoli Matematici.

PROBLEMA.

1. *Un mezzo refrangente terminato da una ſuperficie curva eſercita ſopra un raggio di luce, che vi batte dentro e ſi rompe, una forza attrattiva, la quale obbliga il raggio a muoverſi per una curva breviſſima nell' atto di refrangerſi. Si domanda la natura di queſta curva.*

Soluzione.

Sia (*Fig.* 1.) *SQG* la ſuperficie refrangente, *AQB* la trajettoria deſcritta dalla particella di luce, che incontra in *Q* la ſuperficie refrangente, la qual trajettoria cominciando in *A* fuori della ſuperficie a quella diſtanza, a cui ſi eſtende la forza attrattiva del mezzo refrangente, termina in *B* al di dentro dello ſteſſo mezzo ad una certa diſtanza dalla ſua ſuperficie. Preſo il punto indefinito *N* ſulla trajettoria, e guidate le tangenti *AO*, *NI*, *BT*; ſuppongaſi eſſere *C* il centro della curvatura del piccolo arco *eQk* della ſuperficie rifrangente, dove il raggio di luce la penetra. Sieno condotti i raggi vettori *CA*, *CN*, *CB*, e pigliati gli archi infiniteſimi

Aa, Nn, ſi giungano Ca, Cn, e ſopra CN meniſi la perpendicolare nr. Sia pertanto

Velocità del raggio di luce in A	g
Seno dell' angolo d' incidenza OAC	h
Forza attrattiva del mezzo ſopra il corpuſcolo di luce arrivato in N	X
Tempo ſpeſo dal corpuſcolo a venire da A in N	t
Velocità del medeſimo in N	v
Arco AN	s
CA	a
CB	b
CN	x
Angolo ACN	z

Il corpuſcolo di luce giunto in N è attratto dal mezzo rifrangente verſo il centro C della curvatura con una forza X rappreſentata dalla retta NF, e menando la perpendicolare FI ſulla tangente NI, la forza NF ſi riſolve nelle due NI, IF, delle quali la ſola NI è quella, che altera la velocità v del corpuſcolo per l' archetto Nn: conſeguentemente $NI . dt = dv$. Ma la ſimilitudine de' triangoli FNI, Nrn dà $Nn : Nr :: ds : -dx :: NF : NI$, cioè $NI = -\frac{Xdx}{ds}$; ed è inoltre $dt = \frac{ds}{v}$: ſoſtituendo dunque queſti valori nell' equazione precedente, ſi avrà $-Xdx = vdv$, ovvero $-2Xdx = 2vdv$, il cui integrale è $v^2 = -2\int Xdx + \text{coſt.}$ Siccome poi allorchè $x = a$, diventa $v = g$; naſcerà coſt. $= g^2$, intendendo l' integrale $\int Xdx$ preſo in modo, che ſi annulli nel ſuppoſto di $x = a$. Laonde $v^2 = g^2 - 2\int Xdx$.

Ora, poichè nelle trajettorie deſcritte in virtù d' una forza centrale tendente ad un punto fiſſo le aje deſcritte dal raggio vettore ſono proporzionali ai tempi per gli archi corriſpondenti, ſarà perciò il tempo per l' archetto Aa al tempo per l' archetto Nn, come ACa ad NCn, ovvero $\frac{Aa}{g}:\frac{ds}{v}::\frac{1}{2}Aa.CA.h:\frac{1}{2}NC.nr$, cioè $\frac{1}{g}:\frac{ds}{v}::ha:x^2dz$, e quadrando $\frac{1}{g^2}:\frac{ds^2}{v^2}::h^2a^2:x^4dz^2$; d' onde ſi trae

$$x^4dz^2=\frac{h^2g^2a^2ds^2}{g^2-2\int Xdx}=\frac{h^2g^2a^2(dx^2+x^2dz^2)}{g^2-2\int Xdx}$$; e quindi

$$dz^2\left(g^2x^4-2x^4\int Xdx-h^2g^2a^2x^2\right)=h^2g^2a^2dx^2$$. Dunque

$$dz=\frac{-hgadx}{x^2\sqrt{\left(g^2-2\int Xdx-\frac{h^2g^2a^2}{x^2}\right)}}$$, ed integrando

$$z=-\int\frac{hgadx}{x^2\sqrt{\left(g^2-2\int Xdx-\frac{h^2g^2a^2}{x^2}\right)}}$$. Il che era ecc.

2. COR. I. Siccome $ds^2=dx^2+x^2dz^2=dx^2$

$$+\frac{h^2g^2a^2dx^2}{g^2x^2-2x^2\int Xdx-h^2g^2a^2}=\frac{dx^2(g^2x^2-2x^2\int Xdx)}{g^2x^2-2x^2\int Xdx-h^2g^2a^2}$$, e in conſeguenza $ds=\frac{-xdx\sqrt{(g^2-2\int Xdx)}}{x\sqrt{\left(g^2-2\int Xdx-\frac{h^2g^2a^2}{x^2}\right)}}$, ſarà quindi

ſen.$CNI=\frac{nr}{Nn}=\frac{xdz}{ds}=\frac{hga}{x\sqrt{(g^2-2\int Xdx)}}$. Dal che appariſce, che il ſeno dell' angolo d' incidenza, cioè h ſta al ſeno dell' angolo CNI come $1:\frac{ga}{x\sqrt{(g^2-2\int Xdx)}}$, ovvero come $\frac{1}{ga}:\frac{1}{x\sqrt{(g^2-2\int Xdx)}}$.

3. COR. II. Quando l' angolo CNI ſi cangia in CBT, che è l' angolo della refrazione totale, allora diventa $x=CB=b$, e con ciò il ſeno dell' angolo d' incidenza ſta al ſeno dell' angolo di refrazione come ſta $\frac{1}{ga}:\frac{1}{b\sqrt{(g^2-2\int Xdx)}}$.

4. Cor. III. Suppongaſi col *d' Alembert Opuſc. Math.* tom. 3. §. 969, che ſia mx il raggio della curvatura della ſuperficie refrangente in $\mathcal{Q}$, ed α il raggio della sfera di attività del mezzo rifrangente, per modo che la curva deſcritta dal globetto di luce incominci e finiſca alla diſtanza α dalla ſuperficie rifrangente eſteriormente ed interiormente. In queſto ſuppoſto diventa $a = mx + \alpha$, $b = mx - \alpha$. Perlochè il ſeno d' incidenza ſta al ſeno di refrazione come

$\frac{1}{g(mx+\alpha)} : \frac{1}{(m\alpha - \alpha)\sqrt{(g^2 - 2\int Xdx)}}$, che è un rapporto diverſo da quello di *d' Alembert* nel luog. cit.

5. Cor. IV. Se il mezzo rifrangente è terminato da una ſuperficie piana, allora diventa $m\alpha = \infty$, e la ragione del ſeno d' incidenza al ſeno di refrazione ſi cangia in quella di $\frac{1}{g} : \frac{1}{\sqrt{(g^2 - 2\int Xdx)}}$; il che ha luogo ancora allorchè eſſendo curva la ſuperficie rifrangente, il ſuo raggio mx di curvatura è grandiſſimo in confronto della picciola diſtanza α, a cui ſi eſtende la forza attraente di detta ſuperficie.

6. Scol. Se per angolo d' incidenza il *d' Alembert* ha voluto intendere non già il *vero* angolo d' incidenza CAO, ma l' *apparente* oſſia quello che corriſponde al punto $\mathcal{Q}$ della ſuperficie rifrangente, è evidente, che il ſeno di queſto è $\frac{bga}{m\alpha\sqrt{(g^2 - 2\int X'dx)}}$, dove nell' integrale $\int X'dx$ ſi dee ſcrivere $m\alpha$ per x. Ma oltrechè queſt' angolo *apparente* d' incidenza è troppo differente dal *vero* angolo d' incidenza per poter prenderſi promiſcuamente l' uno per l' altro, ciò non giuſtificherebbe la proporzione de' ſeni recata dal *d' Alembert*; imperciocchè il ſeno dell' angolo *apparente* d' incidenza ſta al ſeno dell' angolo di refrazione come ſta

$\frac{bga}{m\alpha\sqrt{(g^2 - 2\int X'dx)}} : \frac{bga}{(mx - \alpha)\sqrt{(g^2 - 2\int Xdx)}}$, ovvero come $\frac{1}{\sqrt{(g^2 - 2\int X'dx)}} : \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\sqrt{\left(g^2 - 2\int Xdx\right)}}$, laddove ſecondo *d' Alembert* dovrebbe eſſere l' uno all' altro come

$$\frac{1}{gmx} : \frac{1}{(m\alpha-\alpha)\sqrt{(g^2-2\int Xdx)}}.$$

A R T I C O L O II.

Eſame d' un nuovo argomento in favore del Moto Perpetuo.

1. Una ruota verticale (*Fig.* 2.) $FPOQ$ diviſa in due metà da un piano verticale, che paſſa pel ſuo diametro FO, ha la metà FPO immerſa nell' acqua ſotto al livello MN, e l' altra metà tutta fuor d' acqua, eſſendo in FO mediante un particolar meccaniſmo tolta ogni comunicazione fra l' acqua della conſerva e la metà FQO eſteriore della ruota, la quale può volgerſi liberamente intorno ad un aſſe, che paſſa pel centro C. Ora eſſendo la ruota ſpecificamente più leggera dell' acqua, la parte immerſa FPO viene di continuo ſpinta verticalmente all' insù con uno sforzo eguale all' eccеſſo del peſo di un volume d' acqua pari alla parte immerſa ſopra il peſo della parte immerſa, la quale ſpinta paſſando pel centro di gravità della parte iſteſſa, e però fuori del centro C, obbliga la ruota a girare intorno a C. In tale ſtato di coſe dimandaſi, ſe ſi avrà nella ruota un moto perpetuo, come a primo aſpetto potrebbe giudicarſi.

2. Per riſpondere adequatamente, conviene prima di tutto conoſcere qual effetto producano nella ruota le preſſioni orizzontali, che eſercita l' acqua contro la ſemicirconferenza FLO della ruota. Preſo adunque un elemento Pp, e condotte al diametro le ordinate PR, pr, e guidato il raggio PC, e indi la PG normale al raggio CL, il quale determina il quadrante OL, pongaſi la diſtanza del punto infimo O dal livello dell' acqua, ovvero la $OD = b$, il ſemidiametro della ruota $= a$, $OR = x$, e la gravità ſpecifica dell' acqua $= 1$: e ſarà la preſſione perpendicolare contro l' elemento $Pp = Pp.RD$, la quale riſoluta in due, una orizzontale ſecondo PR, l' altra verticale ſecondo PG, offre l' analogia $PC : PR :: Pp.RD : \frac{Pp.PR.RD}{PC}$. Dunque la preſſione orizzontale contro

Pp è $= \frac{Pp.\,PR.\,RD}{PC}$, cioè per eſſere $Pp.\,PR = Rr.\,PC$, la detta preſſione orizzontale trovaſi $= Rr.\,RD = (b - x)\,dx$, e queſta moltiplicata per RD, ovvero $b - x$, diventa il momento della preſſione relativamente ad $MN = (b - x)^2 dx$, e la ſomma de' momenti delle preſſioni eſercitate contro l' arco indefinito $OP = \int (b - x)^2 dx = -\frac{1}{3}(b - x)^3 +$ coſt. E poichè ſvaniſcono tali momenti inſieme colla x, ſi ha però coſt. $= \frac{1}{3} b^3$; e quindi la predetta ſomma de' momenti $= \frac{1}{3}\left(b^3 - (b - x)^3\right) = b^2 x - bx^2 + \frac{1}{3} x^3$. Laonde prendendo $x = 2a$, ſarà la ſomma di tutti i momenti delle preſſioni orizzontali eſercitate contro tutta la ſemicirconferenza OLF della ruota, ſarà, dico, $= 2b^2 a - 4ba^2 + \frac{8}{3} a^3$, e dividendo queſta ſomma per quella di tutte le preſſioni orizzontali, cioè per $\int (b - x)dx = \frac{1}{2}\left(b^2 - (b - x)^2\right) = bx - \frac{1}{2} x^2 = 2ba - 2a^2$ poſto $x = 2a$, ſi ha l' eſpreſſione $\frac{2b^2 - 4ba^2 + \frac{8}{3} a^3}{2ba - 2a^2}$ $= \frac{b^2 - 2ba + \frac{4}{3} a^2}{b - a} = \frac{(b - a)^2 + \frac{1}{3} a^2}{b - a} = b - a + \frac{\frac{1}{3} a^2}{b - a}$, che rappreſenta la diſtanza del livello MN dalla *riſultante* di tutte le preſſioni orizzontali contro la ſemicirconferenza, la quale diſtanza ſupera la DC, e conſeguentemente la direzione della riſultante paſſa al di ſotto del centro C della ruota ad una diſtanza di detto centro, che è $= \frac{\frac{1}{3} a^2}{b - a}$. Se ſi moltiplica ora queſta diſtanza per la *riſultante* di tutte le preſſioni orizzontali, ovvero per $2a(b - a)$, ſi ottiene $\frac{2}{3} a^3$ pel momento della forza, che tende a far girare la ruota da L verſo O.

Ciò ſtabilito, egli è noto, che la forza ſpingente verticalmente all' insù la mezza ruota FLO (chiamata g la gravità ſpecifica della ruota) è $=(1-g).FCOL$, e queſta forza paſſa pel centro di gravità di FLO. E ſiccome il centro di gravità di qualunque ſegmento circolare diviſo per mezzo dal raggio è diſtante dal centro del cerchio per una quantità uguale al dodiceſimo del cubo della corda diviſo pel ſegmento, ſarà perciò il centro di gravità del ſemicircolo $FCOL$ diſtante dal centro C per la quantità $\frac{\frac{1}{12}.8a^3}{FCOL}=\frac{\frac{2}{3}a^3}{FCOL}$. Perlochè il momento di queſta forza tendente a far girare la ruota da O verſo L ſarà $=\frac{\frac{2}{3}a^3}{FCOL}.(1-g).FCOL=\frac{2}{3}(1-g)a^3$.

Ma oltre queſto momento, havvi pure quello dell' altra metà FQO della ruota, la quale eſiſtendo fuor d' acqua tende pel proprio peſo all' ingiù con una forza $=g.FCOQ$ $=g.FCOL$, che moltiplicata per la diſtanza $\frac{\frac{2}{3}a^3}{FCOL}$ del centro di gravità del ſemicircolo FQO dal centro della ruota dà pel momento di tal forza tendente a volger la ruota da O verſo L la quantità $\frac{2}{3}ga^3$. Dunque il momento totale per far girare la ruota da O in L, ſarà $\frac{2}{3}(1-g)a^3+\frac{2}{3}ga^3=\frac{2}{3}a^3$, cioè a dire quello ſteſſo, che ſi è trovato per far girare la ruota nella direzione oppoſta, oſſia da L verſo O.

E quindi la ruota rimarrà immobile perfettamente.

3. COR. I. Se la ruota foſſe ſpecificamente più grave dell' acqua, non potrà neppure in queſto caſo concepire alcun moto da L verſo O, come potrebbe ſembrare in ſulle prime. Imperciocchè allora il momento della forza, che ſpigne al baſſo verticalmente la mezza ruota $FCOL$, e tende a farla girare da L verſo O è $=\frac{2}{3}(g-1)a^3$, al qual momento conviene aggiugnere quello delle preſſioni orizzontali, cioè $\frac{2}{3}a^3$,

e così ottienſi il momento totale $\frac{2}{3}ga^3$ tendente a far girare la ruota da *L* in *O*; ed appunto a queſto momento è uguale quello del peſo della metà *FCOQ* tendente a dare alla ruota un rivolgimento contrario, ovvero da *O* in *L*.

3. Cor. II. Se la ruota in vece di eſſere un piano circolare foſſe una zona compreſa da due periferie concentriche (*Fig.* 3), allora dalla ſomma delle preſſioni orizzontali dell' acqua contro la ſemiperiferia eſteriore convien togliere la ſomma delle oppoſte preſſioni orizzontali contro l' altra ſemiperiferia interiore della zona. Sicchè chiamando a il raggio maggiore della zona, e λ la ſua larghezza, ſi ha la ſomma delle prime preſſioni orizzontali $= 2a(b-a)$ e la ſomma delle ſeconde $= 2(a-\lambda)\big(b-\lambda-(a-\lambda)\big) = 2(a-\lambda)(b-a)$. Dunque ſottratte queſte da quelle, reſta $2(b-a)\lambda$ per la ſomma di tutte le preſſioni, che agiſcono contro la zona della ſemiruota tuffata nel fluido in direzione tendente dal di fuori al di dentro della ruota. Inoltre la ſomma de' momenti di tutte le preſſioni orizzontali contro la ſemicirconferenza eſteriore relativamente all' aſſe *MN* è $= 2b^2a - 4ba^2 + \frac{8}{3}a^3$. E parimenti la ſomma de' momenti delle preſſioni orizzontali oppoſte della ſemicirconferenza interiore relativamente al detto aſſe è $= 2(b-\lambda)^2(a-\lambda) - 4(b-\lambda)\times(a-\lambda)^2 + \frac{8}{3}(a-\lambda)^3$. Sottratta queſta ſomma dalla precedente, reſta la ſomma de' momenti agenti contro la zona della ſemiruota dal di fuori al di dentro $= 2b^2a - 4ba^2 + \frac{8}{3}a^3 - 2(b-\lambda)^2(a-\lambda) + 4(b-\lambda)(a-\lambda)^2 - \frac{8}{3}(a-\lambda)^3 = 2b^2\lambda - 4ba\lambda + 4a^2\lambda - 2a\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^3 = 2\lambda\big(b(b-a) - ba + 2a^2 - a\lambda + \frac{1}{3}\lambda^2\big) = 2\lambda\big((b-a)(b-a) + a^2 - a\lambda + \frac{1}{3}\lambda^2\big)$. Perlochè dividendo queſta ſomma de' momenti per la ſomma delle preſ-

ſioni ſi avrà $2\lambda\left(\frac{(b-a)(b-a)+a^2-a\lambda+\frac{1}{3}\lambda^2}{2\lambda(b-a)}\right)=b-a$ $+\frac{a^2-a\lambda+\frac{1}{3}\lambda^2}{b-a}=$ alla diſtanza del *centro di preſſione* dal livello del fluido, ovvero alla diſtanza della *riſultante* di tutte le preſſioni da quel livello. Dal che ſi ſcorge, che il centro di preſſione cade ſotto al centro C della ruota alla diſtanza $\frac{a^2-a\lambda+\frac{1}{3}\lambda^2}{b-a}$ da eſſo. Quindi moltiplicando queſta diſtanza per la riſultante delle preſſioni, oſſia per $2\lambda(b-a)$, ſi ottiene $2\lambda(a^2-a\lambda+\frac{1}{3}\lambda^2)$ per eſprimere il momento delle preſſioni orizzontali dell' acqua, diretto a far girare la ruota da L in O.

Ora il momento, con cui la ſpinta verticale del fluido tende a far girare il ſemicerchio $FCOL$ da O in L (ſuppoſto che la ruota ſia formata non dalla ſola zona, ma da un piano circolare) è $=\frac{2}{3}a^3$. Parimenti il momento della ſpinta del fluido per far girare il ſemicerchio interno $VCIG$ da O in L è $=\frac{2}{3}(a-\lambda)^3$. Dunque togliendo queſto ſecondo momento dal primo ſarà il momento della zona di fluido $VGIOLF$ per dare alla ruota un rivolgimento da O in L $=\frac{2}{3}\left(a^3-(a-\lambda)^3\right)=2\lambda(a^2-a\lambda+\frac{1}{3}\lambda^2)$, che è appunto quello ſteſſo momento, con cui le preſſioni orizzontali del fluido tendono ad imprimere alla ruota un rivolgimento in verſo contrario, cioè da L in O. Dunque per la preſſione del fluido non può la ruota concepire verun movimento intorno al ſuo centro.

Il peſo poi proprio della ruota, per cui la metà della zona immerſa nel fluido tende a far girare la ruota da L in O, e l' altra metà della zona fuori del fluido tende a farla girare in direzione oppoſta, un tal peſo, dico, non può indurre alcun moto di rotazione, equilibrandoſi l' una, e l' altra metà intorno al centro C.

ARTICOLO III.

Sopra un errore, che ſi commette da molti nell' aſſegnare la miſura delle Iperboloidi.

1. Quegli Scrittori di Calcolo Integrale, i quali applicano la formola generale per la miſura di tutte le conoidi ad indagare la miſura delle iperboloidi aſintotiche, nate cioè dalla rivoluzione di tutte le iperbole in generale intorno ad un aſintoto, incorrer ſogliono in un errore tanto più grave e notabile, quanto è meno avvertito. Sarà pertanto pregio dell' opera l' indicar qui l' origine e l' emenda d' un abbaglio, che ha finora impoſto a parecchi.

2. La curva *CMD* (*Fig.* 4.) rappreſenta un' iperbola equilatera riferita agli aſintoti ortogonali *BA*, *AE*, la cui equazione generale ſpettante alla famiglia di tutte le iperbole è $x^m y^n = a^{m+n}$, preſa cioè l' aſciſſa $AN = x$, l' ordinata $NM = y$, ed $AF = FG = a$. Eſſendo $1 : \pi$ il rapporto del diametro alla circonferenza del cerchio, la formola $\int \pi y^2 dx$ dà la miſura dell' iperboloide generato dalla rivoluzione dello ſpazio *GFED* intorno all' aſintoto *AE*. Ma dall' equazione generale della famiglia delle iperbole ſi ricava $y^2 = \frac{a^{(2m+2n):n}}{x^{(2m):n}}$. Dunque $\int \pi y^2 dx = \pi a \int x^{(-2m):n} dx$

$$= \frac{n}{n-2m} \cdot \pi a^{(2m+2n):n} x^{1-(2m):n} + \text{coſt.} = \frac{n}{n-2m} \cdot \pi y^2 x + \text{coſt.}$$

Ed annullandoſi l' iperboloide allorchè diventa $x = AF = a$, ed $y = FG = a$, naſce quindi $\text{coſt.} = -\frac{n}{n-2m} \cdot \pi a^3$; e conſeguentemente l' iperboloide generato dalla rotazione dello ſpazio indeterminato *GFNM* intorno all' aſintoto *AE* riſulta $= \frac{n\pi}{2m-n}(a^3 - y^2 x)$.

3. Sin qui il raziocinio è giuſtiſſimo; ma proſieguono que-

ſti Autori, e dicono: prendendo infinita la x, e però la $y = 0$, l' eſpreſſione $\frac{n\pi}{2m-n}(a^3 - y^2 x)$ ſi cangia in $\frac{n}{2m-n}\cdot\pi a^3$, vale a dire in $\frac{n}{2m-n}$ moltiplicato pel cilindro generato dalla rivoluzione del quadrato AG intorno all'aſintoto. Da ciò inferiſcono il ſeguente general Teorema: *Nelle iperbole equilatere di qualunque genere o grado l' iperboloide aſintotico infinitamente lungo prodotto dal rivolgimento dello ſpazio* GFED *intorno al ſuo aſintoto ſta al cilindro nato dalla rivoluzione del quadrato* AG *come ſta* n : 2m — n, *vale a dire quell' iperboloide è ſempre finito e aſſegnabile, eccettuato l' unico caſo di* 2m = n, *in cui diventa infinito.*

4. La falſità di queſto Teorema ſi mette ad evidenza ſott' occhio con far vedere, che non nel ſolo caſo di $2m = n$, ma anche in altri infiniti l' iperboloide acquiſta un valore maggiore di qualunque dato, cioè a dire infinito. Per dimoſtrar ciò ripiglio l' equazione

$$\int \pi y^2 dx = -\frac{n}{n-2m}\cdot\pi a^{(2m+2n):n} x^{1-(2m):n} + \text{coſt.},$$

ed eſſendo per ipoteſi $\int \pi y^2 dx = 0$ allorchè $x = a$, ritrovo come prima $\text{coſt.} = -\frac{n}{n-2m}\cdot\pi a^{(3n):n} = -\frac{n}{n-2m}\cdot\pi a^3$, e quindi l' iperboloide prodotto dal rivolgimento dello ſpazio indeterminato $GFNB$ intorno all' aſintoto AE ha per miſura

$$\frac{n}{2m-n}(\pi a^3 - \pi a^{(2m+2n):n} x^{(n-2m):n})$$

$$= \frac{n\pi a^3}{2m-n}(1 - a^{(2m-n):n} x^{(n-2m):n}).$$

Se ora in queſt' eſpreſſione ſi fa x infinita, eſſa rappreſenta il valore dell'iperboloide infinitamente lungo prodotto dalla rivoluzione dello ſpazio aſintotico $GFED$ intorno all' aſintoto FE. Ma in tal ſuppoſto di x infinita la detta eſpreſſione diventa viſibilmente infinita tutte le volte che l' eſponente n dell' ordinata nell' equazione di tutte le iperbole agli aſintoti ſupera il doppio dell' eſponente m dell'aſciſſa. Egli è dunque evidente, che l' iperboloide aſintotico infinitamente allungato ha un valore infinito in tutti quegl' infiniti caſi, ne' quali n è maggiore di $2m$.

5. L' origine dell' errore dipende dal ſupporre, che la quantità y^2x debba annullarſi ogniqualvolta divenga $y = 0$ quand' anche x ſi faccia infinita. Ciò appariſce falſo in infiniti caſi mediante la ſoſtituzione del valore di y^2 dato per x: imperciocchè eſſendo $y^2 = a^{(2m+2n):n} x^{-(2m):n}$, naſce $y^2x = a^{(2m+2n):n} x^{1-(2m):n}$, dove ſi vede manifeſtamente, che poſta x infinita tanto è lungi, che ſempre debba annullarſi la quantità y^2x, che anzi per l' oppoſto queſta quantità diventa infinita tutte le volte che $1 > \frac{2m}{n}$, ovvero $n > 2m$.

6. In generale ſi poſſono ſtabilire queſti due Canoni:

I.

La quantità $Bx^p y^r$, *nella quale facendoſi* x *infinita diventa* y *infiniteſima, e ſi ſa altronde eſſere* $y = bx^t$, *la quantità, dico,* $Bx^p y^r$ *diviene* 1.° *zero allorchè il numero* $p + tr$ *è negativo*: 2.° *ella diviene aſſegnabile e finita allorchè* $p + tr = 0$. 3.° *eſſa acquiſta un valore infinito qualora* $p + tr$ *ſia un numero affermativo*.

II.

Nel ſuppoſto di x *infinita e di* y *infiniteſima la quantità* $Bx^p y^r$ 1.° *ſi annulla quando il numero* $\frac{p + rt}{t}$ *è poſitivo*: 2.° *ha un valore finito quando quel numero è zero*: 3.° *diventa infinita, ſe il detto numero è negativo*.

ARTICOLO IV.

Sopra le Molle.

1. Una molla rappreſentata da una linea retta, e contratta d' una certa quantità, ſe venga appoggiata per una

ſua eſtremità ad un oſtacolo immobile , oppure al contrario ſia interamente libera da una parte o dall' altra , ſembra a prima viſta dover paſſare nel ſuo rilaſciamento per li medeſimi gradi di moto in ambedue i caſi. Infatti eſſendo in entrambi la medeſima la forza reſtitutiva , produttrice del moto , non appar ragione della diverſità di queſto nella molla fiſſa e nella libera . Il *d' Alembert* è ſtato il primo ad avvertire , che queſt' apparenza è ingannevole , e che fatto il calcolo del moto della molla ne' due ſtati propoſti ſi troveranno due riſultati notabilmente diverſi.

2. Per entrare ſopra di ciò in qualche dettaglio, ſia (*Fig.* 5) AC una molla rettilinea nel ſuo ſtato naturale, la quale appoggiata in A contro un oſtacolo immobile venga teſa e contratta in AB, ſicchè la ſua contrazione ſia rappreſentata da CB. Suppongo ora , che ceſſi ad un tratto la forza contrattiva , e che allentandoſi la molla la ſua eſtremità libera B arrivi in D dopo un tempo t, e percorra $BD = x$; indi faccio la contrazione primitiva $CB = a$, la contrazione $CD = a - x$. Chiamata poi f la forza dilatativa o reſtitutiva della molla in B, e ſupponendola proporzionale alla quantità della contrazione , ſicchè ſia la forza reſtitutiva in $D = \frac{f}{a}(a - x)$, ſi ha pel principio delle forze acceleratrici $\frac{f}{a}(-x)dt^2 = ddx$, la quale equazione moltiplicata per dx , ed integrata nell' ipoteſi di dt coſtante ſi cangia in queſt' altra $\frac{f}{a}\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right)dt^2 + Cdt^2 = \frac{1}{2}dx^2$. Per determinare la coſtante C riduco queſt' equazione alla forma $\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2f}{a}\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right) + 2C$, ovvero $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\left(\frac{2f}{a}\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right) + 2C\right)}$, ed oſſervo, che la velocità $\frac{dx}{dt}$ dell' eſtremità della molla in D è nulla al principio del moto, ovvero in B allorchè $x = 0$, dal che naſce nella precedente equazione $0 = \sqrt{2C}$, ovvero $C = 0$. Dunque l' in-

tegrale completo ſarà $dx^2 = \frac{2f}{a}\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right)dt^2$, e quindi

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{f}\cdot\sqrt{\left(2x-\frac{x^2}{a}\right)}} = \frac{dx:\sqrt{a}}{\sqrt{f}\cdot\sqrt{\left(\frac{2x}{a}-\frac{x^2}{a^2}\right)}} = \frac{\left(\frac{a}{f}\right)^{1:2}.dx:a}{\sqrt{\left(\frac{2x}{a}-\frac{x^2}{a^2}\right)}}.$$

Perlochè integrando ſi avrà $t=\left(\frac{a}{f}\right)^{1:2}$. Arc. ſen. verſ. $\frac{x}{a}$ ſenza coſtante, perchè x, e t ſvaniſcono inſieme. Pertanto chiamata v la velocità $\frac{dx}{dt}$ della molla nel punto D abbiamo le due equazioni

1°. $v=\sqrt{\left(\frac{2f}{a}\left(ax-\frac{1}{2}x^2\right)\right)}$.

2°. $t=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{f}}$. Arc. ſen. verſ. $\frac{x}{a}$

Da queſte ſi ricavano facilmente le due altre ſeguenti

3°. $x=a\pm\sqrt{\left(a^2-\frac{av^2}{f}\right)}$.

4°. $x=a$ ſen. verſ. $\frac{t\sqrt{f}}{\sqrt{a}}$

Paſſo ora all' altro ſuppoſto, che la molla (*Fig. 6*) AC ſia interamente libera nell' uno e nell' altro eſtremo, e venendo contratta in AB ſi rilaſci da ambe le eſtremità diſtendendoſi per gli ſpazj eguali BD, AD' nel tempo t. Prendo la forza reſtitutiva in $B=f$, lo ſpazio $BD=AD'=y$, $BC=a$, e ſuppongo al ſolito le forze reſtitutive proporzionali alle contrazioni. Quindi ſe la primitiva contrazione è $CB=a$, la contrazione paſſato il tempo t, quando le due eſtremità della molla ſono arrivate in D, e D', ſarà $CB-DB-D'B$ $=CB-2DB=a-2y$, e conſeguentemente riſulta l' analogia

$$a : a-2y :: f : \frac{f}{a}(a-2y)$$

dove il quarto termine $\frac{f}{a}(a-2y)$ eſprime la forza reſtitutiva in D, ovvero in D'. Abbiamo pertanto l' equazione pel moto della molla in queſto ſecondo caſo $\frac{f}{a}(a-2y)dt^2 = ddy$, la quale moltiplicata per dy diviene $\frac{f}{a}(ady-2ydy)dt^2 = dyddy$, il cui integrale completo nell' ipoteſi di dt coſtante è $\frac{f}{a}(ay-y^2)dt^2 = \frac{1}{2}dy^2$; dal che ſi ricava $dt = \frac{dy}{\sqrt{f}\cdot\sqrt{(2y-\frac{2y}{a})}}$, e moltiplicando il ſecondo membro ſotto e ſopra per $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$ naſce $dt = \frac{dy\sqrt{2}:\sqrt{a}}{\sqrt{f}\cdot\sqrt{(\frac{4y}{a}-\frac{4y^2}{a^2})}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2f}}\cdot\frac{2dy:a}{\sqrt{(\frac{4y}{a}-\frac{4y^2}{a^2})}}$. L' integrale completo di queſt' ultima equazione è manifeſtamente $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2f}}$. Arc. ſen. verſ. $\frac{2y}{a}$. Chiamata poi v la velocità in D, ovvero D' trovaſi $v = \frac{dy}{dt} = \sqrt{(\frac{2f}{a}(ay-y^2))}$. Abbiamo dunque le ſeguenti equazioni

1.° $v = \sqrt{(\frac{2f}{a}(ay-y^2))}$

2.° $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2f}}$. Arc. ſen. verſ. $\frac{2y}{a}$

Da queſte poi derivano immediatamente le due altre

3.° $y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{av^2}{2f})}$

4.° $y = \frac{1}{2}a$ ſen. verſ. $\frac{t\sqrt{2f}}{\sqrt{a}}$

ARTICOLO

ARTICOLO V.

Sopra la trasfuſione della velocità nel conflitto de' corpi.

Sia una ſerie di globi continuamente proporzionali in numero $n+1$, ed A, B ſieno i due primi, U l' ultimo, cioè

$$A,\ B,\ \frac{B^2}{A},\ \frac{B^3}{A^2}\ldots\frac{B^n}{A^{n-1}}=U.$$

Si ſpinga direttamente il primo colla velocità c contro il ſecondo immobile, e queſto colla velocità comunicata vada ad urtare il terzo immobile, queſto il quarto, e così ſino all' ultimo; è chiaro che poſto $\frac{p}{1}$ il rapporto dell' elaſticità de' globi alla percuſſione, la celerità del primo A comunicata a B ſarà $=\frac{(1+p)Ac}{A+B}$; e quella da B comunicata al terzo ſarà per la ſteſſa ragione $=\left(\frac{(1+p)B}{B+\frac{B^2}{A}}\right)\left(\frac{(1+p)Ac}{(A+B)}\right)$

$=\frac{(1+p)^2A^2c}{(A+B)^2}$; quella del terzo comunicata al 4.° ſarà

$=\frac{(1+p)\frac{B^2}{A}}{\frac{B^2}{A}+\frac{B^3}{A^2}}\times\frac{(1+p)^2A^2c}{(A+B)^2}=\frac{(1+p)^3A^3c}{(A+B)^3}$. Dunque le velocità de' globi formeranno la ſeguente progreſſione geometrica

$$1,\ \frac{(1+p)Ac}{A+B},\ \frac{(1+p)^2A^2c}{(A+B)^2},\ \frac{(1+p)^3A^3c}{(A+B)^3},\ldots\ \frac{(1+p)^nA^nc}{(A+B)^n}=$$

velocità del globo U.

Se ora ſi ſuppone, che i due globi A ed U abbiano un rapporto finito, e che il numero de' medj proporzionali fra eſſi ſia infinito, è manifeſto, che B non differirà da A ſe non d' una quantità infiniteſima ω, cioè ſarà $B=A\pm\omega$, e la prima ſerie ſi muterà in queſt' altra

$$A,\ A\pm\omega,\ \frac{(A\pm\omega)^2}{A},\ \frac{(A\pm\omega)^3}{A^2},\ldots\frac{(A\pm\omega)^n}{A^{n-1}}=U,$$

e l' altra ſerie delle velocità ſi cangerà in queſt' altra

$$1,\ \frac{(1+p)Ac}{2A\pm\omega},\ \frac{(1+p)^2A^2c}{(2A\pm\omega)^2},\ \frac{(1+p)^3A^3c}{(2A\pm\omega)^3}\ldots\frac{(1+p)^nA^nc}{(2A\pm\omega)^n}=$$

velocità di U. Dunque il rapporto della velocità di U a quella di A è $=\frac{(1+p)^n.A^nc}{(2A\pm\omega)^n}:c=\frac{(1+p)^nA^n}{(2A\pm\omega)^n}:1$; ed il rapporto della maſſa di U a quella di A è $=\frac{(A\pm\omega)^n}{A^{n-2}}:A$ $=\frac{(A\pm\omega)^n}{A^n}:1$. Rifletto ora, che il primo rapporto $\frac{(1+p)^nA^nc}{(2A\pm\omega)^n}:c$, ovvero $\frac{(1+p)^nA^n}{(2A\pm\omega)^n}:1$, ha per logaritmo $n\log.\frac{(1+p)A}{2A\pm\omega}$, ed il ſecondo rapporto delle maſſe ha per logaritmo $n\log.\frac{A\pm\omega}{A}$. Eſſendo poi $\frac{(1+p)A}{2A\pm\omega}=\frac{1+p}{2}$ $\mp\frac{\left(\frac{1+p}{2}\right)\omega}{2A}$; ed $\frac{A\pm\omega}{A}=1\pm\frac{\omega}{A}$, ſarà in conſeguenza

$$n\log.\frac{(1+p)A}{2A\pm\omega}=n\log.\left(\frac{1+p}{2}\mp\frac{\left(\frac{1+p}{2}\right)\omega}{2A}\right)=n\log.\frac{1+p}{2}$$

$\mp\frac{n\omega}{2A}$; ed $n\log.\frac{A\pm\omega}{A}=n\log.\left(1\pm\frac{\omega}{A}\right)=\pm\frac{n\omega}{A}$. Si faccia $n\log.\frac{1+p}{2}\mp\frac{n\omega}{2A}=\log.x$; ed $\pm\frac{n\omega}{A}=\log.y$; e naſcerà $\log.x=-\frac{1}{2}\log.y+n\log.\left(\frac{1+p}{2}\right)=\log.\left(\frac{1+p}{2}\right)^n\times\frac{1}{\sqrt{y}}$; e quindi $x=\left(\frac{1+p}{2}\right)^n\frac{1}{\sqrt{y}}$. Ma x è $\frac{(1+p)^nA^nc}{(2A\pm\omega)^n}:c$, cioè eſprime il rapporto della velocità del globo ultimo U alla velocità del primo A; ed $y = \frac{(A \pm \omega)^n}{A^{n-1}} : A$, e però $\frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt{A} : \sqrt{\frac{(A \pm \omega)^n}{A^{n-1}}}$. Dunque la velocità dell' ultimo globo ſta alla velocità del primo come $(\frac{1+p}{2})^n$ moltiplicato per la radice della maſſa del primo ſta alla radice della maſſa dell' ultimo. Laonde ſuppoſti i globi perfettamente elaſtici, cioè $p = 1$, ſta la velocità comunicata all' ultimo alla velocità del primo in ragione ſudduplicata inverſa delle maſſe. Sicchè ad un globo quattro volte maggiore il primo non può comunicare anche per mezzo d' un infinito numero di globi interpoſti più della metà della ſua velocità, ad uno nove volte maggiore non può imprimerne più d' un terzo, ad uno ſedici volte maggiore più d' un quarto ecc., e viceverſa ad un globo quattro volte minore non può traſfondere il primo più del doppio della ſua velocità, ad uno nove volte minore più del triplo, ſedici volte minore più del quadruplo ecc., e quelle velocità $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ecc. . . . . . 2, 3, 4 ecc. ſono *il limite* della velocità che può acquiſtare l' ultimo corpo. Che ſe i globi ſono imperfettamente elaſtici, talmente che $p < 1$, allora pel valore infinito di n diventa infiniteſima la quantità $(\frac{1+p}{2})^n$, e conſeguentemente infiniteſima la velocità traſfuſa all' ultimo riſpetto alla velocità del primo, ſuppoſto ſempre finito il rapporto delle due maſſe.

Di qui appariſce quanto ſia erroneo il principio da molti adottato, *che ſi poſſa comunicare ai corpi mediante la colliſione una velocità qualunque, per grande e ſmiſurata ella ſia*, principio, che non può avverarſi ſe non nell' unico aſtratto ed ideale ſuppoſto, che nella ſerie de' corpi il primo percotente ſia immenſamente maggiore dell' ultimo.

ARTICOLO VI.

Teoremi ſopra il Moltiplicatore, che rende integrabili le equazioni differenziali di primo ordine a più variabili.

TEOREMA I.

Se l' equazione differenziale $Pdx + Qdy = 0$ ſi moltiplica per un fattore M, il quale ſia una funzione delle variabili x, y, come lo ſono P, e Q, le due equazioni $Pdx + Qdy = 0$, $MPdx + MQdy = 0$ non ponno mai eſſere per sè integrabili congiuntamente, trattone il caſo, in cui il fattore M ſia una tal funzione delle variabili, che il ſuo valore rieſca coſtante.

TEOREMA II.

Ogni qual volta nell' equazione differenziale $Pdx + Qdy = 0$ prendendo la differenza parziale di P per rapporto ad y, e la differenza parziale di Q per rapporto ad x, e ſottraendo queſta ſeconda dalla prima, e dividendo il reſiduo per Q, riſulterà per quoziente una funzione della ſola variabile x; ſi potrà ſempre determinare una funzione della ſteſſa x, la quale moltiplicando la propoſta equazione la renderà integrabile.

TEOREMA III.

Se nell' equazione $Pdx + Qdy = 0$, la quantità $\frac{1}{P}\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)$ ſarà una funzione della ſola y, ſi potrà ſempre determinare la forma del moltiplicatore M, il quale eſſendo pure una funzione della ſteſſa y rende integrabile la detta equazione.

TEOREMA IV.

Se nell' equazione differenziale di primo ordine a tre variabili $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ ſi prende la ſomma della differenza parziale di P per rapporto ad y, e della differenza parziale della ſteſſa P per rapporto a z, e da queſta ſomma ſi ſottrae la ſomma della differenza parziale di Q per rapporto ad x, e della differenza parziale di R per rapporto alla ſteſſa x, e ſi divide queſto reſiduo per $Q+R$, e ſi trova che il quoziente, che ne riſulta, è una funzione della ſola variabile x; ſi potrà ſempre in queſta ipoteſi determinare la forma del fattore M, il quale rende integrabile la propoſta equazione.

TEOREMA V.

Nell' equazione differenziale $Pdx+Qdy+Rdz=0$ pigliando le due differenze parziali di Q in ordine alla variazione di x, e z, e dalla loro ſomma ſottraendo la ſomma delle differenze parziali di P, ed R per rapporto alla variazione di y, e dividendo il reſiduo per $P+R$, ſe il quoziente, che naſce, è una funzione della variabile ſola y, la forma del moltiplicatore M, che rende integrabile la propoſta equazione, è ſempre data.

TEOREMA VI.

Nell' equazione $Pdx+Qdy+Rdz=0$ ſe prendendo la ſomma delle due differenze parziali di R per rapporto alla variazione di x, ed y, e da eſſa ſottraendo la ſomma delle differenze parziali di P, e Q per rapporto alla variazione di z, e poſcia dividendo il reſiduo per $P+Q$ ſi trova, che il quoziente, che ne riſulta, è una funzione della ſola variabile z, il fattore M ſarà ſempre dato per una funzione della ſteſſa z.

TEOREMA VII.

Se nell'equazione differenziale $Pdx+Qdy+Rdz+dv=0$ a quattro variabili la formola $\frac{1}{Q+R+1}\left(\frac{dP}{dy}+\frac{dP}{dz}+\frac{dP}{dv}-\frac{dQ}{dx}-\frac{dR}{dx}\right)$ ſarà una funzione della ſola variabile x, il moltiplicatore, che rende integrabile la predetta equazione, ſi potrà ſempre aſſegnare.

TEOREMA VIII.

Il fattore, che rende integrabile l' equazione $Pdx + Qdy + Rdz + dv = 0$, è ſempre noto e aſſegnabile ogni qualvolta la formola $\frac{1}{P+R+1}\left(\frac{dQ}{dx,\,dz,\,dv} - \frac{d(P+R)}{dy}\right)$ (*) è una funzione della ſola y.

TEOREMA IX.

Sarà data la forma del fattore M, che rende integrabile la predetta equazione, tutte le volte che l' eſpreſſione $\frac{1}{P+Q+1}\left(\frac{dR}{dx,\,dy,\,dv} - \frac{d(P+Q)}{dz}\right)$ ſarà una funzione della ſola variabile z.

TEOREMA X.

Se i coefficienti P, Q, R de' differenziali delle variabili nella predetta equazione hanno tra loro tal relazione, che la formola a differenze parziali $\frac{1}{P+Q+R}\left(\frac{d(P+Q+R)}{dv}\right)$ rieſca uguale ad una funzione della ſola variabile v, ſarà ſempre aſſegnabile il fattore M, dal quale dipende l' integrazione di quella equazione.

(*) Io indico la ſomma delle differenze parziali $\frac{dQ}{dx} + \frac{dQ}{dz} + \frac{dQ}{dv}$ coll' eſpreſſione compendioſa $\frac{dQ}{dx,\,dz,\,dv}$.

ARTICOLO VII.

Sopra la Teoria delle potenze parallele.

Sino ad ora i Meccanici ſono ſtati ſoliti di dedurre la teoria delle potenze parallele da quella delle potenze concorrenti mediante l' ipoteſi un poco dura di rimuovere ad un' infinita diſtanza il punto di concorſo delle potenze, che allora diventano parallele.

Ecco pertanto un metodo di preſcindere da queſt' ipoteſi nello ſtabilire le proprietà delle potenze parallele. Sieno applicate (*Fig.* 7.) alla verga AD le due potenze parallele AB, DE. Si prenda ſulla direzione della potenza DE un punto O, e ſi congiunga OA, la quale incontri in C la BC menata parallela alla verga dal punto B. Indi ſi pigli $OF = AC$, $OG = DE$, e ſi guidi nel parallelogrammo FG la diagonale OH, la quale incontra, prolungandola, la verga in I, donde pigliando $IM = OH$, e menando MP parallela alla verga, ed uguale a CB, ed indi giungendo IP, queſta IP è la riſultante delle due potenze parallele AB, DE. Imperciocchè OH, ovvero IM è la riſultante delle due AC, DE; IP è la riſultante delle due IM, MP, ovvero delle tre AC, MP, DE, oppure AC, CB, DE, o finalmente delle due propoſte AB, DE.

Ora biſogna dimoſtrare, che queſta riſultante IP è 1.° parallela alle due componenti AB, DE; 2.° uguale alla loro ſomma; 3.° applicata ad un tal punto I della verga, che ſta $AB : DE :: ID : IA$.

Dimoſtrazione.

1.° Menata da I la IL uguale e parallela alla OF, e la IN uguale e parallela alla DE, è manifeſto, che la retta IM rieſce diagonale del parallelogrammo formato da IL, ed IN, e la retta, che da M ſi mena parallela alla verga ſino al lato IN prolungato, coincide colla MP; e quindi la IP cade ſul lato IN, e conſeguentemente è parallela ad AB, e DE.

2.° Pe' triangoli ſimili ed uguali ACB, NMP riſulta $AB = NP$; dunque $IP = IN + NP = DE + AB$.

3.° AB ſta a DE in ragion compoſta di AB ad AC, e di AC a DE. Ma $AB:AC::OD:OA$, $AC:DE::OA.DI:OD.AI$ (Boſſut *Mech.* §. 42.). Dunque AB ſta a DE in ragion compoſta di $\frac{OD:OA}{OA.DI:OD.AI}$, cioè come $DI:AI$. Il che era ecc.

Si dimoſtra ciò in una maniera più generale ſupponendo (*Fig.* 8.) il punto D fuori delle direzioni delle due potenze parallele AC, Mi. Imperciocchè condotte le rette DA, DM, e le parallele CB, iG alla verga AM, indi preſa $DE=AB$, $DF=MG$, e fatto il parallelogrammo EF, la ſua diagonale Du ſarà la forza compoſta di AB, MG. Dal punto t della verga, dove reſta tagliata dalla detta diagonale, ſi tiri tN parallela ed uguale a DE, e tH parallela, ed uguale ad MG, e ſi compia il parallelogrammo NH, la cui diagonale tP, ſarà in dirittura con Du, ed uguale a Du. Finalmente dallo ſteſſo punto t ſi guidi la tr parallela alle potenze date AC, Mi, e ſi giunga la Pr parallela alla verga; dico 1.°, che ſarà tr la forza compoſta delle due date parallele AC, Mi; 2.° che ſarà $tr=AC+Mi$; 3.° che ſtarà $AC:Mi::Mt:tA$.

Dimoſtrazione.

1.° La potenza AC è compoſta di AB, BC; la forza Mi di MG, Gi. Dunque la compoſta di AC, Mi è la ſteſſa che la compoſta delle quattro DE, DF, BC, Gi, cioè delle tre Du, BC, Gi, oppure tP, BC, Gi. Ora la potenza BC agiſce in A verſo M, e la Gi agiſce in M verſo A, cioè in direzione oppoſta, e sì l' una che l' altra può concepirſi applicata al punto t della linea di loro direzione. Dunque la compoſta delle due date AC, Mi è la ſteſſa che la compoſta delle due tP, $Gi-BC$. Se pertanto ſi guidano parallele alla verga le Nml, HOS, la ſimilitudine, ed uguaglianza de' triangoli ABC, tNm; MiG, tHS dà $BC=Nm$, $Gi=HS$; onde $Gi-BC=HS-Nm=HO+OS-(Nl-lm)=OS+lm$.

Dunque la potenza compoſta delle due date parallele è la ſteſſa che la compoſta di tP, ed $OS+lm$. Dal punto O guido parallelamente alle date potenze la retta Oq, ed ho il triangolo OPq ſimile ed uguale a tlm: dunque $lm=Pq$, e quindi

quindi $OS + lm = Pr$. Perlochè la potenza compoſta delle due AC, Mi non è altro che la tr.

2.° $tr = tS + Sr = Mi + Oq = Mi + tm = Mi + AC$.

3.° Sta $AC:Mi$ in ragione compoſta di $\begin{matrix} AC:AB \\ AB:MG \\ MG:Mi \end{matrix}$, ovvero in ragione compoſta (guidata la DX parallela alle due potenze date) di $\begin{matrix} DX:DA \\ DA.tM:DM.tA \\ DM:DX \end{matrix}$, vale a dire come $tM:tA$. Il che era ecc.

ARTICOLO VIII.

Sopra un grave errore di taluno nella riſoluzione delle forze.

I. Due verghe lineari perfettamente rigide XA, AY (*Fig.* 9.) congiunte in A ſotto un angolo ottuſo XAY, ed attaccate a due punti immobili X, Y, vengono tirate da una ſorza AB, che agiſce da A verſo B in direzione perpendicolare alla verga AY. Qui pare a primo aſpetto, che eſſendo la forza traente perpendicolare ad AY non debba per eſſa il punto fiſſo Y ſoffrire alcuna preſſione o ſtiramento; ma ſe ſi riflette, che la detta forza tende a far rotare da ſiniſtra a deſtra la verga AX intorno ad X, e che ciò non può accadere, atteſa l'unione delle due verghe, ſenza che venga ſtirato o premuto in fuori il punto fiſſo Y, ſe ne inferiſce, che la forza AB, ſebbene perpendicolare alla verga AY, agiſce contro il punto fiſſo Y.

II. Per ritrovare gli sforzi fatti contro X, Y dalla data forza AB, queſta ſi riſolve comunemente dai Meccanici nelle due AC, AD in direzione delle verghe, e ſi pianta il Teorema, che lo sforzo fatto contro Y nella direzione YA ſta allo sforzo fatto contro X nella direzione XA come ſta AD ad AC.

III. Contro il detto Teorema ſorge una difficoltà, ed è che ſe la forza AB ſi riſolve in AE in direzione della verga XA, ed AF perpendicolare ad eſſa verga, lo sforzo fatto contro X pare dover eſſere unicamente AE (minore di AC), eſſendo nulla per riguardo al punto fiſſo X la forza AF perpendicolare alla verga. Si riſponde, eſſer falſo, che la forza AF perpendicolare alla verga XA niente agiſca contro X; imperciocchè eſſa tende a far girare da dritta a ſiniſtra l'altra verga AY intorno ad Y, il che per l'unione delle due verghe in A produce in X uno sforzo diretto da X in A.

IV. Perlochè riſolvendo anche la forza AF nelle due AH, AG, quella in direzione della verga YA, queſta perpendicolare ad eſſa; e riſolvendo parimenti AG nelle due tra sè perpendicolari AL, AI; e poſcia AL nelle due perpendicolari AN, AM; e così pure AM nelle due perpendicolari AP, AO; e così ſempre ſenza fine, riſulterà tutto lo sforzo, eſercitato contro il punto fiſſo X in direzione XA, $= AE + AI + AO +$ ecc. *in inf.*, e ſimilmente lo sforzo fatto contro Y in direzione YA riſulterà $= AH + AN +$ ecc. *in inf.*

V. Le rette AE, AI, AO, ecc. *in inf.* formano una progreſſione geometrica diſcendente: imperciocchè per li triangoli ſimili ſi ha $AB : AG :: \overline{AF}^2 : \overline{AG}^2 :: \overline{AG}^2 : \overline{AL}^2 :: AG : AM$. Dunque $∺ AB, AG, AM$, ecc. Dunque $∺ AE, AI, AO$ ecc.

VI. La ſomma di detta progreſſione, ovvero $AE + AI + AO +$ ecc. *in inf.* è uguale ad AC: in fatti ſi ha queſta ſomma prendendo il quadrato del primo termine, e dividendolo per la differenza fra il primo termine e il ſecondo, vale a dire $AE + AI + AO +$ ecc. *in inf* $= \frac{\overline{AE}^2}{EI}$ (e prolungando IG in T) $= \frac{\overline{BF}^2}{BT}$; la ſimilitudine poi de' triangoli ſomminiſtra $BT : BF :: \overline{BG}^2 : \overline{BF}^2 :: \overline{BF}^2 : \overline{BA}^2 :: BF : BD$. Dunque $BD = AC = \frac{\overline{BF}^2}{BT} = AE + AI + AO +$ ecc. *in inf.* Si dimoſtra ſimilmente $AH + AN +$ ecc. *in inf.* $= AD$.

VII. Finalmente ſi conchiuda col rifleſſo importante e deciſivo, il quale baſta per pienamente convincere, vale a dire che la primitiva comune riſoluzione della forza AB in AC, AD è la vera e l'unica per far conoſcere gli sforzi totali eſercitati contro i punti fiſſi X, Y in direzione delle verghe ; e ciò per l' incontraſtabil ragione , che la forza *AC* non può in verun modo agire contro il punto *Y* reſtando tutta conſumata contro *X*, ed *AD* non può in minima parte agire contro *X*, perchè tutta s' impiega e conſuma contro *Y*. Di qui ſi ſcopre l' abbaglio del Sig. *Friſi* , il quale nel 2.° Tomo delle ſue Opere pag. 21 accuſa d' errore tutti i Meccanici perchè non errano con lui.

ARTICOLO IX.

Sopra la ſpinta delle travi, o tetti contro i loro ſoſtegni.

E' coſa a dir vero umiliante, che un Problema ſempliciſſimo, qual è quello di ritrovare la ſpinta d' una ſtanga o verga appoggiata ad un muro, ſia ſtato , e ſia tuttavia una pietra d' inciampo per parecchi Geometri di prima sfera, che ſi ſono poſti a trattarlo. Io eſporrò qui in breve la loro ſoluzione quaſi comunemente adottata; poſcia ne eſaminerò il fondamento ; ed in fine recherò la vera e genuina ſoluzione ricavata da principj ſicuri e incontraſtabili, non già dinamici, ma puramente ſtatici rigoroſamente dimoſtrati.

PROBLEMA.

1. *In una verga diritta* LO (Fig. 10.) *appoggiata in* L *al piano verticale* KL, *in* O *al piano orizzontale* KO, *i quali piani ſi ſuppongono perfettamente levigati, trovare la ſpinta orizzontale, come pure la verticale ſoſtenuta dal punto* O, *eſſendo ritenuto il capo della verga dall' oſtacolo* X.

I. Soluzione ſecondo il metodo comune.

Menata dal centro di gravità *G* della verga la verticale *GH*, che rappreſenti il peſo *P* della verga, ſi riſolva la forza *GH* nelle due *IH*, *GI* , una perpendicolare all' aſſe della verga, l' altra in direzione dell' aſſe iſteſſo. Ciò fatto, egli è chiaro , che la forza *GI* eſercita e conſuma tutta la ſua azione ſecondo la direzione *LO* contro il punto O, e che l' altra *IH* operando con direzione perpendicolare alla verga diſtribuiſce con la ſteſſa direzione le ſue azioni ſopra i punti O, L in reciproca ragione delle riſpettive diſtanze dal centro di gravità, onde la parte di tal forza perpendicolare, che s' aſpetta al punto O, ſarà $ON = IH \cdot \frac{GL}{LO}$. Prolungata la LO ſi pigli ſul ſuo prolungamento la $OB = GI$, e ſi guidi la perpendicolare $BM = ON$. Il punto O viene ſollecitato nello ſteſſo tempo dalle due ſorze OB, ON, oppure dalla forza ad eſſe equivalente OM, ovvero (conducendo la verticale MF) dalla forza verticale FM, e dalla orizzontale OF inteſa ad urtare orizzontalmente l' oſtacolo. Dico ora $LO = a$, $LG = b$, $LOK = \phi$; e ſarà $IH = P\,\text{coſ.}\,\phi$; $GI = P\,\text{ſen.}\,\phi = OB$; $ON = BM = \frac{bP\,\text{coſ.}\,\phi}{a}$; $OM = P\sqrt{\left(\text{ſen.}\,\phi^2 + \frac{b^2\,\text{coſ.}\,\phi^2}{a^2}\right)}$;

$$\text{ſen.}\,MOB = \frac{BM}{OM} = \frac{b\,\text{coſ.}\,\phi}{a\sqrt{\left(\text{ſen.}\,\phi^2 + \frac{b^2\,\text{coſ.}\,\phi^2}{a^2}\right)}};$$

$$\text{coſ.}\,MOB = \frac{OB}{OM} = \frac{\text{ſen.}\,\phi}{\sqrt{\left(\text{ſen.}\,\phi^2 + \frac{b^2\,\text{coſ.}\,\phi^2}{a^2}\right)}};\ \text{ſen.}\,MOF =$$

$$\text{ſen.}\,(MOB + BOF) = \text{ſen.}\,MOB\,\text{coſ.}\,BOF + \text{ſen.}\,BOF\,\text{coſ.}\,MOB$$

$$= \frac{b\,\text{coſ}\cdot\phi^2 + a\,\text{ſen.}\,\phi^2}{a\sqrt{\left(\text{ſen.}\,\phi^2 + \frac{b^2\,\text{coſ.}\,\phi^2}{a^2}\right)}};\ \text{coſ.}\,MOF =$$

$$\frac{\sqrt{\left(a^2\,\text{ſen.}\,\phi^2 + b^2\,\text{coſ.}\,\phi^2 - (b\,\text{coſ.}\,\phi^2 + a\,\text{ſen.}\,\phi^2)^2\right)}}{a\sqrt{\left(\text{ſen.}\,\phi^2 + \frac{b^2\,\text{coſ.}\,\phi^2}{a^2}\right)}} =$$

$$\frac{\sqrt{\left(a^2\,\text{ſen.}\,\phi^2\,\text{coſ.}\,\phi^2 + b^2\,\text{ſen.}\,\phi^2\,\text{coſ.}\,\phi^2 - 2ba\,\text{ſen.}\,\phi^2\,\text{coſ.}\,\phi^2\right)}}{a\sqrt{\left(\text{ſen.}\,\phi^2 + \frac{b^2\,\text{coſ.}\,\phi^2}{a^2}\right)}} =$$

$\frac{(a-b)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\phi}{a\sqrt{\left(\text{ſen.}\,\phi^2 + \frac{b^2\,\text{coſ.}\,\phi^2}{a^2}\right)}}$. Dunque finalmente la ſpinta verticale FM è $= OM\,\text{ſen.}\,MOF = \frac{P}{a}(b\,\text{coſ.}\,\phi^2 + a\,\text{ſen.}\,\phi^2)$, e la ſpinta orizzontale $OF = OM \,.\, \text{coſ.}\, MOF = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\phi$ $= \frac{P}{2a}(a-b)\,\text{ſen.}\,2\phi$. Il che era ecc.

COROLLARIO.

2. Per trovare le ſpinte orizzontale, e verticale anche contro il punto L, ſi trasferiſca in L la parte della forza perpendicolare IH che gli compete, e ſia queſta la LQ perpendicolare all' aſſe della verga; indi ſi guidi l' orizzontale QR, con che ſarà riſoluta la forza LQ nelle due LR verticale, ed RQ orizzontale. Ma $LQ = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{coſ.}\,\phi$. Dunque $LR = LQ \,.\, \text{ſen.}\, LQR = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{coſ.}\,\phi^2$, ed $RQ = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\phi = \frac{1}{2}\,\frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,2\phi$.

II. Soluzione ſecondo lo ſteſſo metodo.

3. Il peſo, o la forza verticale GH della verga (*Fig.* 11.) ſi diſtribuiſce alle due eſtremità O, ed L per modo, che riſulta in L una forza verticale $LS = \frac{P}{a}(a-b)$, ed in O una forza verticale $OT = \frac{Pb}{a}$. Abbaſſo il perpendicolo SD ſull' aſſe della verga, e rimane riſoluta la forza LS nelle due DS normale alla verga, ed LD in direzione della medeſima tendente a ſpingere il punto O ſecondo OC prolungamento della verga. Prendo $OC = LD$, e meno la verticale CV; con che reſta riſoluta la forza OC nella verticale CV, e nella forza orizzontale OV. Pertanto riſulta $OC = LD = LS \,.\, \text{ſen.}\, LSD$ $= \frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,\phi$; $OV = OC \,.\, \text{coſ.}\, COV = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\phi$

$= \frac{P}{2a}(a-b)$ ſen. 2ϕ, che è la ſpinta orizzontale contro il punto O. La ſpinta poi verticale contro lo ſteſſo punto è $= OT + CV = \frac{Pb}{a} + OC$. ſen. $COV = \frac{Pb}{a} + \frac{P}{a}(a-b)$ ſen. ϕ^2 $= \frac{Pb}{a}$ (ſen. $\phi^2 +$ coſ. ϕ^2) $+ \frac{P}{a}(a-b)$ ſen. ϕ^2 $= \frac{P}{a}$ (a ſen. $\phi^2 + b$ coſ. ϕ^2). Il che era ecc.

COROLLARIO.

4. E' manifeſto, che ſe ſi vorrà riſolvere la forza $LM = DS$ $= \frac{P}{a}(a-b)$ coſ. ϕ in altre due, una verticale LR, l' altra orizzontale LI, ſi troverà quella $= \frac{P}{a}(a-b)$ coſ. ϕ^2, e queſta $= \frac{P}{a}(a-b)$ ſen. ϕ coſ. $\phi = \frac{P}{2a}(a-b)$ ſen. 2ϕ.

SCOLIO.

5. Potrebbe naſcere il ſoſpetto, che dalle due forze LI orizzontale, ed LR verticale naſca qualche altra azione contro l'eſtremità O della verga, e quindi non ſia giuſto il valore della ſpinta verticale, e della orizzontale dianzi determinato contro il punto O. Ma queſto ſcrupolo ſi leva via mediante una nuova riſoluzione delle forze LI, LR conducendo all' aſſe della verga le perpendicolari In, Rt; con che reſta riſoluta la forza LR nelle due Lt, Rt, e la forza LI nelle due Ln, In, e di queſte quattro le due Lt, Ln dirette appunto contro il punto O per la loro uguaglianza ed oppoſizione ſi diſtruggono, e le due altre tR, nI coſpiranti riproducono colla loro ſomma la forza primitiva LM.

COROLLARIO.

6. Se ſi cercaſſe la poſizione pel maſſimo momento della forza fatta da una data trave per roveſciare il muro LK, a cui è appoggiata, converrebbe moltiplicare la forza $LI = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi$ pel ſuo braccio di leva $LK = a\,\text{ſen.}\,\varphi$, ed uguagliare a zero il differenziale del prodotto, dal che ſi avrebbe $2\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi^2 - \text{ſen.}\,\varphi^3 = 0$, e quindi $\text{ſen.}\,\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Sicchè

$$\begin{array}{rl} \text{log.}\,2 = & 0,\ 3010300 \\ \text{log.}\,3 = & \underline{0,\ 4771212} \\ & 9,\ 8239088 \\ \text{log.}\sqrt{\frac{2}{3}} = & 9,\ 9119544. \qquad \varphi = 54.^\circ\ 44'. \end{array}$$

7. E' coſa aſſai ſingolare, e degna di tutta la conſiderazione, che queſt' angolo di 54.° 44′ domini e regni (a così dire) in una notabil parte delle Scienze Meccaniche; avvegnachè 1.° queſto è l' angolo della ſituazione più vantaggioſa delle ale del mulino a vento; 2.° della ſituazione più vantaggioſa delle vele nella nave; 3.° della poſizione più favorevole del timone per far girare il vaſcello; 4.° delle cellette, che formano le api ne' loro alveari, per avere il maſſimo poſſibil riſparmio di cera.

Eſame della predetta Soluzione.

8. La precedente ſoluzione, ſebbene conforme a quanto ritrovano *Gio. Bernoulli* Oper. tom. 4. p. 189, il Sig. *Kaeſtner* nella ſua Mem. *Tigni ad parietem inclinati reperire preſſiones* negli Atti dell' Acc. di Erſurt. ann. 1778, ed altri Geometri di gran fama, è però indubitatamente erronea, ed anche ſmentita dall' eſperienza (come io ho potuto ocularmente convincermene) la quale dimoſtra all' occhio, che ſempre più creſce la ſpinta orizzontale contro l' oſtacolo inferiore quanto più la verga ſi accoſta alla poſizione orizzontale. L' errore naſce dal non tenerſi alcun conto della forza AG

(*Fig.* 12) normale alla verga, nata dalla riſoluzione della verticale *AB*, come ſe la detta *AG* non poteſſe più avere la minima azione contro l' eſtremità inferiore *O* della verga, il che è falſiſſimo: imperciocchè eſſendo la forza *AG* obbliqua al muro verticale *AD* non può ritrovare nel muro la ſua diſtruzione, come avverrebbe ſe foſſe ad eſſo perpendicolare, ed in fatti riſoluta *AG* nell' orizzontale *AQ*, e nella verticale *AX*, è evidente, che poſto da parte lo sfregamento la verga ſtriſcierebbe ſul muro lungo *AX*, e non rimane diſtrutta ſe non la forza *AQ* normale al muro. Ora è manifeſto, che la forza *AX* ha azione contro l' eſtremità inferiore *O* della verga, così che riſolvendo *AX* nelle due forze *Az* normale alla verga, ed *AN* in direzione della verga, la forza *AN* va tutta a caricare il punto *O*. Parimente ſe ſi riſolve *Az* nella forza orizzontale *Ay*, e nella verticale *Av*, quella reſta diſtrutta dalla reſiſtenza del muro, e queſta eſercita parte della ſua azione contro *O*, cioè riſolvendo *Av* nella forza *AI* normale alla verga, e nella forza *AM* in direzione di eſſa, queſta forza *AM* ſi impiega tutta contro il punto *O*, e così ſempre proſeguendo ſi trova che la ſpinta contro il punto *O* in direzione di *AO* viene rappreſentata da $AR + AN + AM +$ ecc. *in inf.* ſicchè poſti come dianzi $FP = P$, $AO = a$, $AF = b$, e però $AB = \frac{P}{a}(a - b)$, ſarà 1.° $AR = AB\ \text{ſen.}\ ABR = AB\ \text{ſen.}\ AOD = \frac{P}{a}(a - b)\ \text{ſen.}\ \phi$. Inoltre $AG = AB\,.\ \text{ſen.}\ ABG = \frac{P}{a}(a - b)\ \text{coſ.}\ \phi$, $AX = AG\,.\ \text{ſen.}\ AGX = \frac{P}{a}(a - b)\ \text{coſ.}\ \phi^2$, 2.° $AN = AX\,.\ \text{ſen.}\ AXN = \frac{P}{a}(a - b)\ \text{ſen.}\ \phi\ \text{coſ.}\ \phi^2$. Similmente riſulta $Az = AX\,.\ \text{ſen.}\ AXz = \frac{P}{a}(a - b)\ \text{coſ.}\ \phi^3$, $Av = Az\,.\ \text{ſen.}\ Azv = \frac{P}{a}(a - b)\ \text{coſ.}\ \phi^4$, 3.° $AM = Av\,.\ \text{ſen.}\ AvM = \frac{P}{a}(a - b)\ \text{ſen.}\ \phi\ \text{coſ.}\ \phi^4$. In tal guiſa proſeguendo ſi trova AR

$+ AN$

$+ AM + \text{ecc.}\ \textit{in inf.} = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,\phi\left(1 + \text{coſ.}\,\phi^2 + \text{coſ.}\,\phi^4 + \text{coſ.}\,\phi^6 + \text{coſ.}\,\phi^8 + \text{ecc.}\ \textit{in inf.}\right)$. Ma è manifeſto, che la ſerie $1 + \text{coſ.}\,\phi^2 + \text{coſ.}\,\phi^4 + \text{ecc.}$ ha per ſomma $\frac{1}{1-\text{coſ.}\,\phi^2} = \frac{1}{\text{ſen.}\,\phi^2}$. Dunque $AR + AN + AM + \text{ecc.}\ \textit{in inf.} = \frac{P(a-b)}{a\,\text{ſen.}\,\phi}$. Perlochè ſe ſi piglia ſulla direzione della verga la $OH = \frac{P(a-b)}{a\,\text{ſen.}\,\phi}$, e indi ſi abbaſſa la verticale HK, naſce la ricercata ſpinta orizzontale $OK = OH\,.\,\text{coſ.}\,KOH = \frac{P(a-b)\,\text{coſ.}\,\phi}{a\,\text{ſen.}\,\phi} = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{cot.}\,\phi$; dalla quale ſi vede, che il ſuo valore va ſempre creſcendo a miſura, che ſcema l'angolo ϕ fatto dalla verga coll' orizzonte, e che diventa infinito quando queſt' angolo è infinitamente piccolo.

9. Si dimoſtra queſto ſteſſo più ſpeditamente così: ſi riſolva (*Fig.* 13) la forza verticale FP del peſo della verga nella orizzontale FI, e nella FL parallela alla verga, e ſarà $FL = \frac{FP}{\text{ſen.}\,FLP} = \frac{P}{\text{ſen.}\,\phi}$, $FI = \frac{P\,\text{coſ.}\,\phi}{\text{ſen.}\,\phi}$. Ora la forza FL s'impiega tutta a premere il punto O in direzione della verga, e viene rappreſentata da $OQ = FL = \frac{P}{\text{ſen.}\,\phi}$. Se ſi abbaſſa la verticale QG, naſce dalla forza OQ la ſpinta orizzontale $OG = OQ\,\text{ſen.}\,OQG = \frac{P\,\text{coſ.}\,\phi}{\text{ſen.}\,\phi}$. La forza poi orizzontale FI trasferendo alle due eſtremità A, ed O della verga la ſua azione per modo, che riſulta in A la ſpinta orizzontale $AS = \frac{OF}{OA}\,.\,FI = \frac{P(a-b)\,\text{coſ.}\,\phi}{a\,\text{ſen.}\,\phi}$ ed in O la ſpinta orizzontale $OE = \frac{AF}{OA}\,.\,FI = \frac{Pb\,\text{coſ.}\,\phi}{a\,\text{ſen.}\,\phi}$. Laonde tutta la ſpinta orizzontale contro O, ovvero contro l' oſtacolo poſto in O ſarà

$$OG - OE = \frac{P\,.\,\text{coſ.}\,\phi}{\text{ſen.}\,\phi} - \frac{Pb\,\text{coſ.}\,\phi}{a\,\text{ſen.}\,\phi} = \frac{P(a-b)\,\text{coſ.}\,\phi}{a\,\text{ſen.}\,\phi}$$

$$= \frac{P}{a}(a-b)\,\text{cot.}\,\phi\,.$$

10. Quando l' angolo AOD è aſſolutamente nullo, oſſia la verga è perfettamente orizzontale, allora è evidente, che eſſa non può più eſercitare veruna ſpinta orizzontale contro l' oſtacolo collocato in O; eppure l' eſpreſſione di ſiffatta ſpinta $\frac{P}{a}(a-b)\,\text{cot.}\,\phi$ diviene in tal caſo infinita. Vedaſi preſſo il Sig. Cav. *Lorgna* (*Saggi di Statica* §. XI) la ragione aſſai plauſibile di queſto paradoſſo. Intanto è manifeſto, che tutta la preſſione verticale QG, che ſoffre il punto O, uguaglia l' intero peſo della verga, cioè FP, il che appariſce dalla ſimilitudine de' triangoli FPL, OQG, che hanno le ipotenuſe FL, OQ uguali; e ciò parimente s' inferiſce dall' eſſere la ſpinta verticale contro l' eſtremità inferiore O (*Fig.* 12) uguale ad $OE + HK = \frac{Pb}{a} + OH\,.\,\text{ſen.}\,\phi = \frac{Pb}{a} + \frac{P(a-b)}{a} = P$

11. La ſpinta orizzontale (*Fig.* 13) riſulta la ſteſſa così contro l' eſtremità ſuperiore A, come contro l' inferiore O della verga, cioè $AS = OG - OE$, poichè pel §. 7. ambedue queſte quantità hanno la ſteſſa eſpreſſione $\frac{P}{a}(a-b)\,\text{cot.}\,\phi$. Ciò pure ſi dimoſtra (*Fig.* 12) così: 1.° $AQ = AG\,.\,\text{ſen.}\,AGQ = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\phi$. Inoltre $Az = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{coſ.}\,\phi^3$, 2.° $Ay = Az\,.\,\text{ſen.}\,Azy = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\phi^3$. Parimente $Av = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{coſ.}\,\phi^4$, $AI = Av\,.\,\text{ſen.}\,AvI = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{coſ.}\,\phi^5$, 3.° $AT = AI\,.\,\text{ſen.}\,AIT = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\phi^5$. Così ſeguitando ſi troverà la ſpinta orizzontale contro l' eſtremo ſuperiore della verga $= AQ + Ay + AT +$ ecc. *in inf.*

$$=\frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\phi\,(1+\text{coſ.}\,\phi^2+\text{coſ.}\,\phi^4+\text{coſ.}\,\phi^6$$

$$+\,\text{ecc. } \textit{in inf.})=\frac{P}{a}(a-b)\frac{\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\phi}{1-\text{coſ.}\,\phi^2}=\frac{P}{a}(a-b)\frac{\text{coſ.}\,\phi}{\text{ſen.}\,\phi}$$

$$=\frac{P}{a}(a-b)\,\text{cot.}\,\phi$$

Propongaſi ora più generalmente il ſeguente

PROBLEMA.

12. *Una trave* AB *è appoggiata in* B *ad un piano orizzontale, ed in* A *ad un piano obbliquo* AC, *che forma coll' orizzontale l' angolo ottuſo* ACB (Fig. 14); *ſi cerca quanta ſarà la preſſione perpendicolare in* A *contro il piano* AC, *e quanta la preſſione così verticale che orizzontale in* B.

SOLUZIONE.

Sia M il centro di gravità della trave omogenea, e la verticale MN rappreſenti il peſo della trave, che ſi riſolva in due MO perpendicolare al piano AC, ed MQ parallela alla trave. Si trasferiſca MQ in BE in direzione della trave, e ſi guidi la verticale EH. Si trasferiſca MO in AR, e BG in direzione perpendicolare ad AC, prendendo $AR=\frac{MB\,.\,MO}{AB}$, e $BH=\frac{AM\,.\,MO}{AB}$. Quindi ſi conduca la verticale GD. Ciò fatto, ſia $BA=a$, $AM=b$, $BAC=\phi$, $ACB=\omega$, $BAR=QMO=90°+\phi$, $NMO=180°-\omega$, $QMN=\omega+\phi-90°$, $EBH=180°-\phi-\omega$, $GBD=\omega-90°$, $MN=P$. Avremo dunque dalla Statica ſen. QMO : ſen. NMO :: $MN : MQ$, cioè

coſ. ϕ : ſen. ω :: $P : MQ=BE=\frac{P\,\text{ſen.}\,\omega}{\text{coſ.}\,\phi}$, parimente

ſen. QMO : ſen. QMN :: $MN : MO$, cioè coſ. ϕ : $-$coſ. $(\omega+\phi)$ :: $P : MO=-\frac{P\,\text{coſ.}\,(\omega+\phi)}{\text{coſ.}\,\phi}$. Dunque la prima preſſione ricercata $AR=\frac{MB\,.\,MO}{AB}=-\frac{P(a-b)\,\text{coſ.}\,(\omega+\phi)}{a\,\text{coſ.}\,\phi}$. Inoltre

$1 : \text{ſen.}\,HBE :: BE : HE$, oſſia $1 : \text{ſen.}\,(\phi + \omega) :: \frac{P\,\text{ſen.}\,\omega}{\text{coſ.}\,\phi} : HE$; e però $HE = -\frac{P\,\text{ſen.}\,\omega\,\text{ſen.}\,(\phi + \omega)}{\text{coſ.}\,\phi}$. Similmente $1 : \text{ſen.}\,GBD :: BG : DG$, ovvero $1 : -\text{coſ.}\,\omega :: \frac{AM\,.\,MO}{AB} : DG$, oppure $1 : -\text{coſ.}\,\omega :: -\frac{Pb\,\text{coſ.}\,(\phi + \omega)}{a\,\text{coſ.}\,\phi} : DG$ $= \frac{Pb\,\text{coſ.}\,\omega\,\text{coſ.}\,(\phi + \omega)}{a\,\text{coſ.}\,\phi}$. Dunqùe la preſſione verticale contro B ſarà $HE + DG = \frac{P}{a\,\text{coſ.}\,\phi}\big(a\,\text{ſen.}\,\omega\,\text{ſen.}\,(\phi + \omega)$ $+ b\,\text{coſ.}\,\omega\,\text{coſ.}\,(\phi + \omega)\big)$. Di più, abbiamo $1 : \text{coſ.}\,HBE :: BE : BH$, ovvero, $1 : -\text{coſ.}\,(\phi + \omega) :: \frac{P\,\text{ſen.}\,\omega}{\text{coſ.}\,\phi} : BH = -\frac{P\,\text{ſen.}\,\omega\,\text{coſ.}\,(\phi + \omega)}{\text{coſ.}\,\phi}$. Così pure $1 : \text{coſ.}\,GBD :: BG : BD$, ovvero $1 : \text{ſen.}\,\omega :: -\frac{Pb\,\text{coſ.}\,(\phi + \omega)}{a\,\text{coſ.}\,\phi} : BD = -\frac{Pb\,\text{ſen.}\,\omega\,\text{coſ.}\,(\phi + \omega)}{a\,\text{coſ.}\,\phi}$. Dunque ſarà la preſſione orizzontale contro $B = BH - BD = \frac{P\,\text{ſen.}\,\omega}{a\,\text{coſ.}\,\phi}$ $\big(b\,\text{coſ.}\,(\phi + \omega) - a\,\text{coſ.}\,(\phi + \omega)\big) = \frac{P(b - a)\,\text{ſen.}\,\omega\,\text{coſ.}\,(\phi + \omega)}{a\,\text{coſ.}\,\phi}$. Il che era ecc.

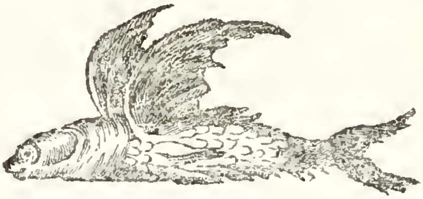


Fig : II

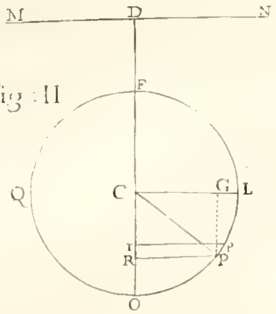

M
D
N
F
Q
C
G
L
I
p
R
P
O

Fig : III

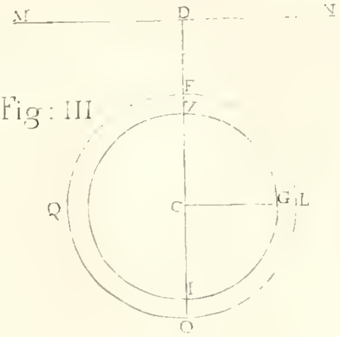

M
D
N
F
Z
Q
C
G
L
I
O

Fig : V

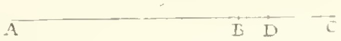
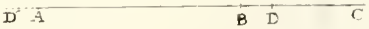


Fig : VI



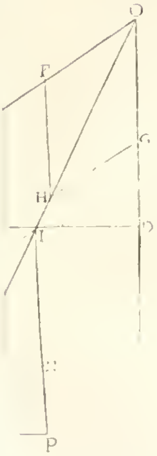


Fig : VIII

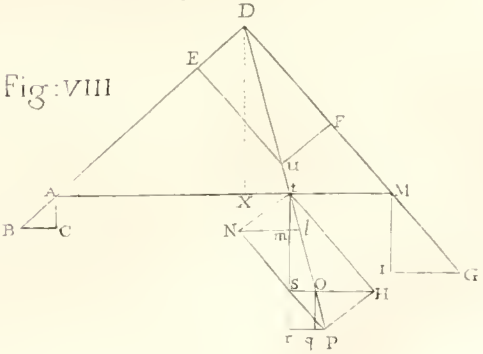

D
E
F
u
A
X
t
M
B
C
N
m
l
I
G
S
O
H
r
q
P

Fig: I

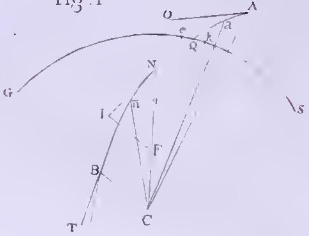

O
A
a
e
Q
k
G
S
N
I
m
q
F
B
T
C

Fig: II

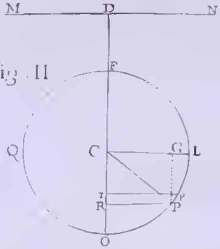

M
D
N
F
Q
C
G
L
r
p
R
P
O

Fig: III

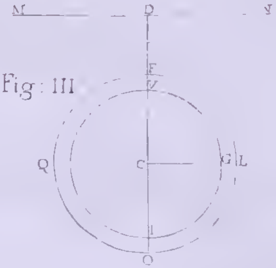

M
D
N
F
V
Q
C
G
L
I
O

Fig: IV

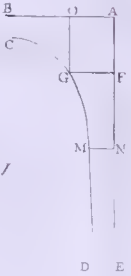

B
O
A
C
G
F
M
N
D
E

Fig: V

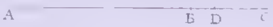


Fig: VI

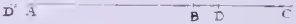


Fig: VII

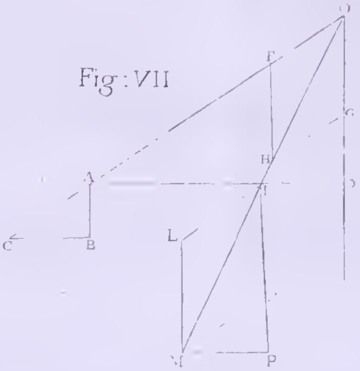
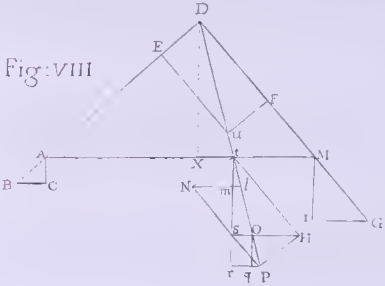

O
F
G
H
A
I
D
C
B
L
M
P

Fig: VIII


D
E
F
u
t
A
X
M
B
C
N
m
l
I
G
S
O
H
r
q
P

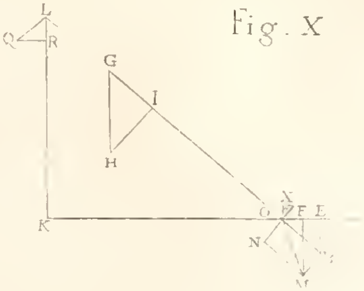


Fig. X
L
Q
R
G
I
H
K
O
X
F
E
N
M

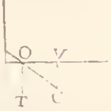
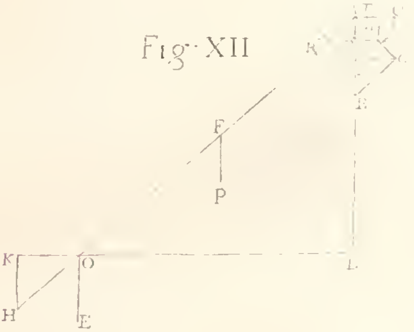
Fig: XI


Fig. XII


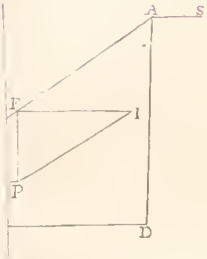


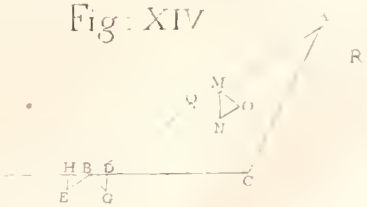
Fig: XIV

R
M
Q
O
N
H
B
D
E
G
C

Fig: IX

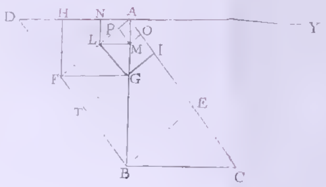

D
H
N
A
Y
P
O
L
M
I
F
G
T
E
B
C

Fig. X

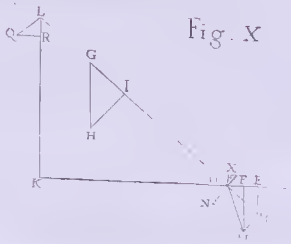

L
Q
R
G
I
H
K
X
F
E
N

Fig: XI

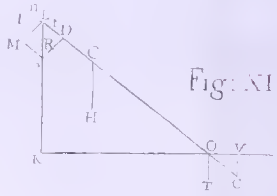

n
I
L
D
M
R
C
H
K
O
V
T
C

Fig: XII

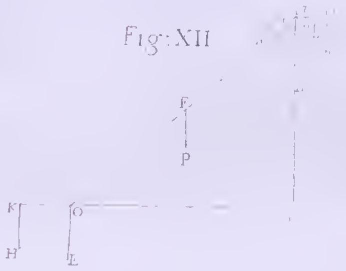


Fig. XIII

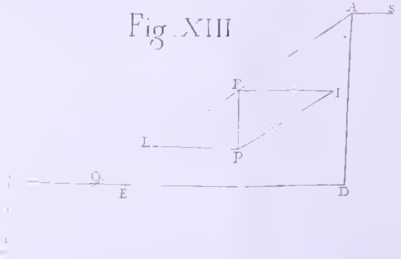
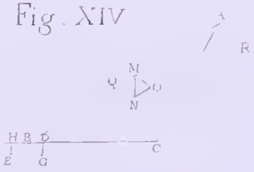


Fig. XIV


R
M
Q
O
N
H
B
D
C
E
G

SOPRA
LA DISTRIBUZIONE DELLE ALLUVIONI.

Del Sig. Cavaliere Vittorio Fossombroni.

§. 1. La terra delle montagne vien traſportata naturalmente nei ſottopoſti campi adjacenti. L'amor proprio, e l'ignoranza luſingano sì fattamente che taluno ſi è figurato ordinarſi dalla natura ogni coſa a ſeconda dei noſtri deſiderj, e ſi è quindi acquietato ſulla ſtolida fidanza che le acque torbide nel loro corſo diſtribuirebbero lateralmente la terra incaſſandoſi nella ſuperficie del globo, riſparmiando le ſpeſe per gli argini, e le contemplazioni degl'Idroſtatici. Ma la natura fa ogni coſa per sè, e ſi compiace egualmente di una florida coltivazione, e di un nebuloſo padule; onde ſe l'avidità degli uomini vuole oltre la naturale coſtituzione del paeſe ampliare l'eſtenſione delle ſemente, conviene che ponga ogni cura o per raffrenare le bizzarre inclinazioni dei fiumi, o per trarre ſuo pro dagli ſteſſi sforzi delle acque guidando le alluvioni ſopra le frigide più baſſe terre dei piani, che bene ſpeſſo reſtano in tal guiſa ſanate, e veſtite di una novella ſuperficie pregna dei principj più ſavorevoli alla vegetazione. Hanno gl'Idroſtatici, e ſpecialmente lo *Zendrini* preſcritte diverſe regole per eſeguire le artificiali bonificazioni per alluvione, e poſſono facilmente venire in capo a' Profeſſori le reſtrizioni che talvolta eſigono tali regole, onde non ci fermeremo a diſcuterle in queſto breve ſcritto, il quale ha ſolo per oggetto di accennare dei metodi atti a calcolare il tempo neceſſario pel compimento di una regolata bonificazione. Queſto rifleſſo non ha luogo quando il paeſe, che vuol bonificarſi, è affatto infruttifero, e con il ſolo rompere gli argini del fiume ſi reſta contenti di coltivarne qualche porzione ſenza eſſere in pena ſe il rimanente ſpazio acquiſti, o perda; ma trattandoſi di rialzare la ſuperficie di porzioni di campagne circondate da altre fertili, e che poſſono eſſer danneggiate dalle inondazioni, la faccenda è ben differente. Coloro, che preſiedono alla buona condotta delle vaſte poſſeſſioni, molte volte ſi faranno trovati a veder gettare ſomme non indifferenti per coltivare un terreno, e fabbricarvi coloniche abitazioni, il qual terreno dovette poi porſi ſotto l' acque d' un fiume, che ſi credeva dover trattenerſi molti anni di più nel colmare altrove; ed all'incontro eſſerſi laſciata infruttifera, e deſerta una porzione di pianura ſul ſuppoſto di doverla bonificare, mentre il fiume a ciò deſtinato reſtò per molto tempo di più che non credevaſi occupato a terminare altre già principiate bonificazioni. Per provvedere pertanto al ſiſtema delle colmate da farſi con l'acque di uno o più fiumi comparirà, credo, altrettanto utile quanto nuovo il preſente ſoggetto.

§. 2. Eſaminata dopo un dato tempo la quantità della terra portata da un fiume, e ſupponendo coſtante la ragione tra la quantità dell' acqua e della terra, che l' intorbida, ſuole dai periti predirſi un alzamento proporzionale alla moltiplicazione degl'intervalli eguali a quello preſo da principio in conſiderazione; ma ciaſcheduno ſi accorgerà dell'errore di tal determinazione, conſiderando che al variare le circoſtanze della ſuperficie della colmata variano quelle della foce del fiume, ed in conſeguenza di tutto il tronco di eſſo non interrotto, e quindi la velocità delle ſue acque, e la quantità della terra che traſportano, e finalmente l' altezza della ſuperficie della porzione di campagna bonificata.

§. 3. E' manifeſto che al primo velo di terra diſteſo dal fiume ſopra la colmata naſcerà un alzamento di foce, ed in conſeguenza le acque torbide depoſiteranno per tutto il tronco del fiume ſteſſo (il qual tronco intendo per tutto il corſo di queſta Memoria che ſia non interrotto da *Peſcaie*, o altro capace a variare la coſtituzione della pendenza) uno ſtrato di terra, il quale diſponga il fondo del letto in una linea parallela alla prima, e diſtante da quella (a un dipreſſo quando è piccoliſſima la pendenza del tronco) dell'altezza medeſima del velo di terra depoſitato in colmata. Sia A^2 l' area da bonificarſi, m la quantità d' acqua che vi paſſa in un dato tempo, ed $1:n$ la ragione che ha il volume dell' acqua a quello della terra, che pel tempo ſuddetto ſi depoſita. Ciò poſto l' altezza del velo di terra onde copreſi la colmata nel tempo preaccennato ſarà $\frac{mn}{A^2}$. Nel ſucceſſivo eguale intervallo di tempo, per quanto paſſerà un volume eguale d' acqua per la colmata, non vi ſi depoſiterà però la quantità iſteſſa di terra, eſſendoſi dovuto con eſſa rialzare il fondo del tronco del fiume. Suppoſta pertanto a la lunghezza, b la larghezza di queſto tronco, avremo la quantità di terra che potrà depoſitarſi in colmata nel ſecondo intervallo di tempo che ſarà $mn - \frac{mnab}{A^2}$, e l' alzamento della ſuperficie della colmata o ſia della ſoce del fiume $= \frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2}\right)$. Nel terzo intervallo la quantità di terra che potrà depoſitarſi in colmata ſarà $mn - \frac{mnab}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2}\right)$, e perciò l' alzamento della ſuperficie di eſſa ſarà $= \frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2} + \frac{a^2b^2}{A^4}\right)$ Procedendo così col ragionamento troveremo la ſerie degli alzamenti di ſuperficie della colmata nei ſucceſſivi intervalli come ſegue.

$$\frac{mn}{A^2}$$

$$\frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2}\right)$$

$$\frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2} + \frac{a^2b^2}{A^4}\right)$$

$$\frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2} + \frac{a^2b^2}{A^4} - \frac{a^3b^3}{A^6}\right)$$

$$\frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2} + \frac{a^2b^2}{A^4} - \frac{a^3b^3}{A^6} + \frac{a^4b^4}{A^8}\right)$$

ecc. ecc.

§. 4 Sommando queſti alzamenti avremo quelli, che accadono in un numero d' intervalli, in ciaſcheduno dei quali paſſa per la colmata la quantità d' acqua m con l' iſteſſa quantità di terra incorporata, eſpreſſi come ſegue.

In intervalli	
1	$\frac{mn}{A^2}$
2	$\frac{mn}{A^2}\left(2-\frac{ab}{A^2}\right)$
3	$\frac{mn}{A^2}\left(3-\frac{2ab}{A^2}+\frac{a^2b^2}{A^4}\right)$
4	$\frac{mn}{A^2}\left(4-\frac{3ab}{A^2}+\frac{2a^2b^2}{A^4}-\frac{a^3b^3}{A^6}\right)$
ecc.	ecc. ecc.

quindi in un numero x d' intervalli come ſopra ſarà la ſomma degli alzamenti eſpreſſa dalla formola $\frac{mn}{A^2}\Big(x-(x-1)\frac{ab}{A^2}$ $+(x-2)\frac{a^2b^2}{A^4}-(x-3)\frac{a^3b^3}{A^6}\ldots\pm\big(x-(x-1)\big)\frac{a^{x-1}b^{x-1}}{A^{2x-2}}$

§. 5. Queſta formola ſi traſforma in tal guiſa

$$\frac{mnx}{A^2}\left(1-\frac{ab}{A^2}+\frac{a^2b^2}{A^4}-\frac{a^3b^3}{A^6}\;....\pm\frac{a^{x-1}b^{x-1}}{A^{2x-2}}\right)+$$

$$\frac{mnab}{A^4}\left(1-\frac{2ab}{A^2}+\frac{3a^2b^2}{A^4}-\frac{4a^3b^3}{A^6}\;....\mp(x-1)\frac{a^{x-2}b^{x-2}}{A^{2x-4}}\right)=$$

$$\frac{mnx}{A^2}\left(1+\frac{a^2b^2}{A^4}+\frac{a^4b^4}{A^8}+\frac{a^6b^6}{A^{12}}\;.....+\frac{a^{x-1}b^{x-1}}{A^{2x-2}}\right)-$$

$$\frac{mnx}{A^2}\times\frac{ab}{A^2}\left(1+\frac{a^2b^2}{A^4}+\frac{a^4b^4}{A^8}\;.....+\frac{a^{x-3}b^{x-3}}{A^{2x-6}}\right)+$$

$$\frac{mnab}{A^4}\left(1+3\frac{a^2b^2}{A^4}+5\frac{a^4b^4}{A^8}+7\frac{a^6b^6}{A^{12}}\;....+(x-2)\frac{a^{x-3}b^{x-3}}{A^{2x-6}}\right)-$$

$$\frac{2mna^2b^2}{A^6}\left(1+\frac{2a^2b^2}{A^4}+\frac{3a^4b^4}{A^8}+\frac{4a^6b^6}{A^{12}}\;.....+\frac{x-1}{2}\times\frac{a^{x-3}b^{x-3}}{A^{2x-6}}\right),$$

attendendo

attendendo alle debite modificazioni ſecondo che ſia x numero pari, o impari.

§. 5. Si ſcorge a prima viſta da queſt' eſpreſſioni che quando x ſia molto grande, l' alzamento è $= \left(1 - \frac{ab}{A^2}\right) \frac{mnx}{A^2} \left(1 + \frac{a^2b^2}{A^4} + \frac{a^4b^4}{A^8} + \text{ecc.}\right.$ *in infinito*, ed in conſeguenza $= \frac{mnx}{ab + A^2}$ cioè dopo un numero d' intervalli tanto grande da poterſi diſprezzare l' effetto occorſo in uno più, o uno meno di eſſi, ſarà l' alzamento in ragione diretta della quantità della terra, ed inverſa della ſomma dell' aree della colmata, e del tronco del fiume, come può facilmente confermarſi dal raziocinio accennato in principio.

§. 6. Eſaminando la legge degli alzamenti che occorrono in ciaſcheduno intervallo, troveremo quell' alzamento competente all' intervallo $(2x + 1)^{esimo}$ eſpreſſo così

$$\frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2} + \frac{a^2b^2}{A^4} - \frac{a^3b^3}{A^6} \ldots\ldots + \frac{a^{2x}b^{2x}}{A^{4x}}\right) =$$

$$\frac{mn}{A^2}\left(1 + \frac{a^2b^2}{A^2} + \frac{a^4b^4}{A^8} \ldots\ldots + \frac{a^{2x}b^{2x}}{A^{4x}}\right) - \frac{mn}{A^2} \times \frac{ab}{A^2}\left(1 + \frac{a^2b^2}{A^4}\right.$$

$$\left. + \frac{a^4b^4}{A^8} \ldots\ldots + \frac{a^{2x-2}b^{2x-2}}{A^{4x-4}}\right) = \frac{mn}{A^2} \times \frac{a^{2x+2}b^{2x+2} - A^{4x+4}}{(a^2b^2 - A^4)\,A^{4x}} -$$

$$\frac{mn}{A^2} \times \frac{ab}{A^2} \times \frac{a^{2x}b^{2x} - A^{4x}}{(a^2b^2 - A^4)\,A^{4x-4}} =$$

$$\frac{mn}{a^2b^2 + A^4} \times \frac{a^{2x+2}b^{2x+2} - A^{4x+4} - a^{2x+2}b^{2x+1}A^2 + abA^{4x+2}}{A^{4x+2}} =$$

$\frac{mn}{ab + A^2}\left(1 + \frac{a^{2x+1}b^{2x+1}}{A^{4x+2}}\right)$ l' alzamento corriſpondente all' intervallo $(2x + 2)^{esimo}$ ſarà $= \frac{mn}{A^2}\left(1 + \frac{ab}{A^2} - \frac{a^2b^2}{A^4} \ldots\ldots\right.$ $\left. - \frac{a^{2x+2}b^{2x+2}}{A^{4x+2}}\right) = \frac{mn}{ab + A^2}\left(1 - \frac{a^{2x+2} + b^{2x+2}}{A^{2x+4}}\right)$, ſimilmente troveremo l' alzamento corriſpondente all' intervallo $(2x+3)^{esimo}$ eſſere $= \frac{mn}{ab+A^2}\left(1+\frac{a^{2x+3}b^{2x+3}}{A^{4x+6}}\right)$ e così in ſeguito.

§. 7. Pongaſi per brevità $\frac{mn}{ab+A^2}=C$, $ab=B^2$, e gli alzamenti ſuddetti diverranno

$$\left(C\,1+\frac{B^{4x+2}}{A^{4x+2}}\right)$$

$$\left(C\,1-\frac{B^{4x+4}}{A^{4x+4}}\right)$$

$$\left(G\,1+\frac{B^{4x+6}}{A^{4x+6}}\right)$$

ecc.

d' onde l' indole dei medeſimi molto meglio che dalle ſuperiori eſpreſſioni ſi manifeſta. In fatto conſiderando il più ſemplice caſo in cui ſia $\frac{B^2}{A^2}=1$ cioè che l' area della colmata eguagli quella del tronco del fiume, occorrono nei ſucceſſivi intervalli gli alzamenti $2C$, 0, $2C$, 0, $2C$ ecc., e perciò la ſomma degli alzamenti che occorrono negl' intervalli impari eguaglia quella degli alzamenti, che accadono negl' impari inſieme e nei pari eſſendo queſti ultimi $=0$; ſe poi ſia $\frac{B^2}{A^2}<1$ gl' intervalli pari portano alzamenti (più o meno) ma ſempre più piccoli che i reſpettivi impari, e finalmente ſe $\frac{B^2}{A^2}>1$ gl' intervalli pari portano delle eſcavazioni piuttoſto che alzamenti, e queſto riſultato merita di eſſere eſaminato a parte.

§. 8. Si oſſervino frattanto gli alzamenti che occorrono nel tronco del fiume. Nel primo intervallo che porta in colmata l' alzamento $\frac{mn}{A^2}$, l' alzamento nel tronco è $=0$, nel ſecondo l' alzamento in colmata $=\frac{mn}{A^2}\left(1-\frac{ab}{A^2}\right)$, e nel tronco$=\frac{mn}{A^2}$, e così in ſeguito di maniera che gli alzamenti nel tronco ſono gl' iſteſſi che in colmata, ſe non che ſempre uno di meno nell' ordine degl' intervalli, e quindi principiando dal primo gli alzamenti ſaranno diſpoſti come ſegue:

	nella Colmata	nel Tronco
1.°	$C(1+\frac{B^2}{A^2})$	o
2.°	$C(1-\frac{B^4}{A^4})$	$C(1+\frac{B^2}{A^2})$
3.°	$C(1+\frac{B^6}{A^6})$	$C(1-\frac{B^4}{A^4})$
	ecc.	ecc.
$x.^{mo}$	$C(1\pm\frac{B^{2x}}{A^{2x}})$	$C(1\mp\frac{B^{2x-2}}{A^{2x-2}})$

e quindi in un intervallo qualunque $x.^{mo}$ la quantità della terra depoſitata tra la colmata ed il tronco ſarà $=A^2C(1\pm\frac{B^{2x}}{A^{2x}})+B^2C(1\mp\frac{B^{2(x-1)}}{A^{2(x-1)}})$ che fatte le debite ſoſtituzioni trovaſi $=mn$, come eſige la ſuppoſizione fatta in principio.

§. 9. Pongaſi per brevità $\frac{B^2}{A^2}=D$, ed avremo nell' intervallo $(2x+1)^{esimo}$ l' alzamento $C(1+D^{2x+1})$ nel ſeguente $(2x+2)^{esimo}$ $C(1-D^{2x+2})$, nel ſucceſſivo $C(1+D^{2x+3})$ e così degli altri; la ſomma pertanto degli alzamenti che accaderanno in 2z intervalli principiando dal $(2x+1)^{esimo}$ *incluſive* ſarà $=2zC+C(D^{2x+1}-D^{2x+2}+D^{2x+3}\dots-D^{2x+2z})$ $=2zC+CD^{2x+1}(1+D^2+D^4\dots+D^{2z-2})-CD^{2x+2}(1+D^2+D^4\dots+D^{2z-2})=2zC+CD^{2x+1}(1-D)\frac{D^{2z}-1}{D^2-1}=2zC+\frac{CD^{2x+1}}{D+1}(1-D^{2z})$, e la ſomma degli alzamenti in intervalli $2z+1$ ſarà $=(2z+1)C+C(D^{2x+1}-D^{2x+2}+D^{2x+3}\dots,$

$+ D^{2x+2z+1}) = (2z+1)C + CD^{2x+1}(1 + D^2 + D^4 \ldots + D^{2z}) - CD^{2x+2}(1 + D^2 + D^4 \ldots + D^{2z-2}) = (2z+1)C + \frac{CD^{2x+1}}{D+1}(1 + D^{2z+1})$. Suppoſto pertanto $\frac{CD^{2x+1}}{D+1} = E$, ſaranno le ſomme ſucceſſive corriſpondenti ad intervalli $2z, 2z+1, 2z+2, 2z+3$ ecc.

$$2zC + E(1 - D^{2z})$$
$$(2z+1)C + E(1 + D^{2z+1})$$
$$(2z+2)C + E(1 - D^{2z+2})$$
$$(2z+3)C + E(1 + D^{2z+3})$$

ecc.

in ciaſcheduna delle quali formole poſto $x = 0$, ſi ottiene la ſomma degli alzamenti principiando dal primo, e poſto $z = \infty$ ſi ritrova $\frac{mnz}{A^2 + ab}$ come conviene per corriſpondere all' accennato di ſopra.

§. 10. Dalla ſomma degli alzamenti $2zC + C(D^{2x+1} - D^{2x+2} \ldots - D^{2x+2z})$ ſi avranno le due formole ſeguenti, la prima delle quali rappreſenta gli alzamenti corriſpondenti agl' intervalli impari, e la ſeconda quelli corriſpondenti ai pari, nella totalità degl' intervalli $2z$, cioè $zC + CD^{2x+1}(1 + D^2 + D^4 \ldots + D^{2z-2})$, $zC - CD^{2x+2}(1 + D^2 + D^4 \ldots + D^{2z-2})$ ovvero $zC + CD^{2x+1} \times \frac{D^{2z} - 1}{D^2 - 1}$, $zC - CD^{2x+2} \times \frac{D^{2z} - 1}{D^2 - 1}$. Se la totalità degl' intervalli foſſe $2z+1$ cioè numero impari, ſarebbero le due diviſate ſomme come ſegue $\frac{2z+2}{2} C + CD^{2x+1} \times \frac{D^{2z+2} - 1}{D^2 - 1}$, $zC - CD^{2x+2} \times \frac{D^{2z} - 1}{D^2 - 1}$. Le differenze pertanto tra gli alzamenti occorſi negl' intervalli impari, e quelli occorſi nei pari nei due caſi generaliſſimi di $2z$, e $2z+1$, ſarannno come appreſſo $CD^{2x+1} \times \frac{1 - D^{2z}}{1 - D}$, $C + CD^{2x+1} \times \frac{1 - D^{2z+1}}{1 - D}$. Si oſſervi di paſſaggio che queſte due eſpreſſioni nel caſo di $D=1$ ſi riducono (con i conoſciuti ſoccorſi del calcolo infiniteſimale) alle due ſeguenti $2zC$, $(2z+2)C$ che ſono identiche con le eſpreſſioni in cui ſi trasformano in tale occorrenza le due altre $2zC+E(1-D^{2z})$, $(2z+1)C+E(1+D^{2z+1})$, lo che combina con quanto oſſervammo al §. 7. che quando l' area della colmata eguaglia quella del tronco, gli alzamenti corriſpondenti agl' intervalli impari ſono $=0$.

§. 11. Eſſendo che pertanto ſi ottenga maggior alzamento dagli alzamenti corriſpondenti agl' impari intervalli, che ai pari; ſi avrebbe maggior alzamento in colmata ad un dato numero di alzamenti corriſpondenti ai ſoli impari intervalli, che da quelli in egual numero ma corriſpondenti agl' intervalli impari, e pari inſieme. Si aumenti adunque di s termini la progreſſione eſprimente gli alzamenti corriſpondenti agl' impari intervalli in ambi i caſi generali precedenti, cioè che la totalità degl' intervalli pari ed impari inſieme ſia $2z$, ovvero $2z+1$, ed avremo le due eſpreſſioni ſeguenti

I.ª

$$(s+z)C+CD^{2x+1}(1+D^2+D^4\ldots\ldots+D^{2z-2}+D^{2z}$$
$$+D^{2z+2}\ldots\ldots+D^{2z+2s-2})=(s+z)C+CD^{2x+1}\times\frac{D^{2z+2s}-1}{D^2-1}$$

II.ª

$$(s+z+1)C+CD^{2x+2}(1+D^2+D^4\ldots\ldots+D^{2z}+D^{2z+2}$$
$$+D^{2z+4}\ldots+D^{2z+2s})=(s+z+1)C+CD^{2x+1}\times\frac{D^{2z+2s+2}-1}{D^2-1};$$

eguagliando queſte reſpettivamente alle due trovate di ſopra al §. 9. $2zC+E(1-D^{2z})$, $(2z+1)C+E(1+D^{2z+1})$ otterremo le due ſeguenti equazioni

$$zC+E(1-D^{2z})=sC+\frac{E}{D-1}(D^{2z+2s}-1)$$

$$zC+E(1+D^{2z+1})=sC+\frac{E}{D-1}(D^{2z+2s+1}-1)$$

da una delle quali in ciaſchedun caſo dipende il numero s degl' intervalli impari da aggiungerſi agli z nel primo caſo, o $z+1$ nel ſecondo a fine di ottenere con i ſoli alzamenti corriſpondenti agl' intervalli impari l' iſteſſa ſomma che riſulta da $2z$ ovvero $2z+1$ alzamenti corriſpondenti ad intervalli ſucceſſivamente impari, e pari.

§. 12. Nella circoſtanza di $D=1$ diventa $E=\frac{C}{2}$, e le due equazioni col calcolo differenziale riduconſi alle ſeguenti

$$zC=sC+\frac{C}{2}(2s+2z)\text{, }zC+C=sC+\frac{C}{2}(2s+2z+2)$$

che danno ambedue $s=0$, lo che s' accorda a meraviglia con i reſultati ſuperiori. Se poi ſia D frazionario, accennerò due ripieghi per ottenere in molti caſi il valore di s. Qualora la frazione D ſia piccoliſſima, ed s debba eſſer numero conſiderabilmente grande, le due equazioni ſi riducono a queſte

$$zC+E(1-D^{2z})=sC-\frac{E}{D-1}$$

$$zC+E(1+D^{2z+2})=sC-\frac{E}{D-1}$$

dalle quali in molti caſi ſi deduce aſſai proſſimamente $s=z$, onde ſi può ſtabilire che quando l' area della colmata è aſſai grande in proporzione di quella del tronco del fiume, ſi avrà per lo più quaſi l' iſteſſo effetto dagli alzamenti corriſpondenti agl' intervalli alternativamente pari ed impari, che ſi avrebbe da un egual numero di alzamenti corriſpondenti agl' impari intervalli, e quindi può naſcere l' idea di conſigliare in pratica la eſecuzione delle bonificazioni col tronco più piccolo che ſia poſſibile. Quando poi D ſia frazione aſſai proſſima all' unità, ed s non ſia da preſumerſi aſſai grande, poſto $D=1-P$, ſarà P piccoliſſima frazione, e per conſeguenza potrà aſſumerſi

$$D^{2z+2s}=1-(2s+2z)P+\frac{(2s+2z)(2s+2z-1)}{1.\quad 2.}P^2$$
$$-\frac{(2s+2z)(2s+2z-1)(2s+2z-2)}{1.\quad 2.\quad 3.}P^3;$$

$$D^{2z+2s+2} = 1 - \frac{2s+2z+2}{1.} P + \frac{(2s+2z+2)(2s+2z+1)}{1. \quad 2.} P^2$$

$$- \frac{(2s+2z+2)(2s+2z+1)(2s+2z)}{1. \quad 2. \quad 3.} P^3$$; e le due equazioni ſi ridurranno alle ſeguenti

$$zC + E(1 - D^{2z}) = sC + \frac{E}{1-D}\Big(\,(2s+2z) P$$

$$- \frac{(2s+2z)(2s+2z-1)}{1. \quad 2.} P^2$$

$$+ \frac{(2s+2z)(2s+2z-1)(2s+2z-2)}{1. \quad 2. \quad 3.} P^3 \Big);$$

$$zC + E(1 + D^{2z+1}) = sC + \frac{E}{1-D}\Big(2s+2z+2) P$$

$$- \frac{(2s+2z+2)(2s+2z+1)}{1. \quad 2.} P^2$$

$$+ \frac{(2s+2z+2)(2s+2z+1)(2s+2z)}{1. \quad 2. \quad 3.} P^3 \Big)$$ ed eſſendo in ciaſcheduna di eſſe una radice almeno, neceſſariamente reale (mentre ſi poſſono prendere le terze, ſeſte, ſettime poteſtà ſe l' occorrenza il richieda) ſi verrà a calcolare il valore di s, come ſi voleva.

§. 13. L' iſteſſa approſſimazione avrà luogo in molti caſi per ritrovare il numero r degl' intervalli neceſſarj per giungere ad avere un dato alzamento M; infatti ponendo $rC + E(1 \pm D^r) = M$ ſarà in caſo che D ſia piccoliſſima frazione $r = \frac{M-E}{C}$, lo che reſtituendo i valori $E = \frac{CD^{2x+1}}{D+1}$, $D = \frac{ab}{A^2}$, $C = \frac{mn}{ab + A^2}$ diventa $r = \frac{M(ab+A)}{mn}$, come richiedeſi dalla natura della queſtione; ed in caſo che D ſia frazione poco inferiore all' unità ponendo come ſopra $1 - P = D$ troveremo col diſprezzare le ſuperiori potenze di P, da una equazione di 3.°, 4.°, 5.° grado ecc. dipendere il valore di r.

§. 14. Fino ad ora non abbiamo determinato queſti intervalli, in ciaſcheduno dei quali ſi è ſuppoſto depoſitarſi la quantità di terra *mn*, e quindi non apparifce come poſſa trarſi alcun lume dalle formole ritrovate; preſcindendo nonoſtante dalla cognizione della quantità *mn* ſi viene a ſtabilire molto più di quello, che in principio poſſa aſpettarſi, per mezzo della ſeguente conſiderazione. Aſtraggaſi dalle meteorologiche ſtravaganze, delle quali occorrendo ſi può tener conto, e riflettaſi che il tempo delle piene d' un fiume per eſempio in un anno è coſtante; grandi, o piccoli che ſiano gl' intervalli nel decorſo di ciaſcheduno dei quali ſi depoſita la terra *mn*, il numero di eſſi nel corſo di tutti gli anni potrà aſſumerſi per coſtante; oſſervando in conſeguenza l' alzamento prodotto in colmata in un anno, ſi avrà (avvertendo che non ſi abbandonino le debite dimenſioni degli argini, e dei regolatori) il paragone con i ſucceſſivi ed il cercato alzamento come ſegue.

§. 15. Sia r il numero indeterminato degl' intervalli che decorrono nel primo anno della bonificazione, ed avremo l'alzamento in colmata $= rC + \frac{CD}{D+1}(1 \pm D^r)$. Abbiaſi dall' oſſervazione queſt' iſteſſo alzamento $= M$; e per le coſe preaccennate ſarà l' alzamento nel ſecondo anno

$= rC + \frac{CD^{r+1}}{D+1}(1 \pm D^r)$, nel terzo $= rC + \frac{CD^{2r+1}}{D+1}(1 \pm D^r)$

e così degli altri; accumulando in conſeguenza gli alzamenti di un numero y di anni avremo queſta ſomma

$$= yrC + \frac{CD(1 \pm D^r)}{D+1}(1 + D^r + D^{2r} \ldots . + D^{(y-1)r}$$

$= yrC + \frac{CD(1 \pm D^r)}{D+1} \times \frac{D^{yr}-1}{D^r-1}$. Poſta queſta quantità $= N$ alzamento ricercato, otterremo una equazione della forma di quella del §. 13, dalla ſoluzione della quale dipenderà il numero y degli anni neceſſarj per arrivare all' alzamento N. Ma preſcindendo dalla ſoluzione diretta di queſta equazione, dato per l' oſſervazione l' alzamento dell' anno primo M, ſi vede come aſſumendo arbitrariamente il numero r poſſa averſi la proporzione tra M e l' alzamento che è per competere ad un anno qualunque nell' ordine dei ſeguenti.

§. 16. Se allor quando è ſeguita la bonificazione per il

corſo

corſo di un anno ſi deviaſſero le acque dalla colmata fino a tanto che nel corſo per eſempio di un altro anno il reſpettivo tronco del fiume ſiaſi ridotto relativamente alla ſuperficie della colmata nelle iſteſſe circoſtanze nelle quali trovavaſi al principio dell' anno primo, è chiaro che nel terzo anno l' alzamento in colmata ſarebbe l' iſteſſo che fu nel primo cioè $=rC+\frac{CD}{1+D}(1\pm D^r)$, e l' iſteſſo dicaſi (ſeguendo l' iſteſſa ipoteſi) nel 5° nel 7° anno ecc., di modo che ſeguitando queſta maniera di bonificare interpolatamente nel corſo di anni $2m+1$ avrebbeſi l' alzamento $(m+1)C\Big(r+\frac{D}{D+1}(1\pm D^r)\Big)$, là dove continuando l' alluvione ogni anno ſarebbe l' alzamento

$$=(2m+1)rC+\frac{CD}{D+1}\times\frac{1-D^{(2m+1)r}}{1-D^r}(1\pm D^r).$$

§. 17. Può ciaſcheduno paragonare queſte due eſpreſſioni uſando qualche deſtrezza nelle diverſe ipoteſi del valor di r, ma generalmente ſupponendo x il numero degli anni per i quali è durata la continua bonificazione, e per conſeguenza $xrC+\frac{CD}{D+1}\times\frac{1-D^{xr}}{1-D^r}(1\pm D^r)$ l' alzamento occorſo, troveremo il numero y degli anni che biſognano a fine di avere l' iſteſſo alzamento per mezzo della bonificazione nella guiſa ſopraeſpoſta alternativa; in fatti dalle coſe premeſſe ſi ha l' equazione $y=\frac{xr(1+D)(1-D^r)+D(1-D^{xr})(1\pm D^r)}{r(1+D)(1-D^r)+D(1-D^r)(1\pm D^r)}$; queſta eſpreſſione può ridurſi a queſt' altra cioè

$$x+\frac{D(1\pm D^r)}{(1-D^r)\big(r(1+D)+D(1\pm D^r)\big)}(1+xD^r-x-D^{xr})=$$

$$x-\frac{D(1\pm D^r)}{(1-D^r)\big(r(1+D)+D(1\pm D^r)\big)}\Big(x-1+xD^r\big(\frac{D^{xr-r}}{x}-1\big)\Big);$$

ma la quantità $\frac{D(1\pm D^r)}{(1-D^r)\big(r(1+D)+D(1\pm D^r)\big)}$ è ſempre poſitiva, come pure nella maſſima parte dei caſi l' altra

$x - 1 + xD^r\left(\frac{D^{nr-r}}{x} - 1\right)$, ed in conſeguenza ſi ultimerà la bonificazione in minor numero d' anni (in moltiſſimi caſi almeno i quali poſſono a piacere dettagliarſi per mezzo di queſte formole) operando interpolatamente piuttoſto che continuamente ogni anno; e quando ancora foſſe un poco ſuperiore il numero degli anni che occorrono per la bonificazione alternativa in paragone della continua, ciaſcheduno ſi accorge quanto metta maggior conto il ſeguire il primo metodo piuttoſto che il ſecondo (per quanto generalmente preferito) mentre negli anni nei quali la colmata è ſenza acqua può metterſi a profitto il ſuo terreno per le più facili ſemente, e di più in molti caſi s' impiega per ultimare la bonificazione minor diſpendio.

§. 18. Finalmente per accorgerſi quanto ſia fallace il dedurre dall' alzamento del primo, o ſecondo anno con una ſemplice proporzione quelli, che occorreranno nei ſucceſſivi, baſta oſſervare che con tal computo ſi avrebbe in anni y l'alzamento $y(rC + \frac{CD}{D+1}(1 \pm D^r)$, ed in realtà l' alzamento è ſtato trovato ſopra $= yrC + \frac{CD}{D+1}(1 \pm D^r)\frac{1 - D^{yr}}{1 - D^r}$, e la prima ſomma eccede la ſeconda della quantità $\frac{CD}{D+1}(1 \pm D^r)\left(y - \frac{1 - D^{yr}}{1 - D^r}\right)$ la quale in certi valori aſſegnabili ſpecialmente alle quantità y, ed r diventa molto ſenſibile.

§. 19. Abbiamo ſempre ſuppoſto che nel principio della bonificazione il tronco del fiume ſia di una tal giacitura che il fondo della foce reſti a livello colla ſuperficie del terreno da bonificarſi, lo che talvolta non ſuccede potendo la linea del fondo eſſere alquanto ſuperiore o inferiore a quella che occorrerebbe per adempire tal condizione; allora naſcono formole diverſe pel calcolo degli alzamenti, e la ſerie che gli eſprime, lungi dal ſeguitare una legge coſtante, ne prende altra meno regolare, ma riducibile nonoſtante con i principj quaſi medeſimi ſopraeſpoſti. Con quelle formole ſi riſolvono diverſe queſtioni che ſi preſentano in ſeguito di queſte conſiderazioni nel voler diſporre le colmate da farſi in diverſe porzioni di terreno ſucceſſivamente una dopo l' altra; per eſempio ſuppoſto che il tronco per aver colmato una porzione di campagna abbia talmente alzato il ſuo fondo che la foce reſti aſſai ſuperiore alla ſuperficie della porzione di terreno che debbeſi ſucceſſivamente bonificare, è chiaro che introducendo l' acqua in colmata, nel primo gli alzamenti saranno molto maggiori dei calcolati fino ad ora, lo che ſarebbe vantaggioſo; ma ſe con chiuſa, o palafitta ſituata alla foce s' impediſca l' eſcavazione del tronco, perderemo il vantaggio ſopraccennato, ed invece ne avremo un altro cioè finattantochè la ſuperficie della colmata non ſiaſi alzata al livello del ſondo della foce diventando $=0$ il tronco non interrotto, negl' intervalli impari e nei pari ſaranno uguali gli alzamenti in colmata, e quindi la ſomma di tutti formerà più preſto una quantità ſignificante; trovo pertanto nei diverſi caſi quale dei due partiti ſia da preferirſi. In oltre ſe il terreno da bonificarſi ſia alquanto ſcoſceſo, e poſſano introdurſi l' acque tanto per la più baſſa quanto per la più alta parte, le diverſe modificazioni del tronco nei due diverſi caſi producono l' ultimazione della colmatura in tempo differente, e queſto tempo ancora ſi calcola; ma io mi luſingo di potere eſporre ſimili riſultati in altra occorrenza, allorchè mi fermerò a dettagliare delle avvertenze pratiche neceſſarie per profittare delle accennate teorie. In fatti convien diſtinguere l'eſtenſione del tronco del fiume da introdurſi nel calcolo, ed in certi caſi ſoſtituire la quantità $\frac{mnab}{2A^2}$ invece della $\frac{mnab}{A^2}$. Volendo poi aſſegnare *a priori* un valor proſſimo alla quantità r, fa d' uopo indagare la maſſa terroſa traſportata dal fiume, ed a tale oggetto ho praticato una macchinetta aſſai ſemplice per ottenere i ſaggi a diverſe profondità ſotto la ſuperficie del fiume iſteſſo: l' altezza del corpo d' acqua corrente, e lo ſtrato d' onde prendeſi quella, ſopra della quale vuole iſtituirſi l' eſperimento, ſono elementi da conſiderarſi per avere qualche deciſivo reſultato, quantunque ſiano ſtati negletti nelle famoſe eſperienze fatte ſu tale propoſito nel Reno di Germania, in quello di Bologna, nell' Arno ed altrove, ed io mi ſon trovato ad ottenere dall' iſteſſo volume d' acqua torbida preſo a diverſe altezze fino un quinto di terra più, o meno non ſolo nell' iſteſſo fiume, ma ancora nella iſteſſa piena, e nell' iſteſſo tempo.

APPENDICE.

Nel principio di queſta Memoria trovammo ſotto due differenti forme la ſomma d' una quantità di progreſſioni Geometriche, e ciò ne porge occaſione di accennare come alle ſomme delle progreſſioni ſuddette ſi riducano quelle di infinite ſerie, ed il reſpettivo riſcontro con infinite equazioni a differenze finite integrabili.

Siano le progreſſioni

$$\begin{array}{ll}
1 \ldots\ldots\ldots\ldots & = \dfrac{a-1}{a-1} \\[2ex]
1+a \ldots\ldots\ldots & = \dfrac{a^2-1}{a-1} \\[2ex]
1+a+a^2 \ldots\ldots\ldots & = \dfrac{a^3-1}{a-1} \\[2ex]
1+a+a^2+a^3 \ldots\ldots & = \dfrac{a^4-1}{a-1} \\[1ex]
\text{ecc.} & \text{ecc.} \\[1ex]
1+a+a^2+a^3 \ldots\ldots + a^{x-1} & = \dfrac{a^x-1}{a-1}
\end{array}$$

raccogliendo le ſomme da ambe le parti ſarà $x+(x-1)a+(x-2)a^2+(x-3)a^3 \ldots\ldots +(x-x+1)a^{x-1} = \frac{1}{a-1}(-x+a+a^2+a^3+a^4 \ldots\ldots + a^x)$, ma il primo membro di queſta equazione ſi riduce $= x(1+a+a^2 \ldots + a^{x-1}) - a(1+2a+3a^2+4a^3 \ldots\ldots (x-1)a^{x-2})$; dunque avremo $\frac{1}{a-1}(-x+a+a^2+a^3 \ldots\ldots a^x) = x(1+a+a^2 \ldots\ldots + a^{x-1}) - a(1+2a+3a^2+4a^3 \ldots\ldots + (x-1)a^{x-2})$; ſommando in conſeguenza le progreſſioni, e dividendo per a, otterremo

$$\frac{1}{a-1} \times \frac{a^{x+1}-a}{(a-1)a} - \frac{x}{(a-1)a} = \frac{x(a^x-1)}{(a-1)a}$$

$-1-2a-3a^2-4a^3\ldots\ldots-(x-1)a^{x-2}$ ovvero la ſomma della ſerie $1+2a+3a^2\ldots\ldots+(x-1)a^{x-2}$ $=\frac{(x+1)(a-1)a^{x+2}-a(a^{x+1}-1)}{a(a-1)^2}$, e ponendo $x+1$ in vece d' x ſarà la ſomma della ſerie

$$1+2a+3a^2\ldots\ldots+xa^{x-1}=\frac{1+a^x(ax-x-1)}{(a-1)^2}.$$

§. 2. La ſerie $1+2a+3a^2\ldots\ldots+xa^{x-1}$ $=2a(1+2a^2+3a^4+4a^6\ldots\ldots+ya^{z})+1+3a^2+5a^4+7a^6\ldots\ldots+(2r+1)a^{2r}$; ma la prima di queſte due ſerie ſi ſomma per mezzo delle progreſſioni ponendo a^2 in vece di a, ovvero facendo come al §. 1.

$$1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ =\frac{a^2-1}{a^2-1}$$

$$1+a^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ =\frac{a^4-1}{a^2-1}$$

$$1+a^2+a^4\ \ldots\ldots\ldots\ =\frac{a^6-1}{a^2-1}$$

ecc. ecc.

$$1+a^2+a^4\ldots\ldots+a^{2y}\ \ldots\ =\frac{a^{2y+2}-1}{a^2-1}$$

donde ſi ottiene

$$z(1+a^2+a^4\ldots+a^{2y})-a^2(1+2a^2+3a^4\ldots+(z-1)a^{2y-2}$$

$=\frac{-z}{a^2-1}+\frac{a^2+a^4+a^6\ldots+a^{2y+2}}{a^2-1}$, e per conſeguenza ſommando le due progreſſioni, avremo la ſomma della ſerie $1+2a^2+3a^4+4a^6\ldots\ldots+ya^{z}$. Chiamiſi S la ſomma della ſerie $1+2a+3a^2+4a^3\ldots\ldots+xa^{x-1}$, ed S' la ſomma della ſerie $1+2a^2+3a^4+4a^6\ldots\ldots+ya^{z}$, ed avremo la ſomma della ſerie $1+3a^2+5a^4+7a^6\ldots\ldots(2r+1)a^{2r}=S-2aS'$, e dell' altra $1+4a^2+6a^4+8a^6\ldots\ldots+(2r+2)a^{2r}$ $=S-2aS'+\frac{a^{2r+2}-a^2}{a^2-1}$.

§. 3. Ponendo inoltre

$$1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . = \frac{1+a(a-2)}{(a-1)^2}$$

$$1+2a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . = \frac{1+a^2(2a-3)}{(a-1)^2}$$

$$1+2a+3a^2 \; . \; . \; . \; . \; . = \frac{1+a^3(3a-4)}{(a-1)^2}$$

ecc. ecc.

$$1+2a+3a^2+4a^3 \dots + xa^{x-1} = \frac{1+a^x(ax-x-1)}{(a-1)^2}$$

ſarà ſommando da ambe le parti

$$x+(x-1)2a+(x-2)3a^2 \dots + (x-x+1)xa^{x-1} =$$

$$\frac{x}{(a-1)^2} + \frac{\begin{pmatrix} a^2+2a^3+3a^4 \dots\dots + xa^{x+2} \\ -2a-3a^2-4a^3 \dots\dots -(x+1)a^x \end{pmatrix}}{(a-1)^2}$$; ma il primo membro ſi riduce $= xS - 2a(1+3a+6a^2+10a^3 \dots + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}a^{x-2}$, ed il ſecondo $= F.S$ (intendendo per F la funzione che trovaſi ſommando le ſerie S); dunque la ſomma della ſerie

$$1+3a+6a^2+10a^3 \dots + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}a^{x-2} = \frac{xS-F.S}{2a}$$

$$= \frac{(a^2x-2ax+x-a^2+1)S-(1+x)(1-a^x)}{2a(a-1)^2}.$$

§. 4. Diſponendo di nuovo queſte ſerie ora ſommate come abbiamo fatto dell' altre, otterrannoſi infinite altre ſerie, la ſomma delle quali ſi riduce alla ſemplice nozione delle Geometriche progreſſioni, aggiungendo o ſottraendo una delle quali ſi ridurrà a legge nota l' andamento dei coefficienti numerici. Si potranno anco variare le diſpoſizioni, e ottenere ſerie più complicate per eſempio

$$1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . = \frac{1+a(a-2)}{(a-1)^2}$$

$$1+2a+3a^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . = \frac{1+a^3(3a-4)}{(a-1)^2}$$

$$1+2a+3a^2+4a^3+5a^4 \; . \; . \; . \; . \; . \; . = \frac{1+a^5(5a-6)}{(a-1)^2}$$

$$1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + 5a^4 + 6a^5 + 7a^6 \quad = \frac{1 + a^7(7a - 8)}{(a - 1)^2}$$

$$1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + 5a^4 + 6a^5 + 7a^6 \ldots\ldots$$

$$+ xa^{x-1} + (x + 1)a^x \quad \ldots\ldots \quad = \frac{1 + a^{x+1}\big((x+1)a + x + 2\big)}{(a - 1)^2}$$

ſommando da ambe le parti otterremo

$$z + (z - 1)(2a + 3a^2) + (z - 2)(4a^3 + 5a^4) + (z - 3)(6a^5 + 7a^6) \ldots$$

$$+ (z - z + 1)\big(xa^{x-1} + (x + 1)a^x\big) = \frac{z}{(a - 1)^2}$$

$$+ \frac{1}{(a-1)^2}\Big(a(a - 2) + a^3(3a - 4) + a^5(5a - 6) + a^7(7a - 8) \ldots$$

$+ a^{x+1}\big((x + 1)a - x - 2\big)\Big)$. Ma il ſecondo membro ſi riduce alle note ſerie già ſommate ed il primo ſi decompone in una delle medeſime meno la ſerie $2a + 3a^2 + 2(4a^3 + 5a^4) + 3(6a^5 + 7a^6) + 4(8a^7 + 9a^8) \ldots + (z - 1)\big(xa^{x-1} + (x+1)a^x\big)$ la quale per conſeguenza reſterà ſommata, e nell' iſteſſa guiſa ſenza altra pena che di maggior proliſſità di calcolo queſta molto più generale

$$2a + 3a^2 + 4a^3 \ldots + na^{n-1} +$$

$$2\big((n + 1)a^n + (n + 2)a^{n+1} + (n + 3)a^{n+2} \ldots + (2n - 1)a^{2n-2}\big) +$$

$$3\big(2na^{2n-1} + (2n + 1)a^{2n} + (2n + 2)a^{2n+1} \ldots + (3n - 2)a^{3n-3}\big) +$$

$$4\big((3n + 1)a^{3n} + (3n + 2)a^{3n+1} + (3n + 3)a^{3n+2} \ldots + (4n - 3)a^{4n-4}\big) +$$

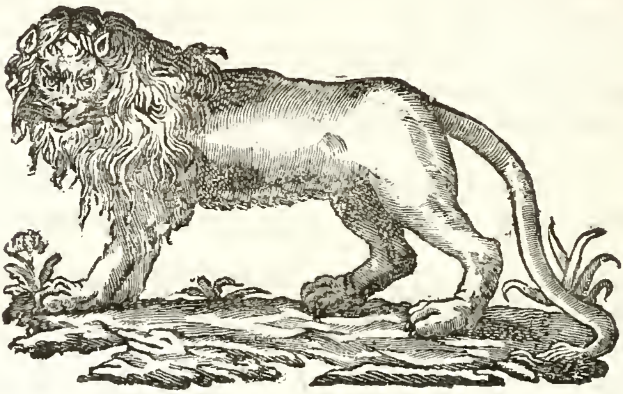
ecc. ecc.

$$(z - 1)\big(xa^{x-1} + (x + 1)a^x + (x + 2)a^{x+1} \ldots (x + n - 1)a^{x+n-2}\big).$$

attendendo a diverſe avvertenze neceſſarie per la riduzione alle ſerie già ſommate.

§. 5. Servirà queſto cenno per indicare quante ſiano le famiglie delle ſerie complicatiſſime, e fino ad ora ſommate col calcolo delle differenze finite, o infiniteſime, o colla teoria delle ſerie ricorrenti, e nonoſtante riducibili alle più ſemplici Geometriche progreſſioni; trovando il valore di una frazione $\frac{P}{Q}$ nel caſo di $P = 0$, $Q = 0$ avremo ſenza principj più ſublimi il valore delle ſerie $1 + 2 + 3 + 4 \ldots + x$,

$1 + 5 + 7 + 9 \ldots + 2x + 1$ e de' numeri figurati ecc. Applicando poi queſti ſteſſi artifizj ſi trovano le integrazioni d' infinite differenziali a differenze finite ridotte alla ſomma di progreſſioni Geometriche , e la corriſpondenza tra l' aggiunta , o la ſottrazione della coſtante coll' aggiunta , o la ſottrazione d' una progreſſione per ridurre i coefficienti numerici; dalle quali coſe ſe poſſa trarſi utilità, molto meglio da una momentanea attenzione de' ſagaciſſimi Geometri verrà poſto in chiaro, che da' diffuſi complicati calcoli, i quali io foſſi qui per diſtendere.



S A G G I O

DI OSSERVAZIONI ANATOMICHE

Intorno agli organi Elettrici della Torpedine.

Del Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Preſidente al Gabinetto di Storia Naturale, e Profeſſore della medeſima, e di Anatomia.

Al Sig. GIO. GOTTLIEB WALTER celebre Profeſſore di Notomia in Berlino.

L'Obbligante ſorpreſa che voi fatta mi avete nel mandarmi grazioſamente l' Opere voſtre, ed allora particolarmente quand' io appena penſar poteva che il mio nome noto vi foſſe, e le gentili eſpreſſioni che meco uſato avete mi ſomminiſtrano ora favorevole occaſione per' dirigere a voi queſte mie oſſervazioni onde in alcun modo moſtrarvi con ciò la gratitudine mia . Oltre queſto mi è pur dolce l' indirizzarle a voi e perchè vegga ciaſcuno quant' io a giuſta ragione vi ſtimi, e perchè forſe non v'è alcuno che meglio di voi poſſa decidere di quanto ſien eſſe da valutarſi, ſiccome quello che molte delle più intricate parti e difficili del corpo umano avete ſviluppate, e felicemente tutte delineate e deſcritte. Voi non ignorate certo che la torpedine ha ſino da' più rimoti tempi riſvegliata ſempre la curioſità e l' attenzione dei Filoſofi naturaliſti. Il torpore, o ſia intorpidimento da cui il ſuo nome deriva, o per dir vero la ſcoſſa che eccita nella mano di chi la tocca e la preme fu ſempre un oggetto particolare, ed un argomento dovizioſo di varie e ben fra loro diverſe ſentenze . Scriſſero di queſte *Ariſtotele*, *Dioſcoride*, *Plinio*, *Galeno*, *Eliano*, e tant' altri, e tutti per il più a ciò condotti o dall' altrui autorità, o dalla voce comune dei peſcatori, anzichè dalle proprie ed eſatte loro oſſervazioni. Quindi la diverſità dell' opinioni, e la moltiplicità degli errori sì per riguardo agli effetti del peſce, che al peſce medeſimo. Volevano alcuni non ſolo che al toccar la torpedine s'eccitaſſe in noi la ſenſazion dolorifica, ma che e per l' aſta della foſcina, e per le reti entro cui foſſe preſa, e per la ſetola, e canna dell' amo ſcorreſſe l' attività ſua non ſolo ad intorpidir la mano del peſcatore, ma ad addormentarlo eziandio; altri non contenti di queſto tant' oltre ſi eſtendevano, che vi fu per fino chi ſcriſſe che tale era la forza di queſto animale che paſſando la virtù ſua per l' acqua agitava la ſovrappoſta barca dei peſcatori, e che poſto fra morti peſci, quelli che venivano da lui tocchi ritornavano a muoverſi, come ſe vivi foſſero. Non diſſimili da queſte furono le varie opinion che ſi ebbero delle qualità intrinſeche della torpedine iſteſſa: pretendevano alcuni che le ſue carni ſiccome dolci, molli, e facili alla concozione, ottime foſſero per la nutrizione; laonde i Medici non ſolo ne lodavano l' uſo, ma ne predicavano i buoni effetti nella medicina ancora, e particolarmente per il male di capo, per l' epilepſia, per la riduzione dell' inteſtin retto ecc.; all' incontro volevano altri che la torpedine foſſe velenoſa, e nocivo molto il mangiarne; e però ne nacque preſſo alcune nazioni il bando aſſoluto di eſſa, proibendone con ciò pubblicamente a' peſcatori la vendita.

Tante e sì diverſe ſentenze, tuttochè col progreſſo del tempo di non poco moderate e corrette, riſvegliarono finalmente l' attenzion dei moderni, i quali poſto avendo a ſcrupoloſo eſame gli effetti tutti della torpedine, e levato il velo dell' ignoranza, ſcoperſero non altro eſſere l' intorpedimento che queſta produce, che una vera ſcoſſa elettrica, la quale ſoltanto allora, che viene immediatamente toccata, eccita nella mano e nel braccio di chi la tocca e la ſtringe. Di queſto ammirabile ſcoprimento ne ſiamo debitori al Sig. *Walſh*, ed indi al celebre noſtro amico e collega Sig. Ab. *Spallanzani*, il quale non contento di confermare in molte parti quanto quegli aveva attentamente oſſervato, più oltre con le proprie oſſervazioni eſtendendolo, or molti fatti illuſtrando, ora correggendone altri, nuove coſe e tutte intereſſanti produſſe. Stavaſi egli a Porto-Venere appunto dietro a queſte occupandoſi, quand'io, paſſando a Genova, il ſorpreſi, ed allora fu che deſiderando egli di meco eſaminare la ſtruttura di queſti animali, per ciò che riguarda gli organi elettrici, non potendo allora per alcune combinazioni compiacerlo, m' impegnai di farlo in altro tempo, qualora favorevole occaſione ſi foſſe a me preſentata. In Genova dunque, fra le molte gentilezze compartitemi da quegli illuſtri cittadini, delle quali ſerberò ſempre coſtante memoria, queſta mi ſi offerſe, ed ivi appunto ebbero cominciamento queſte mie oſſervazioni, mercè la corteſia del Sig. *William Batt* illuſtre e dotto Medico, e Profeſſore di Chimica in quella Univerſità, il quale penetrato avendo il deſiderio mio, volle di una torpedine gentilmente favorirmi. Siccome però in quella delizioſa Metropoli non fu lungo il mio ſoggiorno, così qui reſtituitomi fui obbligato di procurarmene dell' altre dalla Spezia, e da Seſtri, onde più maturatamente eſaminare quant' ivi avevo quaſi di volo ed alla sfuggita oſſervato. Riguarderanno queſte ſol tanto gli organi elettrici, che proprj e particolari ſono di queſti animali, giacchè le altre parti, e la ſtruttura loro anatomica non differiſce in generale dall'altre raze, di cui la torpedine non è che una ſpecie particolare.

Le torpedini che furono da me eſaminate non eccedevano il peſo di trent' oncie, nè erano molto minori di venti. Avevano il dorſo, o ſia la faccia lor ſuperiore di colore oſcuro di cineree bolle macchiata, e la maggior parte con cinque nere marche e circolari diſtinta. Nella parte anteriore di queſta vi ſi vedevano gli occhi prominenti aſſai, e dietro a queſti due circolari fori, che ſi aprono nella parte ſuperior del palato. Il ventre, o ſia la faccia inferiore era bianca. Si diſtingue in queſta anteriormente la bocca, il cui labbro ſuperiore, che non ſi congiunge agli angoli con l' inferiore, aſcende e conduce a due piccole e quaſi rotonde aperture, le quali comunicano con due profondi ſeni ovali, e diviſi in molte picciole celle da membrane traſverſali, dalla pituitaria aſcendenti, ed interſecate da una longitudinale, le quali altro non ſono che le narici.. Verſo il centro, e lateralmente vi ſi veggono cinque feſſure in ciaſchedun lato, che ſono i fori delle branchie, le quali comunicano con l' interno della gola, ed inferiormente l' ano; non omettendo che nel margine anteriore e laterale vi ſi riſcontrano molti forellini regolari, e diſtinti, dei quali in ſeguito parleremo. Tra queſti poi e le feſſure delle branchie accennate veggonſi molte macchie cineree, e come lenticulari, le quali indicano i ſottopoſti elettrici organi che dalla cute trapelano.

Queſti elettrici organi, oppure corpi falcati, ſono appunto quelli, dai quali l' accuratiſſimo noſtro *Redi* deduſſe il primo di tutti quella particolare ſenſazion dolorifica che dalle torpedini in noi deriva. Queſti organi ſono coſtituiti in ciaſchedun lato dell' animale, e ſi eſtendono in larghezza dal cranio e dalle branchie ſino alle cartilagini falcate delle gran pinne; in lunghezza dalle eſtremità anteriori alle cartilagini tranſverſe del diafragma. La figura di queſti corpi s' accoſta in certa maniera a quella delle reni, la cui parte conveſſa e più tenue guardi eſternamente, internamente la concava e la più craſſa. Non ſono però come le reni nella parte loro di mezzo elevati, ma piuttoſto longitudinalmente depreſſi. Sono queſti aderenti alle parti circonvicine, mercè d' una breve e forte tela cellulare, e d' alcuni faſci di fibre che dalla ſuperficie di queſti ſcorrono irregolarmente alle parti loro adjacenti. L' altezza di queſti organi è frappoſta tra la cute del dorſo e quella del ventre, ed a queſta ſono pure tenacemente attaccati. Non vuolſi per altro omettere che tra la ſuperficie di queſti corpi e la cute ritrovaſi una tenue ma forte membrana alla cute medeſima per una breviſſima cellulare ſtrettamente congiunta, le cui fibre con varia direzione procedendo alcune ſi perdono nella cute, ed altre negli organici corpi profondamente s' internano.

Queſti organi corriſpondono in lunghezza e latitudine alla grandezza della torpedine; quindi ſono maggiori o minori a proporzione ch' ella è maggiore o minore; dal che deriva non poterſi aſſegnare di queſti una dimenſione preciſa. Quelli però che furono da me oſſervati non erano di molto minori dell' eſtenſione d' un rene umano, alla cui figura, come abbiam detto, in gran parte ſi raſſomigliano.

La ſtruttura di queſti organi è particolare aſſai. Sono eſſi compoſti di moltiſſimi corpi o colonnette perpendicolari e per la maggior parte eſagone, tutte fra loro, mercè d' una tenuiſſima cellulare, aderenti; l' eſtremità delle quali ſi congiungono con la cute del dorſo, e quella del ventre: diſſi per la maggior parte eſagone, poichè ſe ne veggono alcune pentagone, e quadrangolari ancora, dipendendo talvolta la figura di queſte dalle differenti adeſioni d' alcune di eſſe, e dalla varia ſituazione e mozione dei corpi medeſimi.

Dell' altezza di queſte colonne ſi può ripetere quanto fu detto della grandezza dei corpi elettrici; ſono più lunghe ſe maggiore è l' animale, più brevi ſe minore. In univerſale però le più lunghe ſono quelle che ſi veggono nella parte più craſſa di queſti organi, la cui altezza non giunge intieramente a quella d' un pollice; le più brevi e corriſpondenti in altezza al dito mignolo, quelle che riguardano la circonferenza eſteriore. Il loro diametro a queſto pur corriſponde: non ſono tutte però interamente eguali, poichè ſi veggono alcune così un poco maggiori dell' altre: in generale non ſuperano il diametro d' una groſſa penna di gallo comune. Queſta groſſezza però voglio che ſia inteſa con reſtrizione, e ſoltanto relativa a quelle torpedini che furono da me eſaminate, non avendo io potuto aver la fortuna del *Redi*, a cui fu dato d' inciderne una del peſo di 15. libbre circa, le cui colonne erano sì groſſe, quanto una groſſa penna di cigno.

La ſoſtanza di queſte colonne è molle ma reſiſtente, e direi quaſi gelatinoſa; non già bianchiſſima, ma ſibbene cinerea, la quale eſſendo compreſa da una vagina bianca, che a guiſa di corteccia circonda e circonſcrive ciaſcheduna delle colonne accennate, detratta la cute compariſcono i corpi falcati come coperti, oppure intralciati d' una piccola reticella, o per dir meglio d' una di quelle maglie, delle quali le gentili noſtre donne ſogliono uſare oggigiorno per accreſcere ai loro veſtiti ornamento e vaghezza.

Queſte vagine, delle quali vengono circondate e compreſe le colonne tutte, ſe bene ſi conſiderino, moſtrano non altro eſſere certamente che una produzione della membrana ſottopoſta alla cute, e della cute medeſima, la quale come abbiam detto internandoſi nella ſoſtanza cinerea dei corpi falcati con molti e varj proceſſi, vengono queſti a coſtituire le vagine deſcritte, e con ciò a diſtinguere, ed in parte ancora a comporre le colonne medeſime.

Il numero di queſte colonne in ciaſchedun organo elettrico è vario, e relativo eſſo pure alla grandezza dell'animale. Alcuna volta ne ho numerate 420, tal' altra 480, ed ancora 520: queſto numero però è egli così incoſtante, che di frequente mi è avvenuto di oſſervare non eſſere il numero d' una parte a quello dell' altra eſattamente corriſpondente, come ſi può vedere ancora in due torpedini che conſervo nello ſpirito di vino, una di oncie ſedici, l' altra di oncie quattro; la prima delle quali ha nella deſtra parte 514 colonne, nella ſiniſtra 520: l' altra 265 nella deſtra, e 290 nella ſiniſtra. Queſta incoſtanza che in generale frequentemente ancora ſi oſſerva nei vaſi, e nei nervi di ciaſchedun animale, le quali nelle loro diramazioni quelle d' un lato non corriſpondono ſempre ed eſattamente a quelle dell' altro, potrebbe forſe indurre taluno a credere, che l' accreſcimento del numero delle colonne da tutt' altro principio procedeſſe e differente da quello che veggiamo al creſcere delle gengive nello ſviluppo d' un nuovo dente, come ha l' *Hunter* opinato.

Se ſi eſamini la natura di queſte colonne o ſia degli organi elettrici qualora ſono queſti naturalmente ed in ſede propria coſtituiti, veggiamo che comprimendo con le dita alcuna parte di queſti, levata appena la mano, ſi rimettono toſto le colonne al naturale livello, non rimanendovi indizio alcuno della fattavi compreſſione. Se ſi agitino poi, danno quelle mozioni medeſime, che nell' agitamento d' un corpo gelatinoſo ſi oſſerva.

Separato un pezzo di queſti corpi ed agitato col manico del coltello ſopra d' un vetro, la ſoſtanza cinerea allora inſenſibilmente ſi ſcioglie, e ſvaniſce in modo, che traſpariſcono le vagine, comprendenti le colonne, diſtinte in modo che la regolare e grazioſa figura rappreſentano di tanti favi uniti aſſieme, allora dal proprio alveario ſtaccati. Queſta cinerea ſoſtanza però non ſvaniſce intieramente nell' agitazione, ma ſi diminuiſce ſoltanto, e rendeſi ancor più diluta; e volendo più oltre agitarla, romponſi le vagine, e reſta allora un ſemplice ed informe aggregato di cellulare e membrane, framiſchiato ad un avanzo della diſtrutta cinerea ſoſtanza.

Se l' agitazione però diluiſce e ſcioglie queſta ſoſtanza, una leggier bollitura la condenſa e reſtringe, ed allora non rieſce difficile d' iſolare alcune delle colonne, le quali così iſolate non più eſagone o pentagone ma cilindriche intieramente ſi moſtrano. Se la bollitura poi di poco ecceda, anzichè prendere la ſoſtanza indicata una maggior conſiſtenza, ſi attenua, ed indi del tutto ſi ſcioglie.

Volendo eſaminare la ſtruttura di queſte colonne così iſolate e bollite, oppure agli organici corpi naturalmente congiunte, la più accurata inſpezione non mi potè mai ſomminiſtrar tanto lume quanto baſtaſſe per conoſcerle intieramente. Una leggiera macerazione però mi diede adito a penetrare più oltre, e ſe non ſono di molto ingannato, a conoſcerle ancora intieramente. La macerazione fatta nell' acqua ſemplice, ſciogliendo la tenue cellulare che vicendevolmente le colonne congiunge, moſtrava la maggior parte di queſte dalle vicine diſgiunte, e queſt' iſteſſe cilindriche e più riſtrette, dalle cui eſtremità ſi vedevano dei fiocchi filamentoſi, che davano come a divedere la ſoſtanza lor celluloſa. Le fibre poi, che componevano queſte colonne, ſembrava a primo aſpetto che teneſſero una ſpirale direzione, la quale poi eſaminata attentamente ſi vide non altro eſſere che l' effetto di quelle membrane che le colonne internamente compongono, come ha l' *Hunter* accuratamente oſſervato.

Queſta mirabile ſtruttura però non ſi moſtrò mai più chiara e diſtinta che nella macerazione di queſti corpi col vin roſſo eſeguita. Eſtratti queſti dal vino, e poſti nell' acqua, dopo una leggiera agitazione, ecco inalzarſi le bianche colonne in maſſima parte iſolate e fluttuanti, e come ad una roſſa baſe congiunte, le quali a' miei occhi offerivano un grazioſo ſpettacolo nell' antecedenti macerazioni non oſſervato. Queſto dovevaſi in gran parte alla tintura del vino, il quale penetrata avendo la ſoſtanza delle colonne, dava adito a conoſcerne più chiaramente i componenti. Si vedevano dunque le colonne tutte coperte di tante ſottiliſſime membrane le une ſovrappoſte alle altre, ed in modo tale coſtituite, che fra l' una e l' altra apparivano tanti ſpazj, o ſiano interſtizj, quante erano ad un di preſſo le membrane medeſime. Queſte per una tenuiſſima cellulare erano nella circonferenza alle vagine aderenti, e fors' anche per lunghe fila fra loro, il che da principio faceva travedere quella ſpirale figura che abbiamo accennata. Gl' interſtizj poi fra l' una e l' altra di queſte membrane frappoſti contenevano in una tenuiſſima e laſſa cellulare quella gelatinoſa cinerea ſoſtanza delle colonne, la quale eſſendo nella macerazione in maſſima parte ſciolta e diſtrutta, le colonne non più cineree, ma bianche apparivano.

Nell' eſaminar queſti corpi così macerati due coſe mi ſi rappreſentarono, le quali forſe imporre potrebbero, come a me pure ſul principio impoſto avevano. La prima ſi fu che nell' agitazione, benchè leggieriſſima, di queſti corpi nell' acqua, le colonne facilmente ſi dividevano in molte e quaſi globoſe parti, come ſe le colonne di queſte iſteſſe, tutte iſolate, e le une ſovrappoſte alle altre, foſſero ſtate naturalmente compoſte: l' altra che le membrane componenti le colonne erano concave in una parte, e conveſſe dall' altra, e tutte coſtituite in maniera che a vicenda ricevevano, ed erano dall' altre coſtantemente ricevute. Queſta ſtruttura, che a primo aſpetto naturale ſembrava, ben ponderata ſi vide non altro eſſere che il ſemplice effetto della macerazione, poichè avendo queſta rilaſciate, ed in parte diſtrutte le vagine comprendenti le colonne, facilmente avveniva che queſte agitate nell' acqua ſi divideſſero in molte parti, le quali poi bene eſaminate ſi conobbe non altro eſſere che una parte delle colonne medeſime e tutte d' interſtizj regolari, e membrane compoſte. Lo ſteſſo dee pur dirſi della figura concava e circolare delle membrane, perchè mercè della macerazione diſtrutti gli appigli, e ridotteſi le colonne dalla figura eſagona alla circolare, e queſte iſteſſe per conſeguenza riſtrette, forza era che l' interne membrane di orizzontali ed eſagone che erano, eſſe pure e circolari e concave ſi rendeſſero, in quella maniera medeſima che una retta linea ed orizzontale compreſſa alle eſtremità infleſſa e curva divenire ſi vede.

Quanto ho ſino a qui deſcritto dell' organica ſtruttura di queſti elettrici corpi, altre oſſervazioni confermarono ancora, dietro alle quali mentre ſolitario nel mio gabinetto ſtava piacevolmente occupato, ebbi la tenera compiacenza di vedermi favorito da tre miei amici, i quali mi piace di nominare

minare, e per la ſincera amicizia che loro profeſſo, e perchè ancora avendo eſſi oſſervate le coſe medeſime danno non leggier peſo alle mie oſſervazioni. Il primo di queſti ſi fu il Sig. Dott. *Pietro Antonio Gaſperotti* pubblico inciſore di Notomia in queſta R. Univerſità, del quale, ſiccome d' occhio vero anatomico dotato, altre volte ebbi occaſion di parlare, e di cui veggo in oggi con piacere avverate quelle ſperanze, che avevo un tempo di lui concepite; l' altro il Sig. Can. *Molinari*, il quale ad un ſodo e giuſto criterio accoppia molto bene lo ſtudio e l' eſercizio della Meccanica la più raffinata; il terzo il Sig. *Gio. Ulrici* uno dei più eccellenti Chimici che vanti queſta noſtra R. Farmacia. Queſti non ſolo ebbero il piacere di veder chiaramente e le colonne iſolate, e le membrane, e gl' interſtizj di cui vanno compoſte, ma eziandio le ſottiliſſime diramazioni dei nervi, e dei vaſi, che per entro gli elettrici organi ſono mirabilmente diſpoſti.

Per ben intendere l' origine ed il progreſſo di queſte nervoſe diramazioni, io penſo che non ſia per iſpiacervi ſe prima di parlarvi dei nervi poche coſe premetta della ſorgente di queſti, vale a dire del cervello; giacchè non mi pare che meriti d' eſſere nella diſcrizione di queſti intieramente omeſſo. Voi ben ſapete che il cervello delle torpedini, non meno che quello dell' altre raze, è di cinque lobi compoſto, i quali diſtinti particolarmente appariſcono nella parte ſua inferiore, o ſia nella baſe del cervello, la quale ora vi ſto diſcrivendo. Il lobo anteriore o ſia il ſolitario è il maggiore di tutti. E' queſto di figura quaſi cilindrica, ma ſchiacciato all' innanzi, e dagli altri come diſtinto per un ſolco circolare e profondo; gli altri quattro vengono dietro, due anteriori e due poſteriori, e queſti ſono così diſpoſti, che nella loro figura in qualche maniera convengono coi corpi quadrigemelli del cervello umano. Dai due anteriori diſcendono due corpi longitudinali, che corriſpondono ai corpi piramidali; dai poſteriori ne derivano lateralmente altri tanti, che ſi potrebbero chiamar gli olivari, e queſti nella parte ſuperiore coperti da una ſoſtanza cinerea e quaſi corticale. Queſti quattro corpi che formano come la midolla allungata, e ſono tutti diviſi da tre linee longitudinali, convengono indi tra loro, e reſtringendoſi compongono il principio della midolla ſpinale.

Dal cervello della torpedine naſcono molti nervi, alcuni dei quali non ſono che piccioli filamenti, che appena uſciti dal cranio ſi perdono ne' luoghi adjacenti; altri più conſiderabili, che ſcorrono ad alcune delle principali parti, e che meritano perciò d' eſſere annoverati e diſtinti. Il primo pajo di queſti è i nervi olfattorj, i quali nati a guiſa di due tenui filamenti dai lati del globo ſolitario ſi producono innanzi obbliquamente, e paſſando indi dalla cavità del cranio a quella delle narici ſi dilatano a guiſa degli olfattorj umani in una ſoſtanza ganglioforme, che ſcorre per il lungo, e quaſi da un eſtremo all' altro della membrana pituitaria. Da queſta ſoſtanza ſi producono moltiſſime diramazioni altre longitudinali, tranſverſali altre, le quali ſeguendo le traccie delle membrane aſcendenti da principio deſcritte, terminano in numeroſiſſimi filamenti, che a guiſa di fiocchi gli uni convenienti con gli altri ſi veggono in lunga ed ordinata ſerie diſpoſti verſo i lembi della pituitaria medeſima. Preſſo a queſti vengono gli optici nati da un ſolo principio dal ſolco che divide il ſolitario dai due lobi anteriori. Queſti eſciti dal cranio ſcorrono obbliquamente, e poſteriormente al globo dell' occhio. Dietro a queſti ſi vedono i motori degli occhi, i quali nati dai due lobi poſteriori del cervello vanno a terminare nei muſcoli all' occhio inſervienti. Dall' apice poi dei corpi olivari, e quaſi congiunti al primo pajo degli elettrici, naſcono que' nervi, i quali producendoſi lateralmente ed internamente al globo dell' occhio vanno a diſſeminarſi in due gruppi di ghiandole, che ſi veggono ſuperiormente, e nella parte anteriore degli occhi. Dalle parti laterali dei corpi olivari, e fors' anche dalla ſoſtanza cinerea che li copre, hanno origine tre paja di nervi, ch' io chiamerò elettrici, perchè tutti ſi diramano per la ſoſtanza degli elettrici organi. Il primo di queſti o ſia l' anteriore ed il minore paſſando innanzi ad una prominente cartilagine, produce fra gli altri minori aſſai un ramo conſiderabile ch' io chiamerò falcato, poichè aſcendendo lateralmente ed eſternamente al globo dell' occhio, ed indi inflettendoſi ſecondo la direzione dei corpi falcati, o organi elettrici, ſcorre lungo tratto fra queſti e le cartilagini falcate delle gran pinne, e ſi diffonde in quel gruppo di ghiandole che ſi vede tra le cartilagini medeſime e gli organi elettrici. Da queſto ramo poi non lungi dall' origine ſua ne naſce un altro minore, il quale ſcorre anteriormente, e va a terminare nell' altro gruppo di ghiandole che poſte ſono lateralmente ed anteriormente alle cavità delle narici. Il tronco poi di queſto nervo entra nella parre anteriore degli organi accennati, ed indi inflettendoſi aſcende, e diviſo in minutiſſimi rami tutto ſi diffonde nelle colonne anteriori dei corpi indicati. Dietro al primo pajo naſce il ſecondo che cede in craſſezza ed in eſtenſione al primo ed al terzo; queſto uſcito dal cranio, e paſſando tra la prima e ſeconda branchia, alle quali alcuni filamenti compartiſce, quaſi tranſverſalmente, e nel mezzo penetra fra le colonne, indi alquanto eſſo pure inflettendoſi, e per le colonne medeſime minutamente diffondendoſi aſcende verſo le parti anteriori. Il terzo pajo, cioè il poſteriore ed il maſſimo, diviſo quaſi in origine in due groſſi rami uniti aſſieme, ed indi in tre ſcorrendo tra la 2.^{a} e la 3.^{a}, e tra la 3.^{a} e 4.^{a} branchia entra tranſverſalmente ed obbliquamente nei corpi indicati. L' anteriore di queſti rami tutto ſi ſpiega e diffonde nelle parti di mezzo; alle inferiori e poſteriori riguarda il ſecondo ramo; il terzo diſcendendo ai lati interni fra gli elettrici organi e la ſpina, ne' ſottopoſti muſcoli, e nelle poſteriori ed ultime branchie ſi diſtribuiſce.

Queſte tre paja di nervi che entrano negli organi elettrici ſono nelle torpedini di craſſezza tale, che confrontati con quelli che eſcono dal cervello delle raze, e che in certa maniera con queſti convengono, veggonſi aſſai maggiori, quantunque le raze ſuperino ben tre volte il peſo delle torpedini ſteſſe. Una tale differenza e così eccedente potrebbe facilmente indurre taluno a credere, che quella diverſità che in queſti ſi ſcorge eſſere vi poteſſe ancora nel cervello, creſcendo queſto nelle torpedini a miſura che quelli grandeggiano. Una ſimile deduzione però, quantunque ragionevole aſſai, è appunto quella che non ſi ſcorge, giacchè ſi vede manifeſtamente che la mole del cervello delle torpedini non creſce in proporzione dei nervi accennati, quando all' incontro nelle raze il cervello s' aumenta ſenza che i nervi acquiſtino una mole maggiore dell' indicata.

A chi ha sì bene come voi e sì felicemente oſſervate e deſcritte le più intralciate minute e quaſi inviſibili diramazioni dei nervi del torace, e del ventre non può rieſcir difficile il comprendere, come ed in quanti tenuiſſimi rami ſi dividano queſti nervi, i quali penetrando per ciaſcheduna colonna, ed ivi in minutiſſime altre diramazioni ſpiegandoſi non laſciano interſtizio o diviſione alcuna, che di filamenti nervoſi dotata non ſia.

Quello che diciamo dei nervi, convien pur ripeterlo dei vaſi ancora. Aſcende l' arteria dal cuore, e verſo il vertice della cavità triangolar del torace, la cui baſe guarda poſteriormente, in un picciolo ſacco, e quaſi circolare ſi ſpiega. Dalla parte anteriore di queſto naſce un groſſo tronco, il quale procedendo innanzi in due ſi divide, ed indi in più rami, i quali ſcorrono alle parti anteriori. Da ciaſcun lato poi del ſacco accennato ſi partono tre canali, i quali in maſſima parte procedendo verſo le branchie, entrano nelle branchie medeſime, e da queſte ſeguendo i nervi ſcorrono negli elettrici organi, e penetrando per le colonne diviſi in minutiſſime ramificazioni, e queſte per moltiplici e varie anaſtomoſi aſſieme congiunte, comunicano con tutti gl' interſtizj e membrane componenti le colonne medeſime. Le vene poi a queſt' arterie corriſpondenti da minutiſſime radici in rami maggiori convenendo, e queſti ſeguendo le traccie dei nervi e delle arterie per le branchie paſſano alla parte inferiore e lateral del torace in due ſoli tronchi diviſe, li quali convenendo inſieme hanno fine nell' orecchietta del cuore.

Il cuore e queſti vaſi, s' io non ſono di molto ingannato, mi ſono ſembrati eſſere in qualche maniera in proporzione con le tre ultime paja di nervi deſcritti, vale a dire maggiori proporzionatamente nelle torpedini che nelle raze; dal che ſe foſſe potrebbeſi allora dedurre non ſolo la copia maggiore di ſangue, e la forza e velocità con cui queſto viene ne' corpi elettrici traſmeſſo e ſoſpinto, ma l' uniformità della natura, la quale eſſendo ſtata negli elettrici organi prodiga di nervi ha voluto eſſerlo nulla meno di vaſi. Queſta differenza però merita ulteriore conferma, giacchè eſſa non mi è ſembrata tale, che nelle ultime ſezioni, le quali a fronte delle maggiori premure non mi fu poſſibile ſino ad ora, per mancanza di torpedini, di poter confermare. Di queſte ed altre ſimili difficoltà che di frequente s' incontrano da quelli che lontani dal mare vogliono eſaminare non ſolo la ſtruttura, ma l' indole e la natura eziandio di molti peſci, ne parlai col celebre Sig. *Gio. Battiſta Pratolongo* illuſtre Medico, e Profeſſore di Notomia in Genova, e lo eccitai, ſiccome dotato di tutte quelle qualità che neceſſarie ſono ad un eſperto oſſervatore, a promovere più oltre con nuove oſſervazioni queſta ubertoſiſſima parte di ſtoria naturale, giacchè appunto in quel tempo ſtava egli in parte occupato dietro ad una ſcelta collezione di peſci per il Gabinetto di Storia naturale ivi allora grandioſamente cominciato dal genio particolare, e dalla ſplendidezza del Sig. Marcheſe *Filippo Durazzo*. Dal Sig. *Pratolongo* dunque, a cui ſcriſſi non ha molto perchè voglia chiarirmi ſu ciò che riguarda il cuore ed i vaſi che nelle torpedini paſſano agli organi elettrici, attendo riſpoſta, la quale ſe verrà per tempo ſarà certo a queſta Memoria unita.

E giacchè ſi parla di vaſi io non voglio omettere quelli che corriſpondono ai forellini da me nel principio indicati, e che particolarmente s' incontrano nell' eſterna circonferenza degli organi elettrici. Queſti vaſi ch' io chiamo mucoſi perchè contengono un umore bianco, tenace, e mucoſo, nel levare la cute del ventre ſi veggono ſcorrere anteriormente e lateralmente degli organi indicati, e delle cartilagini falcate delle gran pinne, ſino a tanto che ciaſcuno di queſti ha fine nel proprio corriſpondente forellino. Quelli che ſi veggono anteriormente hanno origine sì nel dorſo che nel ventre da due gruppi di ghiandole miliari poſte ſuperiormente ed inferiormente ai lati anteriori delle cavità delle narici: quelli che ſono laterali naſcono parimenti da due gruppi di ſimili ghiandole, che ſono collocate tra i lati interni delle cartilagini indicate e gli eſterni degli organi elettrici. Ognuno di queſti canali naſce dalla ſua particolar ghiandoletta, ed è quaſi in origine egualmente grande, come in progreſſo ed in fine. Il diametro di queſti canali è grande in proporzione alla di loro lunghezza, avendone veduti alcuni che non erano certo minori della ghiandola da cui ſi dipartivano. Di queſti canali ſe ne veggono altri, che ſi aprono in molte altre parti della cute del dorſo ed in quella del ventre, i quali però non ſono nè così regolari nè coſtanti come gl' indicati. Sono deſtinati a traſportare l' umor glutinoſo ſeparato dalle ghiandole utile per difendere eſternamente e lubricare la cute.

Raccogliendo quanto abbiamo ſin qui detto dell' organica ſtruttura dei corpi elettrici, sì per riguardo alle numeroſiſſime orizzontali membrane che le colonne compongono, e per le moltiplici diramazioni dei nervi, come ancora per il cuore e per i vaſi che larga copia di ſangue traſportano ai corpi ſteſſi, ſembra poterſi non ſenza ragione dedurre che la natura in queſti organi abbia non meno in ſpazioſi piani, che in nervi ed in vaſi ancora doviziosamente abbondato. Poſto or dunque queſto, ſarebbe egli di molto lontano dal vero chi volendo rendere una qualche ragione degli effetti elettrici, che queſti animali producono, opinaſſe, che meſſa in moto la materia elettrica dall' urto e dalla copia del ſangue, e queſta ſvegliata nei nervi, ed accreſciuta dai numeroſi piani delle colonne veniſſe indi ad eccitarne la ſcoſſa, applicando il moto del ſangue alle convoluzioni del vetro, la nervea ſoſtanza all' elettrica materia, le membrane ai piani che l' elettrica forza mirabilmente accreſcono?

Ma voi ben vedete che in ciò paſſeggiam fra le tenebre, e che per ben fondare una qualche ragionata ſentenza molte e replicate oſſervazioni converrebbero, non diſgiunte dal confronto d' altri animali, e ſegnatamente con l' anguilla tremante del Surinam. Ma queſte coſe non ponno eſſere che a pochi conceſſe, e ſegnatamente al genio particolare di quelli che abitano alle ſpiaggie del mare, i quali oltre alla facilità d' aver molti peſci, ponno anche nel loro naturale elemento, ove convenga, oſſervarli.

P. S. Eccovi la riſpoſta che attendevo dal Sig. Dott. *Pratolongo*, e di cui già vi ho ſcritto. Eſſa mi è giunta al momento che ſtavo per chiudere queſta mia, ed ho piacere di potervela unire, poichè vedrete dalle oſſervazioni di queſto illuſtre Profeſſore confermata la grandezza maggiore del cuore nelle torpedini, di quello che ſia nelle raze, avutoſi ſempre riguardo alla grandezza e peſo maggiore dei loro corpi.

A. C.

Genova 24. Giugno 1786.

Finalmente dopo tante ricerche ſul principio di queſta ſettimana mi è ſtata portata da' peſcatori una torpedine del peſo di 1 libra e $\frac{1}{2}$. Non poſſo eſprimervi quanto ciò mi foſſe di piacere vedendomi allora in iſtato d' adempiere all' incarico che da più d' un meſe mi avevate affidato. Mi poſi ben toſto ad anatomizzarla per fare il paragone tra la grandezza del di lei cuore e la grandezza di quello della raza di libre 10 e $\frac{1}{2}$ di peſo della ſpecie nominata da Linneo *Raja myraletus*, che avea anatomizzata pochi giorni avanti. Ed eccovi adeſſo il giudizio che ho potuto formare intorno a queſta queſtione in ſeguito delle mie oſſervazioni.

Il cuore della torpedine paragonato con quello delle altre raze è molto più piccolo, e tale appariſce evidentemente a colpo d'occhio. Ma conviene ſapere che le torpedini hanno un volume di corpo di gran lunga minore di quello del corpo d' altre raze, e che per conſeguenza è minore altresì di gran lunga il loro peſo. Ciò premeſſo qualora propongaſi la queſtione ſe la cavità del cuore della torpedine ſia maggiore o minore della cavità del cuore dell' altre raze, conviene paragonare la cavità del cuore delle prime e delle ſeconde col peſo dei reſpettivi loro corpi. Trovata con queſto paragone la ragione che ha la cavità del cuore delle torpedini, e delle altre raze al peſo dei reſpettivi loro corpi, conviene vedere ſe la ragione che ha la cavità del cuore delle torpedini al peſo dei loro corpi ſia maggiore o minore della ragione, che ha parimente al peſo dei loro corpi la cavità del cuore d' altre raze. Per arrivare ad acquiſtare queſta cognizione ho riempiuto il cuore della torpedine, e quello della ſopraddetta raza di mercurio, formando queſto la più giuſta miſura dell' uno e dell'altro. Il mercurio con cui ho miſurata la cavità del primo peſava ſei dramme, e quello con cui ho miſurata la cavità del ſecondo peſava ventitre dramme. Il peſo della torpedine come ho detto antecedentemente era 1 libbra e $\frac{1}{2}$ cioè dramme 144, il peſo della raza era di libbre 10 e $\frac{1}{2}$ cioè di dramme 1008. Sicchè parlando in termini geometrici il peſo del mercurio contenuto dal cuore della torpedine è al peſo del corpo di eſſa come 6 a 144; il peſo del mercurio contenuto dal cuore della raza è al peſo del corpo della medeſima, come 23 a 1008. Or la ragione di 6 a 144 è maggiore della ragione di 23 a 1008; e per mettere queſta verità nella maggiore evidenza riduco ambedue le ragioni a termini più ſemplici con dividere l' antecedente ed il conſeguente della prima ragione per 6, e l' antecedente ed il conſeguente della ſeconda per 23. In queſta maniera riſultano le ſeguenti equazioni

1.ª ragione 6, 144 = 1, 24
2.ª ragione 23, 1008 = 1, 43 $\frac{19}{23}$

onde vedeſi chiaramente che la prima ragione è maggiore e quaſi doppia della ſeconda. Egli è perciò vero veriſſimo che il cuore della torpedine è maggiore e quaſi doppio di quello dell' altra raza qualora ſi paragoni l' uno e l' altro col peſo de' reſpettivi loro corpi. Ed eccovi per tal modo ſciolta, per quanto mi pare, la propoſta queſtione.

Confeſſo però che queſta prova è determinata alla torpedine ed alla raza che ho oſſervata; per renderla generale converrebbe ripeterla in altre e molte torpedini ed in altre e molte raze. Io farò inſtanza a' peſcatori perchè mi diano occaſione di replicarla, ed allora mi farò un dovere di ſignificarvene il riſultato. Amatemi ed onoratemi ſpeſſo de' voſtri comandi, io farò ſempre

Il voſtro affezionatiſs. amico
BATTISTA PRATOLONGO.

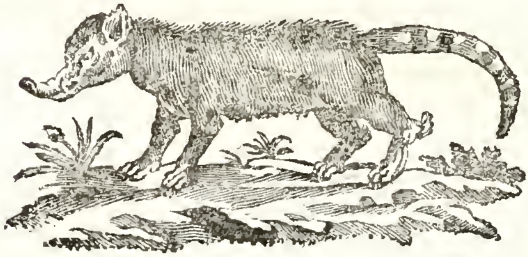
Rappreſenta queſta Tavola la faccia inferiore, o ſia il ventre della torpedine femmina, la cui parte ſiniſtra, detratta ſoltanto la cute, dimoſtra gli organi elettrici e le altri parti tutte nella loro naturale ſede coſtituite; la deſtra, levata la metà della mandibola inferiore con le parti del torace e del ventre, e con queſte la baſe del cranio ancora, rappreſenta

particolarmente

particolarmente il cervello, l' origine dei nervi, e la naturale inſerzione di queſti negli organi elettrici.

AA. Il margine eſteriore delle grandi laterali pinne.
BB. Le pinne poſteriori e laterali.
CC. Le due pinne del dorſo.
D. La coda.
EE. Cute reciſa ed eſternamente roveſciata.
F. La cartilagine falcata ſiniſtra delle gran pinne.
aa. Vaſi mucoſi ſuperiori.
bb. Vaſi mucoſi inferiori e laterali.
c. Gruppo di ghiandole da cui partono i vaſi mucoſi ſuperiori.
d. Gruppo di ghiandole dalle quali naſcono i mucoſi inſeriori.
G. Cartilagine falcata deſtra della gran pinna coperta dalla cute, ed in cui ſi veggono i
eee. Forellini regolari nei quali terminano i vaſi mucoſi.
HH. Elettrici organi per la maggior parte di
fff. Colonne eſagone compoſti, le cui
ggg. Eſtremità inſieme congiunte e naturalmente coſtituite rappreſentano la figura di una maglia.
I. Il torace entro cui evvi inchiuſo il cuore.
hh. Le cinque eſterne feſſure che corriſpondono ai cinque interni fori delle branchie.
i. Cartilagine traſverſa del diafragma.
j. Una parte della cartilagine medeſima tagliata e roveſciata all' eſterno.
K. Pareti del ventre naturalmente coſtituite.
L. Pareti medeſime levate e roveſciate all'eſterno onde appariſca
M. La cavità del ventre.
N. L' ano.
k. Una delle due circolari aperture che dalla parte eſteriore ed anteriore del dorſo ſi aprono nella parte ſuperior del palato.
l. Il globo dell' occhio veduto poſteriormente.
mm. Fori delle narici.
n. Mandibola ſuperiore.
o. Metà della mandibola inferiore.

p. Muſcolo retrattore della mandibola inferiore.
q. Muſcolo comune alla mandibola inferiore e ſuperiore.
rr. Pareti del cranio aperto, onde ſi vegga nella ſua ſede il cervello.
s. Il lobo ſolitario del cervello.
t. I quattro lobi, due anteriori e due poſteriori.
uu. I corpi piramidali.
vv. I corpi olivari.
x. Spinal midolla, a' cui lati ſi veggono le
yy. Vertebre reciſe.
z. Il ſeguito della ſpina.
11. Nervi olfattorj.
2. Nervo optico.
3. Nervo che naſce dall' apice dei corpi olivari.
4. Il primo pajo dei nervi elettrici da cui ſi produce il
*** Ramo falcato.
5. Il ſecondo pajo degli elettrici.
6. Il terzo pajo degli elettrici medeſimi.
7. Nervi ſpinali che convengono aſſieme verſo la regione del diafragma.
8. Nervi parimenti ſpinali.



DELLE
SERIE RICORRENTI.

Del Sig. GIAN-FRANCESCO MALFATTI Pubblico Profeſſore di Matematica nella Pontificia Univerſità di Ferrara.

1. L' Illuſtre Geometra Sig. *Luigi de là Grange*, che tiene un de' primi ſeggi tra i Matematici dell'Europa e fa tanto onore al nome italiano, nel 1.° Volume delle Memorie di Torino riduce la teoria delle ſerie ricorrenti alla integrazione delle equazioni lineari a differenze finite; e la ſtabiliſce per tal modo ſu dei principj legittimi e naturali, laddove prima di lui eſſa era ſtata trattata per vie affatto indirette. Ritorna poi ſullo ſteſſo argomento nelle Memorie dell' Accademia Reale delle Scienze e belle Lettere di Berlino per l' anno 1775, e alla pag. 184 così la diſcorre.

2. „ Sia la ſerie y_0, y_1, y_2 ecc. y_x, y_{x+1}, y_{x+2} ecc. nella
„ quale ſi abbia coſtantemente queſta equazione lineare
„ tra n termini ſucceſſivi; $Ay_x + By_{x+1} + Cy_{x+2} +$ ecc.
„ $+ Ny_{x+n} = 0 \ldots\ldots (A)$, eſſendo A, B, C ecc. N coeffi-
„ cienti coſtanti qualunque. Queſta ſarà una ſerie ricorren-
„ te ſemplice dell'ordine n; e l'equazione (A) ſarà l'equa-
„ zione differenziale finita, che ſi tratta d' integrare per
„ aver l' eſpreſſione del termine generale y_x della ſerie pro-
„ poſta.

„ A queſto fine ſuppongo $y_x = a\alpha^x$, eſſendo a, α coſtanti
„ indeterminate. Avrò dunque $y_{x+1} = a\alpha^{x+1}$, $y_{x+2} = a\alpha^{x+2}$ ecc.,
„ e facendo le ſoſtituzioni nell' equazione (A), eſſa diver-
„ rà diviſibile per $a\alpha^x$, e ſi avrà dopo la diviſione $A + B\alpha$

,, $+ C\alpha^2 + \text{ecc.} + N\alpha^n = 0 \ldots . (B)$. Da queſta equazione è
,, chiaro, 1.° che non trovandoſi in eſſa il coefficiente a,
,, queſto coefficiente reſta arbitrario; 2.° che queſta equazione
,, eſſendo relativamente ad α del grado n, eſſa somminiſtrerà
,, in generale n valori differenti di α che io denoterò
,, con α, β, γ ecc. Si avrà dunque per tal modo prendendo
,, pure diverſi coefficienti a, b, c ecc. n valori diverſi
,, di y_x, cioè $a\alpha^x$, $b\beta^x$, $c\gamma^x$ ecc.; e ſiccome l'equazione (A)
,, è lineare, è facile il vedere che la ſomma di queſti differenti
,, valori di y_x vi ſoddisferà parimente. Di maniera che
,, ſi avrà in generale

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + \text{ecc.}$$

,, E ſiccome queſto valore di y_x contiene n coſtanti arbitrarie
,, a, b, c ecc., eſſo ſarà l'integrale completo dell'equazione
,, (A) dell' ordine n^{esimo}.

3. ,, Se ſi ſuppone che i primi termini n della ſerie propoſta
,, ſian dati, ſi potrà col loro mezzo determinare le n
,, coſtanti arbitrarie a, b, c ecc., e a tal uopo baſterà riſolvere
,, le n equazioni
,, $y_0 = a + b + c + \text{ecc.}$; $y_1 = a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{ecc.}$;
,, $y_2 = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2$ ecc.; $y_{n-1} = a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1} + c\gamma^{n-1}$ ecc.
,, Nel caſo di $n = 1$, ſi ha $a = y_0$; nel caſo di $n = 2$, ſi
,, avrà $a = \frac{y_1 - \beta y_0}{\alpha - \beta}$; $b = \frac{y_1 - d y_0}{\beta - \alpha}$; nel caſo di $n = 3$ ſi avrà

,, $$a = \frac{y_1 - (\beta + \gamma) y_2 + \beta\gamma y_0}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}; \quad b = \frac{y_2 - (\alpha + \gamma) y_1 + \alpha\gamma y_0}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)};$$

,, $$c = \frac{y_2 - (\alpha + \beta) y_1 + \alpha\beta y_0}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)},$$ e così di ſeguito. Da ciò e dalla
,, nota teoria delle equazioni è facile il concludere, che
,, ſe ſi fa per abbreviare
,, $A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + \text{ecc.} + N\alpha^n = P$

„ $B + C\alpha + D\alpha^2 + \text{ecc.} = \mathfrak{Q}$

„ $C + D\alpha + \text{ecc.} = R$

„ $D + \text{ecc.} = S$

ecc.

„ ſi avrà in generale $a = \dfrac{\mathfrak{Q}y_0 + Ry_1 + Sy_2 \text{ ecc.}}{dP:d\alpha}$; e cangiando „ in queſt' eſpreſſione di a la quantità α in β, γ ecc., ſi „ avranno i valori degli altri coefficienti b, c ecc.

„ Se accade che due o più radici ſiano eguali, baſterà ſupporre le lor differenze infinitamente piccole, e ſi troverà „ nel caſo di $\beta = \alpha$, che i due termini $a\alpha^x + b\beta^x$ dell' eſpreſſione di y_x diverranno di queſta forma $a'\alpha^x + b'x\alpha^{x-1}$, „ in cui ſarà

$$„\ a' = \frac{\frac{d\mathfrak{Q}}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1 + \frac{dS}{d\alpha}y_2 + \text{ecc.}}{d^2P:2d\alpha^2};$$

$$„\ b' = \frac{\mathfrak{Q}y_0 + Ry_1 + Sy_2 + \text{ecc.}}{d^2P:2d\alpha^2};$$

„ e ſe ſi ha $\gamma = \beta = \alpha$, allora i tre termini $a\alpha^x + b\beta^x$ „ $+ c\gamma^x$ diventeranno $a''\alpha^x + b''x\alpha^{x-1} + \dfrac{c''x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}$, ove „ ſarà

$$„\ a'' = \frac{\frac{d^2\mathfrak{Q}}{2d\alpha^2}y_0 + \frac{d^2R}{2d\alpha^2}y_1 + \frac{d^2S}{2d\alpha^2}y_2 + \text{ecc.}}{d^3P:(2.3dx^3)}$$

$$„\ b'' = \frac{\frac{d\mathfrak{Q}}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1 + \frac{dS}{d\alpha}y_2 + \text{ecc.}}{d^3P:(2.3d\alpha^3)}$$

$$„\ c'' = \frac{\mathfrak{Q}y_0 + Ry_1 + Sy_2 + \text{ecc.}}{d^3P:(2.3d\alpha^3)}.$$ E così del reſto.„

4. Per vedere ſe queſte formole canoniche, poſte dal Ch. Autore pel caſo delle radici eguali, ſian giuſte, io ne farò

l' applicazione ad un eſempio facile di una ſerie ricorrente di 3.° grado. Sia queſta 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 ecc., la quale ha per ſcala di relazione l' equazione $z^3 - z^2 - z + 1 = 0$, oſſia $(z - 1)^2 (z + 1) = 0$ contenente due radici eguali all' unità poſitiva ed una terza eguale all' unità negativa. Fatta pertanto $1 = \alpha$, e cangiato z in α, ſarà $1 - \alpha - \alpha^2 + \alpha^3 = 0$, onde $1 - \alpha - \alpha^2 + \alpha^3 = P$; $-1 - \alpha + \alpha^2 = \mathcal{Q}$; $-1 + \alpha = R$; $1 = S$. Quindi riſulta
$\frac{dP}{d\alpha} = -1 - 2\alpha + 3\alpha^2$; $\frac{d^2P}{2d\alpha^2} = -1 + 3\alpha$; $\frac{d\mathcal{Q}}{d\alpha} = -1 + 2\alpha$; $\frac{dR}{d\alpha} = 1$; $\frac{dS}{d\alpha} = 0$, e rimeſſo il valore di α; $\mathcal{Q} = -1$, $R = 0$; $S = 1$; $\frac{dP}{d\alpha} = 0$; $\frac{d^2P}{2d\alpha^2} = 2$; $\frac{d\mathcal{Q}}{d\alpha} = 1$; $\frac{dR}{d\alpha} = 1$; $\frac{dS}{d\alpha} = 0$. Ora il termine generale di queſta ſerie dev' eſſere della forma $a'\alpha^x + b'x\alpha^{x-1} + c(-1)^x$, ovvero $a' + b'x + c(-1)^x$. Ma in genere pel caſo di 2 radici eguali abbiamo
$$a' = \frac{\frac{d\mathcal{Q}}{d\alpha} y_0 + \frac{dR}{d\alpha} y_1 + \frac{dS}{d\alpha} y_2 \text{ ecc.}}{d^2P : 2d\alpha^2};$$
$$b' = \frac{\mathcal{Q} y_0 + R y_1 + S y_2 \text{ ecc.}}{d^2P : 2d\alpha^2},$$
cioè ſoſtituendo i valori di y_0, y_1, y_2, e così gli altri di $\mathcal{Q}$, R, S, e loro differenziali, per ridurci alla noſtra ſerie; $a' = 1$, $b' = \frac{1}{2}$; e diventando
$$c = \frac{\mathcal{Q} y_0 + R y_1 + S y_2}{dP : d\beta},$$
ove ſi faccia $-1 = \beta$, e ſi riferiſcano $\mathcal{Q}$, R, S, P alla radice β, che fa naſcere $\mathcal{Q} = -1 - \beta + \beta^2 = 1$; $R = -1 + \beta = -2$; $S = 1$; $\frac{dP}{d\beta} = -1 - 2\beta + 3\beta^2 = 4$, e finalmente $c = \frac{1}{4}$; col canone del Sig. *de la Grange*, ſarà il termine generale della propoſta ſerie;

$1+\frac{x}{2}+\frac{(-1)^x}{4}$; il che non concorda col vero, potendo chiccheſſia conoſcere facilmente, che il vero termine generale è $\frac{3}{4}+\frac{x}{2}+\frac{(-1)^x}{4}$. Se faremo il confronto di queſto col precedente, vedrem che la diverſità conſiſte unicamente nel primo termine, cioè nel valore di a', che non ben ſi determina col fare $a'=\dfrac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0+\frac{dR}{d\alpha}y_1+\frac{dS}{d\alpha}y_2 \text{ ecc.}}{d^2P:2d\alpha^2}$, perchè a queſta frazione va aggiunta o levata qualche coſa. Da ciò ho preſo argomento di rifarmi da capo e di eſaminare più intimamente queſta materia per vedere ſe mi rieſca nel caſo delle radici eguali di preſentare con maggiore eſattezza il termine generale delle ſerie ricorrenti.

5. Stabilita la ricorrente generica, $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots, y_x, y_{x+1}, y_{x+2} \ldots, y_{x+t}$ il cui termine generale è y_x, ſuppongo che l' equazione di relazione ſia $Ay_x+By_{x+1}+Cy_{x+2}\ldots+Ky_{x+t-1}+y_{x+t}=0$, onde la ſerie ſia del grado t. Fatto $y_x=cz^x$, la ſuddetta equazione ſi ridurrà a queſt' altra $A+Bz+Cz^2\ldots+Kz^{t-1}+z^t=0$, le cui radici di num.° t rappreſento coi ſimboli α, β, γ, ecc., che danno il termine generale $y_x=a\alpha^x+b\beta^x+c\gamma^x$ ecc., ove a, b, c ecc. ſono coſtanti arbitrarie di num.° eguale al num.° delle radici. Per aver poi i valori di queſte coſtanti, dati a x i valori ſucceſſivi di 0, 1, 2 ecc. confronterò il termine generale modificato a tali ipoteſi coi primi termini della ſerie che devono eſſer noti, formando tante equazioni, quante ſono le coſtanti a, b, c ecc., le quali per tal modo verran date dalle funzioni y_0, y_1, y_2 ecc. e dalle radici α, β, γ ecc.

6. Nel caſo di $t=1$, unica debb' eſſere la radice dell' equazione di relazione, e ſi fa il termine generale per que-

ſta ipoteſi $y_x = a\alpha^x$; onde poſto $x = 0$, ſarà $y_0 = a\alpha^0 = a$, e quindi $y_x = y_0\alpha^x$, ove noteremo, che il coefficiente di y_0 è l' unità poſitiva. All' ipoteſi di $t = 2$ corriſpondono due radici α, β e diventa $y_x = a\alpha^x + b\beta^x$. Sicchè fatto ſucceſſivamente $x = 0$ e $x = 1$ ci naſcono le due equazioni $y_0 = a + b$; $y_1 = a\alpha + b\beta$, dalle quali traendo i valori delle indeterminate a, b ſi ottiene $a = \frac{-\beta y_0 + y_1}{\alpha - \beta}$; $b = \frac{-\alpha y_0 + y_1}{\beta - \alpha}$. Sia $t = 3$, alla quale ipoteſi compete il termine generale $y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x$. Poſte ſucceſſivamente $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ ſi hanno le tre equazioni $y_0 = a + b + c$; $y_1 = a\alpha + b\beta + c\gamma$; $y_2 = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2$, alle quali applicando le regole algebraiche, finalmente ſi ottiene

$$a = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta + \gamma)y_1 + y_2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}; \quad b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma)y_1 + y_2}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)};$$

$$c = \frac{\alpha\beta y_0 - (\alpha + \beta)y_1 + y_2}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}.$$

Così ſe faremo $t = 4$, eſſendo δ la 4.ª radice e d la coſtante corriſpondente, nel termine generale $a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + d\delta^x$ riſulta

$$a = \frac{-\beta\gamma\delta y_0 + (\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)y_1 - (\beta + \gamma + \delta)y_2 + y_3}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)};$$

$$b = \frac{-\alpha\gamma\delta y_0 + (\alpha\gamma + \alpha\delta + \gamma\delta)y_1 - (\alpha + \gamma + \delta)y_2 + y_3}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)};$$

$$c = \frac{-\alpha\beta\delta y_0 + (\alpha\delta + \beta\delta + \alpha\beta)y_1 - (\alpha + \beta + \delta)y_2 + y_3}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta)};$$

$d = -\alpha\beta\gamma y_0$

$$d = \frac{-\alpha\beta\gamma y_0 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)y_1 - (\alpha + \beta + \gamma)y_2 + y_3}{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)}.$$

Quindi trarrem la regola de' valori di a, b, c, d ecc. per le ſucceſſive ipoteſi di $t = 5$, $t = 6$ ecc., la quale è la ſeguente. Sia $z^t + pz^{t-1} + qz^{t-2} \ldots + fz^2 + gz + k = 0 \ldots (A)$ l' equazione delle radici diſuguali α, β, γ, δ ecc., ϕ. Eſſa equivalerà a queſt' altra $(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta) \ldots (z - \phi) = 0$, e l' ultimo termine k ſarà eguale al prodotto delle medeſime radici preſe negativamente, cioè ſarà $k = (-\alpha)(-\beta)(\ldots)(-\phi)$; e queſto prodotto ſarà poſitivo ſe il num.° delle radici è pari, negativo ſe diſpari. Che ſe queſto prodotto venga diviſo per uno de' ſuoi fattori $-\alpha$, $-\beta$ ecc., il quoziente che riſulta ſarà al contrario poſitivo ſe il num.° delle radici è diſpari, e negativo ſe pari. Conſiderati ora i coefficienti di y_0 nel valore di a per le ſuperiori ipoteſi di t, vedremo, che

$$\begin{array}{clcr} & t = 1 & & 1 \\ & t = 2 & & -\beta \\ a & & \text{corriſponde il coefficiente di } y_0 & \\ & t = 3 & & \beta\gamma \\ & t = 4 & & -\beta\gamma\delta \\ & \text{ecc.} & & \text{ecc.} \end{array}$$

Onde generalmente il ſuddetto coefficiente di y_0 nel valore di a ſarà $\frac{k}{-\alpha}$; e per la ſimilitudine del coefficiente di y_0 negli altri valori di b, c, d ecc. ſarà eſſo nel valore di b eguale a $\frac{k}{-\beta}$, nel valore di c eguale a $\frac{k}{-\gamma}$, cioè ſarà eguale al prodotto di tutte le radici dell' equazione (A) preſe negativamente, levata quella cui compete il coefficiente di cui ſi cerca il valore.

7. Una ſemplice occhiata che ſi dia agli eſempj addotti nel precedente §. fa poi conoſcer la regola che oſſervano i coefficienti de' termini y_1, y_2, y_3 ecc. A buon conto i ſegni procedono alternativamente coſicchè ſe il coefficiente di y_0 è

poſitivo, ſi fa negativo quello di y_1, indi torna negativo l' altro di y_2 ecc.; e ſuccede il contrario ſe il coefficiente di y_0 ſia negativo. In oltre, ſuppoſto v. g. che ſia il coefficiente di y_0 il prodotto de' tre fattori $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ nel valore di a, ſarà il coefficiente di y_1, la ſomma di tutti gli ambi, che formar ſi poſſono co' tre ſuddetti fattori, la quale rieſce poſitiva, e il coefficiente di y_2 la ſomma de' tre fattori $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, che diventa un quanto negativo; finalmente è 1 il coefficiente del termine y_3 che rimane. Così ſuppoſte 5 le radici dell' equazione (*A*) che ſiano α, β, γ, δ, ε, ſarà il coefficiente di $y_0 = \beta\gamma\delta\varepsilon$; quello di $y_1 = -(\beta\gamma\delta + \beta\gamma\varepsilon + \beta\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon)$; quello di $y_2 = \beta\gamma + \beta\delta + \beta\varepsilon + \gamma\delta + \gamma\varepsilon + \delta\varepsilon$; quello di $y_3 = -(\beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$, e finalmente l' ultimo di $y_4 = 1$. Con ſimile diſcorſo determineremo i coefficienti di y_0, y_1, y_2 ecc. pei valori di b, c, d ecc. Quanto poi ai denominatori de' ſuddetti valori di a, b, c ecc. vedremo a un tratto, che per avere il denominatore di a, eſſendo $(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)\ldots\ldots(z-\phi)$ equivalente al primo membro dell' equazione (*A*), biſogna levare il fattore $z-\alpha$, onde rimanga ſoltanto $(z-\beta)(z-\gamma)\ldots\ldots(z-\phi)$. Fatto quindi $z=\alpha$, il riſultante prodotto $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots\ldots(\alpha-\phi)$ ſarà il ricercato denominatore. Così per avere il denominatore di b ſarà meſtieri dividere l' intero prodotto per $z-\beta$, e poſto nel quoziente $z=\beta$, ſarà $(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\ldots\ldots(\beta-\phi)$ il denominatore di b. Così ſi dica per gli altri denominatori.

8. In altro modo ancora ſi potranno avere gli anzidetti coefficienti di y_1, y_2 ecc. conoſciuto che ſia il primo di y_0. Sia, per eſempio, $\beta\gamma\delta\ldots\ldots\phi$ queſto coefficiente di y_0 che ſpetta al valore di a. Preſcindo ora dal ſegno e fingo variabili

le coſtanti β, γ, δ..... ϕ. Differenzio il prodotto $\beta\gamma\delta\ldots\phi$ facendo che ogni differenziale che riſulta ſia diviſo per la differenza di quella quantità che ſi è fatta variare. Uniti quindi tutti i termini di queſta differenziazione, ho il valore del coefficiente di y_1. Queſto ſecondo coefficiente ſi differenzj di nuovo collo ſteſſo metodo, e adunati i termini della differenziazione, e diviſi per 2, ho il coefficiente di y_2. Seguito a differenziare queſto terzo coefficiente, e i termini riſultanti diviſi per 3 mi danno il coefficiente di y_3. Vado avanti ſino a numero t di differenziazioni, e l'ultima mi dà un aggregato, che diviſo per t ſarà il coefficiente di y_t. Si avverta però in tutti queſti coefficienti di ſalvar la legge dell' alternativa de' ſegni che abbiam ſopra notata.

9. Sia per eſempio $-\beta\gamma\delta$ il coefficiente di y_0 nel valore di a. Si prenda eſſo poſitivamente, e ſi differenzj alla maniera indicata. Avremo $D.\beta\gamma\delta = \frac{\beta\gamma d\delta}{d\delta} + \frac{\beta\delta d\gamma}{d\gamma} + \frac{\gamma\delta d\beta}{d\beta} = \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta$. Queſto aggregrato di 3 termini ſi torni a differenziare, e naſcerà $D(\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) = \frac{\beta d\gamma}{d\gamma} + \frac{\gamma d\beta}{d\beta} + \frac{\beta d\delta}{d\delta} + \frac{\delta d\beta}{d\beta} + \frac{\delta d\gamma}{d\gamma} + \frac{\gamma d\delta}{d\delta} = 2\beta + 2\gamma + 2\delta$, onde $\frac{D(\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)}{2} = \beta + \gamma + \delta$. Da ultimo differenziando queſto riſultato, abbiamo $D(\beta + \gamma + \delta) = \frac{d\beta}{d\beta} + \frac{d\gamma}{d\gamma} + \frac{d\delta}{d\delta} = 3$, ſicchè $\frac{D(\beta + \gamma + \delta)}{3} = 1$. Sarà pertanto, avendo riguardo all' alternativa de' ſegni,

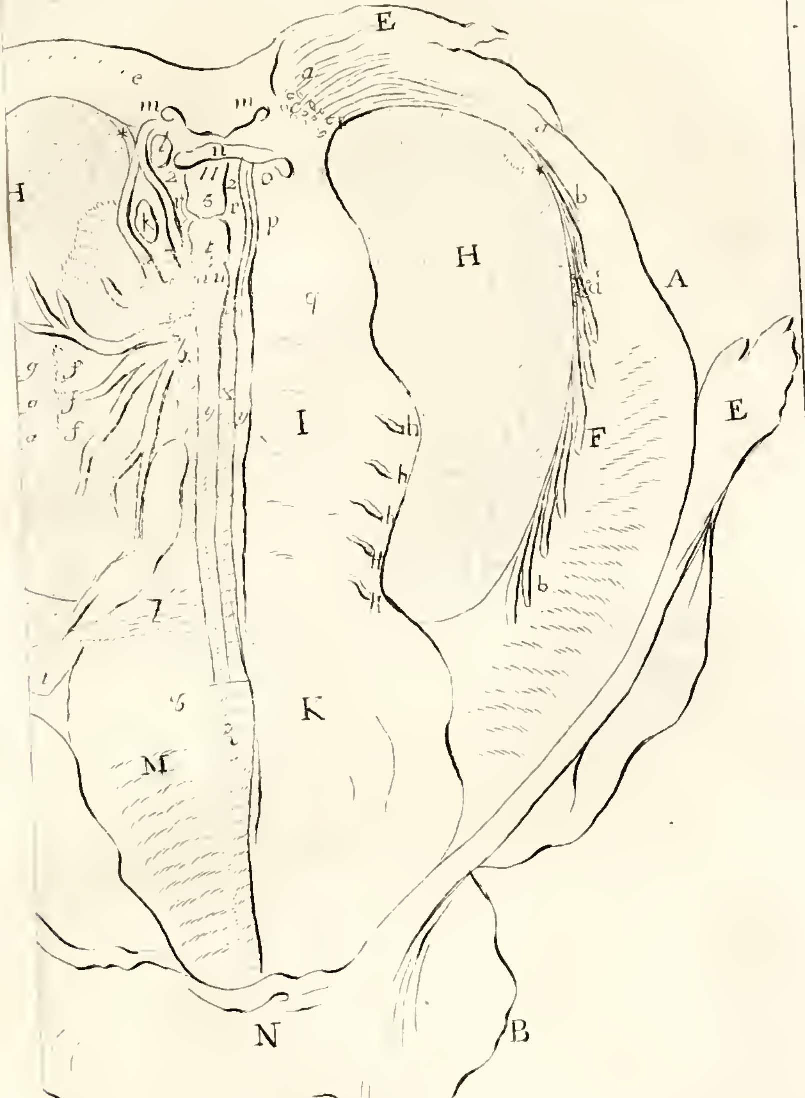
$$a = -\frac{\beta\gamma\delta y_0 + (\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)y_1 - (\beta+\gamma+\delta)y_2 + y_3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$; che è quello che abbiamo trovato al §. 6. Collo ſteſſo metodo arriveremo a trovare i numeratori de' valori di b, c, d, non ſolo per queſta ipoteſi della ricorrente di 4.° grado, ma per le ricorrenti di qualunque grado t, quando le radici $\alpha, \beta, \gamma .. \phi$ ſian tutte tra loro diſuguali.

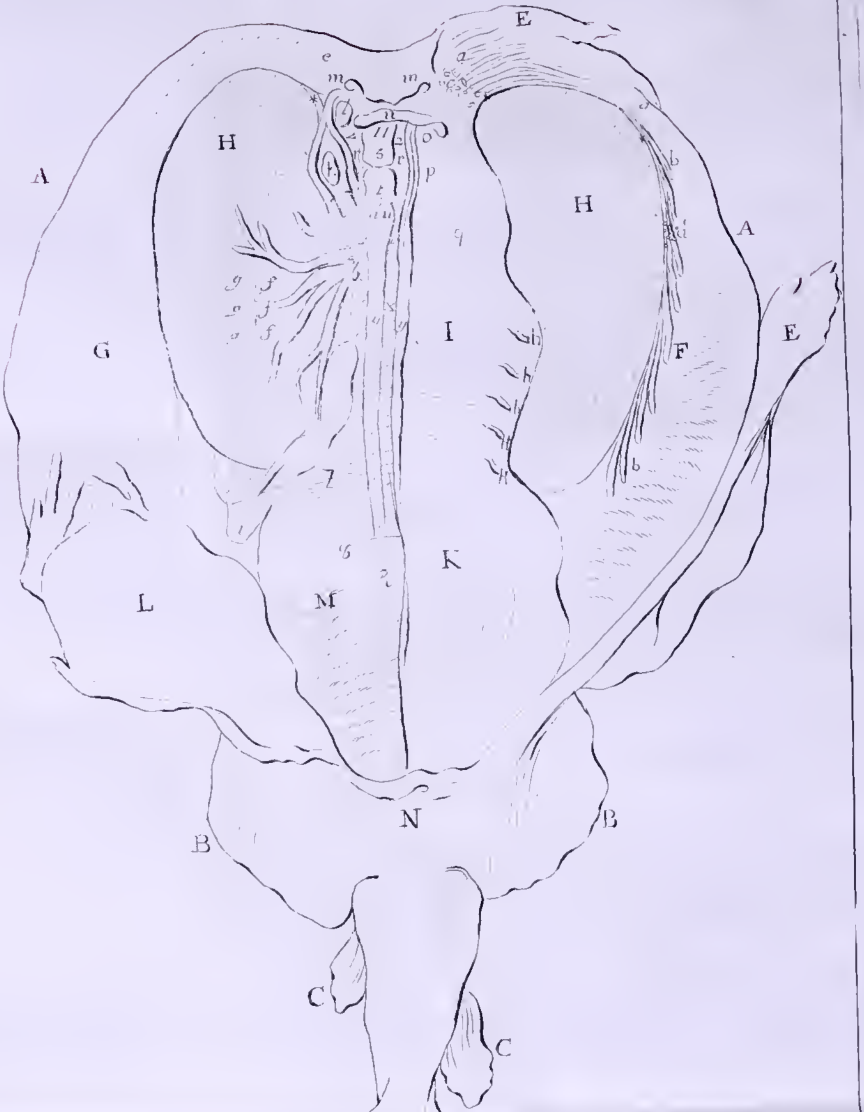
10. Ho poſta la condizione che le radici α, β, γ ecc. ſiano tra loro diſuguali, perchè al caſo che vi ſian delle radici eguali, alcuni valori di a, b, c ecc. diventano infiniti. Fatto $t = 3$, abbiam veduto al §. 6 eſſere $a = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta+\gamma)y_1 + y_2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$;

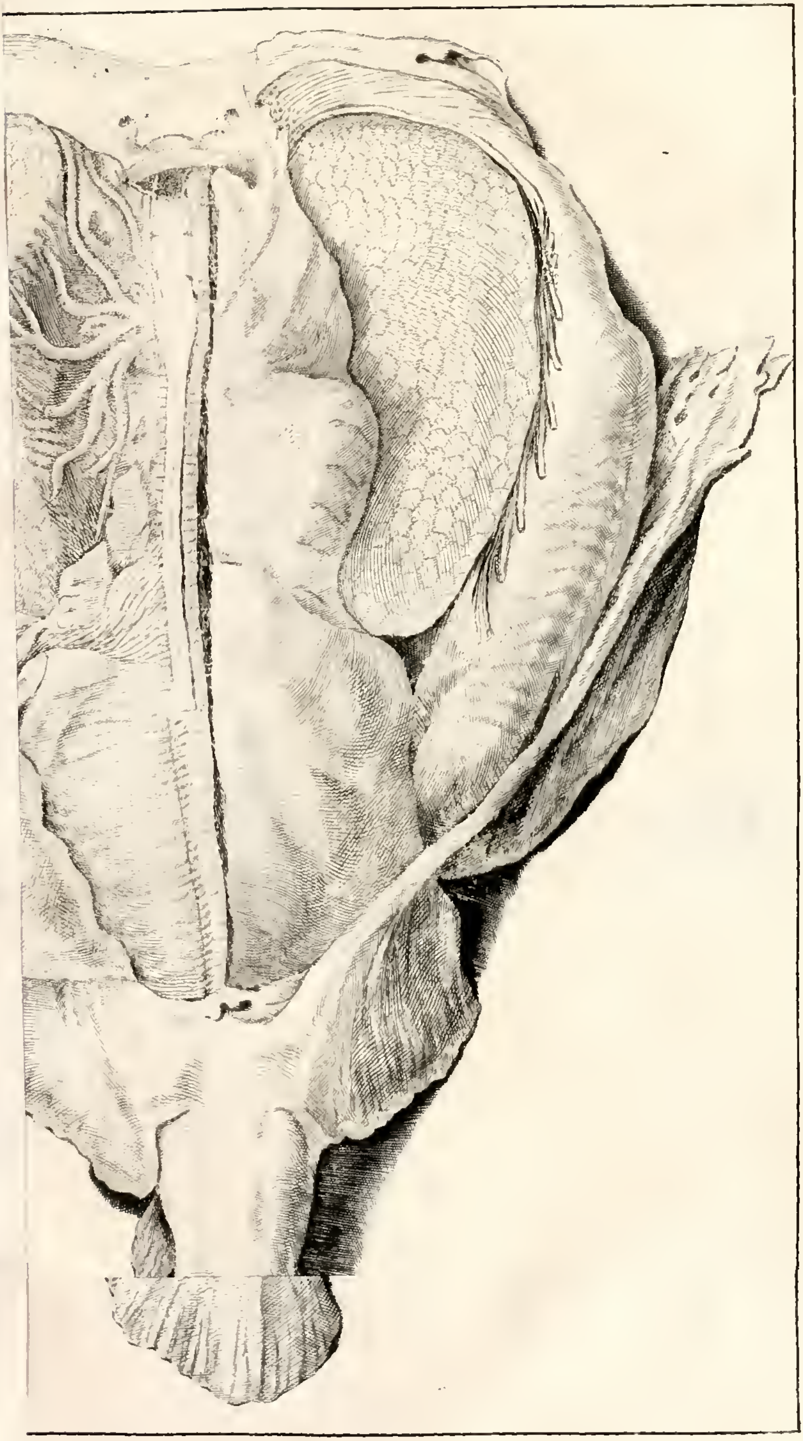
$$b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha+\gamma)y_1 + y_2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\ ;\ c = \frac{\alpha\beta y_0 - (\alpha+\beta)y_1 + y_2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$ Onde ſe ſi ſuppone, che ſia $\beta = \alpha$, i due valori di a e di b ſono quantità infinite, rimanendo finito il 3.° di c. Così ſi dee dire reſpettivamente per le altre ipoteſi di t ove in eſſe alcune radici ſiano eguali.

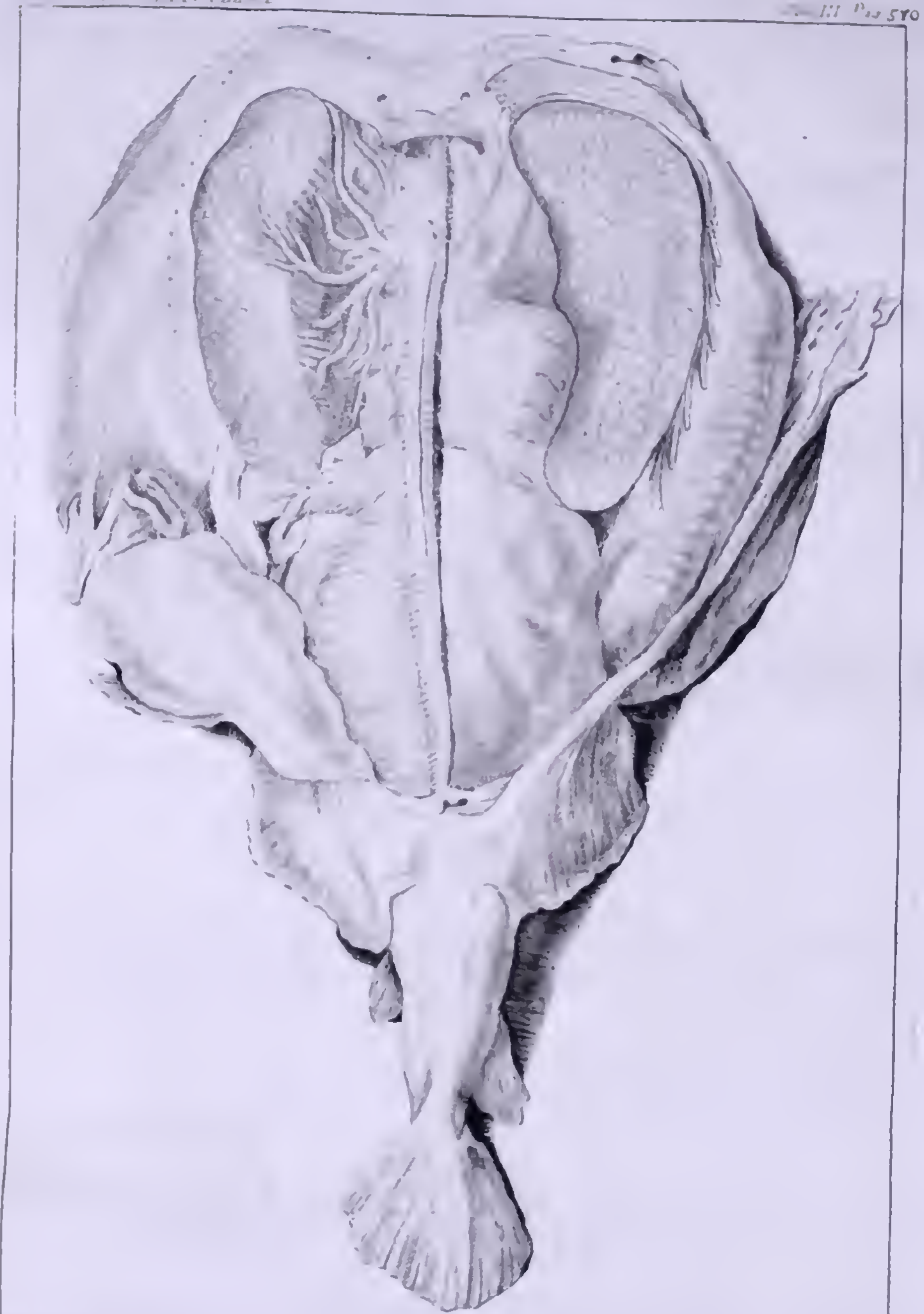
11. Per rimediare a queſto inconveniente farem così. Supporremo che nel termine generale della ricorrente $a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + d\delta^x$ ecc., quando $\beta = \alpha$, ſia $\beta = \alpha + d\alpha$: e conſiderando in queſto 1.° eſempio una ricorrente di 3.° grado, coſicchè il ſuo termine generale ſia $a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x$, colla ſoſtituzione di $\alpha + d\alpha$ in vece di β, avrem cangiato il termine generale in queſt' altro $a\alpha^x + b(\alpha + d\alpha)^x + c\gamma^x$ che differiſce infinitamente poco dal vero. Col canone neutoniano ſi butti ora in ſerie la podeſtà x del binomio $\alpha + d\alpha$, e naſcerà $(\alpha + d\alpha)^x = \alpha^x + x d\alpha . \alpha^{x-1} + \frac{x(x-1)}{2} d\alpha^2 . \alpha^{x-2} +$ ecc.

Quindi il termine generale ſarà $a\alpha^x + b\alpha^x + b x d\alpha . \alpha^{x-1}$ $+ \frac{bx(x-1)}{2} d\alpha^2 . \alpha^{x-2} +$ ecc. $+ c\gamma^x$ .... (B). Noi abbiam trovato ſuperiormente $b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha+\gamma)y_1 + y_2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$, cioè col ſo-


E
a
e
m
m
*
l
n
o
2
11
2
5
r
r
p
H
k
t
u
q
H
*
b
d
A
E
h
g
f
f
f
x
y
y
I
h
h
h
h
F
b
l
K
M
N
B
C
C
D


E
e
a
m
m
*
l
n
11
2
o
H
5
r
r
t
p
A
t
u u
H
q
*
b
d d
A
g
f
g
f
g
f
I
h
F
E
h
h
h
h
b
l
G
6
K
L
M
2
N
B
B
C
C
D





[illegible]

ſtituire $d\alpha$ in vece di $\beta-\alpha$; $b=\dfrac{\alpha\gamma y_0-(\alpha+\gamma)y_1+y_2}{d\alpha(\beta-\gamma)}$, oſſia

$$b=\frac{\alpha\gamma y_0-(\alpha+\gamma)y_1+y_2}{d\alpha(\alpha-\gamma)};$$ onde ſarà

$$bd\alpha=\frac{\alpha\gamma y_0-(\alpha+\gamma)y_1+y_2}{\alpha-\gamma};$$ e queſta è una quantità finita. Ma ſe $bd\alpha$ è una quantità finita, ſarà una quantità infinitamente piccola $bd\alpha^2$, e molto più $bd\alpha^3$ ecc. Oltracciò, poichè $a=\dfrac{\beta\gamma y_0-(\beta+\gamma)y_1+y_2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$, avrem colla ſoſtituzione di $-d\alpha$ in vece di $\alpha-\beta$; $a=\dfrac{\beta\gamma y_0-(\beta+\gamma)y_1+y_2}{-d\alpha(\alpha-\gamma)}$, che è pure un quanto infinito. Se però uniremo inſieme i due valori infiniti di a e di b ſervendoci delle loro eſpreſſioni generali, verremo a coſtituire un aggregato finito. In fatti

$$a+b=\frac{\beta\gamma y_0-(\beta+\gamma)y_1+y_2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}-\frac{\alpha\gamma y_0+(\alpha+\gamma)y_1-y_2}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)};$$ e riducendo le frazioni alla ſteſſa denominazione;

$$a+b=\frac{(\beta^2\gamma-\beta\gamma^2-\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2)y_0+(\alpha^2-\beta^2)y_1+(\beta-\alpha)y_2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)},$$ e dividendo la frazione per $\alpha-\beta$;

$$a+b=\frac{(\gamma^2-\alpha\gamma-\beta\gamma)y_0+(\alpha+\beta)y_1-y_2}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$$ eſpreſſione libera dagl' infiniti. Onde fatto $\beta=\alpha$, ſarà

$$a+b=\frac{(\gamma^2-2\alpha\gamma)y_0+2\alpha y_1-y_2}{(\alpha-\gamma)^2}.$$ Nel termine generale (B) verrà dunque dato il coefficiente di α^x e l' altro di $x\alpha^{x-1}$, che ſono quantità finite, riuſcendo infiniteſimi i coefficienti

ſuſſeguenti $bd\alpha^2$, $bd\alpha^3$ ecc. de' termini $\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}$, $\frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3}\alpha^{x-3}$ ecc. Traſcurati pertanto queſti termini come nulli, quando ſia $t=3$, e $\alpha=\beta$, colla ſoſtituzione de' trovati valori di $a+b$ e di $bd\alpha$, ſarà il termine generale della ricorrente $\left(\frac{(\gamma^2-2\alpha\gamma)y_0+2\alpha y_1-y_2}{(\alpha-\gamma)^2}\right)\alpha^x$ $+\left(\frac{\alpha\gamma y_0-(\alpha+\gamma)y_1+y_2}{\alpha-\gamma}\right)x\alpha^{x-1}+c\gamma^x$, ovvero, perchè $c=\frac{\alpha\beta y_0-(\alpha+\beta)y_1+y_2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$, cioè nel caſo noſtro $c=\frac{\alpha^2 y_0-2\alpha y_1+y_2}{(\gamma-\alpha)^2}$, diventa il ſuddetto termine generale, cioè $y_x=\left(\frac{\alpha^2 y_0-2\alpha y_1+y_2}{(\gamma-\alpha)^2}\right)\gamma^x+\left(\frac{\alpha\gamma y_0-(\alpha+\gamma)y_1+y_2}{\alpha-\gamma}\right)x\alpha^{x-1}$ $+\left(\frac{(\gamma^2-2\alpha\gamma)y_0+2\alpha y_1-y_2}{(\alpha-\gamma)^2}\right)\alpha^x$. All' ultimo coefficiente di α^x daremo la ſeguente forma equivalente $-\frac{\alpha\gamma y_0+(\alpha+\gamma)y_1-y_2}{(\alpha-\gamma)^2}$ $-\frac{\gamma y_0+y_1}{\alpha-\gamma}$, e per brevità chiamato $\frac{\alpha\gamma y_0-(\alpha+\gamma)y_1+y_2}{\alpha-\gamma}=A$, riſulterà il termine generale

$$y_x=\frac{(\alpha^2 y_0-2\alpha y_1+y_2)}{(\gamma-\alpha)^2}\gamma^x+Ax\alpha^{x-1}+\frac{(-\gamma y_0+y_1-A)}{\alpha-\gamma}\alpha^x.$$

12. Veggiamo ora ſe col metodo del §. 8 poſſiam trovare i coefficienti tutti de' termini. Poichè l' equazione in z

della noſtra ricorrente potrà veſtir queſta forma $(z-\alpha)^2 \times (z-\gamma)=0$, e l' ultimo termine del 1.° membro di queſta equazione è $-\alpha^2\gamma$, ad avere il coefficiente di γ^x inſegna il metodo che dobbiam dividere $-\alpha^2\gamma$ per $-\gamma$, e reſta di quoziente α^2 che è appunto il moltiplicatore di y_0 nel coefficiente di γ^x. Si differenzj adeſſo α^2 al ſolito modo, e avremo $\frac{2\alpha d\alpha}{d\alpha}=2\alpha$, che per l' alternativa de' ſegni preſo negativamente coſtituirà il moltiplicatore di y_1. Finalmente ſi differenzj 2α, onde naſca $\frac{2d\alpha}{d\alpha}=2$. Queſto quoziente deeſi dividere per 2 e riſulta 1, che preſo poſitivamente è appunto il moltiplicatore di y_2. Per aver poi il diviſore del coefficiente di γ^x vuole l' indicato metodo che ſi divida il primo membro dell' equazione in z pel fattor $z-\gamma$, e che nel quoziente ſi ponga γ in vece di z. Ciò facendo ſi ottiene $(\gamma-\alpha)^2$ che è eſattamente il denominatore del coefficiente di γ^x. Paſſiamo preſentemente al coefficiente A del termine $x\alpha^{x-1}$ e cerchiamo il moltiplicatore di y_0. Secondo la regola ſi dee dividere $-\alpha^2\gamma$ per $-\alpha$ che dà di quoziente $\alpha\gamma$; e queſta è la quantità che in A moltiplica y_0. Appreſſo colle differenziazioni ſi ha $\frac{\alpha d\gamma}{d\gamma}+\frac{\gamma d\alpha}{d\alpha}=D.\alpha\gamma=\alpha+\gamma$. Onde $-(\alpha+\gamma)$ debb' eſſere il moltiplicatore di y_1 come è effettivamente. Seguitando la differenziazione riſulta $D(\alpha+\gamma)=\frac{d\alpha}{d\alpha}+\frac{d\gamma}{d\gamma}=2$, e diviſo queſto riſultato per 2 naſce 1 di quoziente che è il moltiplicatore di y_2 nel coefficiente A. Per il denominatore preſcrive generalmente il §. 7 che dal primo membro dell' equazione in z ſi tolga quel fattore che contiene quella radice, alla quale ſpetta il coefficiente di cui s' indaga il valore, e ſi ponga nel quoziente la ſteſſa radice in vece dell' incognita z. Ciò che ottienſi dopo queſta operazione è preciſamente il denominatore ricercato. Ma ſe nel preſente caſo dell' equazione $(z-\alpha)^2(z-\gamma)=0$ ſi toglieſſe ſolo il binomio $z-\alpha$, reſterebbe $(z-\alpha)(z-\gamma)$, e in queſto quoziente poſto $z=\alpha$, avrebbeſi un riſultato nullo. Egli è dunque neceſſario, perchè non reſti zero di quoziente, dividere $(z-\alpha)^2(z-\gamma)$ pel prodotto di tutte le radici eguali, cioè al caſo per $(z-\alpha)^2$. Nel quoziente poi $z-\gamma$ ſoſtituito α in vece di z ſi avrà $\alpha-\gamma$, e queſto è il denominatore di A. Reſta l' ultimo coefficiente del termine α^x per cui biſogna trovar la regola. La difficoltà conſiſte ne' termini $-\gamma y_0+y_1$ ma per queſti ſteſſi la regola del §. 8 non vien meno. L' ultimo termine del 1.° membro dell' equazione in z che è $-\alpha^2\gamma$ ſi divida per $(-\alpha)(-\alpha)$ oſſia per α^2, e il quoziente $-\gamma$ è il fattore di y_0. Differenziando poi γ abbiamo $\frac{d\gamma}{d\gamma}=1$ che è il fattore di y_1. Il denominatore di queſt' ultimo coefficiente è lo ſteſſo che quello di A; onde colla ſola cognizione dell' ultimo termine del 1.° membro dell' equazione in z e colle differenziazioni preſcritte reſtan trovati tutti i coefficienti, e ſi ha in pronto il termine generale della noſtra ſerie.

13. L' ultimo termine del valore di y_x (§. 11) è

$$\frac{(-\gamma y_0+y_1-A)\alpha^x}{\alpha-\gamma},$$

eſſendo A il coefficiente del termine precedente $x\alpha^{x-1}$. Ora non è ben chiaro, ſe al caſo di due radici eguali, e di qualunque numero di radici diſuguali dopo aver trovato in queſto ultimo termine il coefficiente di y_0, y_1 ecc. debbaſi ſempre ſottrarre A ſemplicemente, o un qualche moltiplo di A. Ci darà ſu di ciò qualche lume la ricorrente che ha per termine generale $a\alpha^x+b\beta^x+c\gamma^x+d\delta^x$, in cui ſia $\alpha=\beta$. Fatto dunque $\beta=\alpha+d\alpha$ avremo $y_x=a\alpha^x+b(\alpha+d\alpha)^x+c\gamma^x+d\delta^x$, oſſia coll' uſo del canone $y_x=(a+b)\alpha^x$

$+bd\alpha x\alpha^{x-1}$

$+ bd\alpha x\alpha^{x-1} + c\gamma^x + d\delta^x$ che differiſce infinitamente poco da $a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + d\delta^x$. Si ponga in queſto ſucceſſivamente $x = 0$, $x - 1$, $x = 2$, $x = 3$, e riſultano le 4 ſeguenti equazioni $a + b + c + d = y_0$; $a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = y_1$; $a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 = y_2$; $a\alpha^3 + b\beta^3 + c\gamma^3 + d\delta^3 = y_3$, dalla riſoluzione delle quali ſi ricava

$$a = -\frac{\beta\gamma\delta y_0 + (\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)y_1 - (\beta + \gamma + \delta)y_2 + y_3}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)};$$

$$b = -\frac{\alpha\gamma\delta y_0 + (\alpha\gamma + \alpha\delta + \gamma\delta)y_1 - (\alpha + \gamma + \delta)y_2 + y_3}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)};$$

$$c = -\frac{\alpha\beta\delta y_0 + (\alpha\delta + \beta\delta + \alpha\beta)y_1 - (\alpha + \beta + \delta)y_2 + y_3}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta)}$$

$$d = -\frac{\alpha\beta\gamma y_0 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)y_1 - (\alpha + \beta + \gamma)y_2 + y_3}{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)}.$$

Perchè $\alpha = \beta$, qui pure a e b ſon due quantità infinite rimanendo finite c e d le quali anche ſi cangiano ne' valori ſeguenti;

$$c = -\frac{\alpha^2\delta y_0 + (\alpha^2 + 2\alpha\delta)y_1 - (2\alpha + \delta)y_2 + y_3}{(\gamma - \alpha)^2(\gamma - \delta)};$$

$$d = -\frac{\alpha^2\gamma y_0 + (\alpha^2 + 2\alpha\gamma)y_1 - (2\alpha + \gamma)y_2 + y_3}{(\delta - \alpha)^2(\delta - \gamma)}$$

Ridotte poi al medeſimo denominatore due quantità infinite a, b, e fattane la ſomma, avremo

$$a + b = \frac{\begin{array}{l}\big(\gamma\delta(\alpha^3 - \beta^3) - \gamma^2\delta(\alpha^2 - \beta^2) - \gamma\delta^2(\alpha^2 - \beta^2) + \gamma^2\delta^2(\alpha - \beta)\big)y_0 \\ - \big((\gamma + \delta)(\alpha^3 - \beta^3) - (\gamma^2 + \gamma\delta + \delta^2)(\alpha^2 - \beta^2)\big)y_1 + \big(\alpha^3 - \beta^3 - (\gamma^2 + \gamma\delta \\ + \delta^2)(\alpha - \beta)\big)y_2 - \big(\alpha^2 - \beta^2 - (\gamma + \delta)(\alpha - \beta)\big)y_3\end{array}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)};$$

e dividendo la frazione per $\alpha-\beta$, poi facendo nel quoziente $\alpha=\beta$;

$$a+b=\frac{(3\alpha^2\gamma\delta-2\alpha\gamma^2\delta-2\alpha\gamma\delta^2+\gamma^2\delta^2)y_0-(3\alpha^2\gamma+3\alpha^2\delta-2\alpha\gamma^2-2\alpha\gamma\delta-2\alpha\delta^2)y_1+(3\alpha^2-\gamma^2-\gamma\delta-\delta^2)y_2-(2\alpha-\gamma-\delta)y_3}{(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2}$$

che metteremo ſotto queſt' altra forma equivalente

$$a+b=\frac{\gamma\delta y_0-(\gamma+\delta)y_1+y_2-\overline{2\alpha-\gamma-\delta}\times\overline{-\alpha\gamma\delta y_0+(\alpha\gamma+\alpha\delta+\gamma\delta)y_1-(\alpha+\gamma+\delta)y_2+y_3:(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$

Finalmente nel valore di b poſto $d\alpha$ in vece di $\beta-\alpha$, e quindi fatto $\beta=\alpha$, ſarà

$$bd\alpha=-\frac{\alpha\gamma\delta y_0+(\alpha\gamma+\alpha\delta+\gamma\delta)y_1-(\alpha+\gamma+\delta)y_2+y_3}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}.$$

E però ſurrogando A in vece del valore di $bd\alpha$, naſcerà

$$a+b=\frac{\gamma\delta y_0-(\gamma+\delta)y_1+y_2-(2\alpha-\gamma-\delta)A}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$

e avremo

$$y_x=\frac{\left(-\alpha^2\delta y_0+(\alpha^2+2\alpha\delta)y_1-(2\alpha+\delta)y_2+y_3\right)\gamma^x}{(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\delta)}$$
$$+\frac{\left(-\alpha^2\gamma y_0+(\alpha^2+2\alpha\gamma)y_1-(2\alpha+\gamma)y_2+y_3\right)\delta^x}{(\delta-\alpha)^2(\delta-\gamma)}$$
$$+Ax\alpha^{x-1}+\frac{\left(\gamma\delta y_0-(\gamma+\delta)y_1+y_2-(2\alpha-\gamma-\delta)A\right)\alpha^x}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}.$$

14. Applichiamo anche a queſto eſempio la noſtra regola. L' equazione in z per la noſtra ſerie è $(z-\alpha)^2(z-\gamma)(z-\delta)=0$ e l' ultimo termine del 1°. membro è $\alpha^2\gamma\delta$. Onde per avere il coefficiente di y_0 nel numeratore di c divideremo $\alpha^2\gamma\delta$ per $-\gamma$ e riſulterà $-\alpha^2\delta$ come appunto ſi è ſopra trovato. Eſeguite poi le conſuete dif-

ſerenziazioni, ſarà $D.\alpha^2\delta = \alpha^2 + 2\alpha\delta$; $\frac{D(\alpha^2 + 2\alpha\delta)}{2} = 2\alpha + \delta$; $\frac{D(2\alpha + \delta)}{3} = 1$, i quai valori col riguardo dell' alternativa de' ſegni ſono i moltiplicatori di y_0, y_1, y_2, y_3, e coſtituiſcono il numeratore di c. Il ſuo denominatore poi ſi avrà levando da $(z - \alpha)^2(z - \gamma)(z - \delta)$ il binomio $z - \gamma$ e facendo nel quoto $(z - \alpha)^2(z - \delta)$ l' incognita $z = \gamma$; il che dà $(\gamma - \alpha)^2(\gamma - \delta)$, che è il denominatore ricercato. Con ſimile diſcorſo troveremo immantinente il valore di d che è ſimile affatto al valore di c. Quanto al valore di $bd\alpha$ oſſia di A coll' iſteſſo metodo ſi divida $\alpha^2\gamma\delta$ per $-\alpha$ e nel quoto $-\alpha\gamma\delta$ abbiamo il coefficiente di y_0 appartenente ad A. Inoltre $D.\alpha\gamma\delta = \alpha\gamma + \alpha\delta + \gamma\delta$; $\frac{D(\alpha\gamma + \alpha\delta + \gamma\delta)}{2} = \alpha + \gamma + \delta$; $\frac{D(\alpha + \gamma + \delta)}{3} = 1$ e queſti alternando i ſegni riſultano i coefficienti di y_0, y_1, y_2, y_3 nel numeratore di A. Dal prodotto $(z - \alpha)^2(z - \gamma)(z - \delta)$ ſi levi il fattore $(z - \alpha)^2$, e nel quoziente ſi faccia $z = \alpha$, onde naſca $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)$ che ſarà il denominatore di A. Reſta il valore di $a + b$ che determineremo così. Il prodotto $\alpha^2\gamma\delta$ dividaſi per $(-\alpha)(-\alpha)$ cioè per α^2, e avrem $\gamma\delta$ che ſarà il coefficiente di y_0 in $a + b$. Dunque, eſſendo $D.\gamma\delta = \gamma + \delta$, e $\frac{D.(\gamma + \delta)}{2} = 1$, ſarà $-(\gamma + \delta)$ il coefficiente di y_2, e 1 il coefficiente di y_2 nella prima parte del valore di $a + b$. L' altra parte è $-(2\alpha - \gamma - \delta)A$; e per trovare il coefficiente $2\alpha - \gamma - \delta$ queſta è la regola. Nel denominatore di A che è $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)$ ſi faccia variare la quantità α, e differenziando e dividendo i differenziali per $d\alpha$, avremo $(\alpha - \gamma)\frac{d\alpha}{d\alpha} + (\alpha - \delta)\frac{d\alpha}{d\alpha} = 2\alpha - \gamma - \delta$, che è preciſamente il moltiplicatore di $-A$. Così ſe nell' eſempio del §. 11 conſiderata α come variabile ſi foſſe differenziato $\alpha-\gamma$ che è il denominatore di A, ſi ſarebbe ottenuto $D.(\alpha-\gamma)=\frac{d\alpha}{d\alpha}=1$, che moltiplica $-A$ nella 2.ª parte del valore di $a+b$ che competeva a quella ſerie. E queſta regola varrà ſempre per determinare i coefficienti del termine generale di una ricorrente, nella quale ſi verifichi l' eguaglianza di due radici dell' equazione in z qualunque ſia il numero delle altre che ſon diſuguali, come apparirà a ciaſcuno che voglia farne la pruova.

15. Paſſo ora a conſiderare quelle ricorrenti, delle quali l' equazione in z ha tre radici eguali, e ſtabiliſco il termine generale della ſerie $y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + d\delta^x$, in cui ſia $\alpha=\beta=\gamma$. Riduco ad eſſere diſuguali queſte tre radici col fare che ciaſcuna di eſſe differiſca infinitamente poco dalla prima α, e pongo $\beta=\alpha+d\alpha$; $\gamma=\alpha+d\beta$, coſicchè il termine generale diventi $a\alpha^x+b(\alpha+d\alpha)^x+c(\alpha+d\beta)^x+d\delta^x$. Adoperando il canone, riſulta, prendendo in eſſo per ciaſcun binomio tre ſoli termini; $y_x = a\alpha^x + bx^x + bd\alpha x\alpha^{x-1}$

$$+bd\alpha^2\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}+c\alpha^x+cd\beta x\alpha^{x-1}+cd\beta^2\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}+d\delta^x,$$

oſſia $y_x=(a+b+c)\alpha^x+(bd\alpha+cd\beta)x\alpha^{x-1}$

$+(bd\alpha^2+cd\beta^2)\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}+d\delta^x$. Nel termine generale della prima forma $a\alpha^x+b\beta^x+c\gamma^x+d\delta^x$ ſi faccia ſucceſſivamente $x=0, 1, 2, 3$, e ſi eguaglino i riſultati ai primi 4 termini della data ſerie y_0, y_1, y_2, y_3. Dalle 4 equazioni cavati poi i quattro valori di a, b, c, d, naſce

$$a=-\frac{\beta\gamma\delta y_0+(\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)y_1-(\beta+\gamma+\delta)y_2+y_3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$

$$b=-\frac{\alpha\gamma\delta y_0+(\alpha\delta+\alpha\gamma+\gamma\delta)y_1-(\alpha+\gamma+\delta)y_2+y_3}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$$

$$c = -\frac{\alpha\beta\delta y_0 + (\alpha\beta + \alpha\delta + \beta\delta)y_1 - (\alpha + \beta + \delta)y_2 + y_3}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta)}$$

$$d = -\frac{\alpha\beta\gamma y_0 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)y_1 - (\alpha + \beta + \gamma)y_2 + y_3}{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)}.$$

I valori di a, b, c, perchè $\alpha = \beta = \gamma$, rieſcono infiniti di 2.° ordine, ma il valore dell' ultimo ſimbolo d è una quantità finita, perchè in eſſo neſſun fattore del denominatore ſi annulla. Perilchè in queſt' ultimo ſi potrà ſubito ſoſtituire α in vece di β e di γ, e ci ſi preſenterà

$$d = -\frac{\alpha^3 y_0 + 3\alpha^2 y_1 - 3\alpha y_2 + y_3}{(\delta - \alpha)^3}.$$

Ciò fatto uniremo inſieme i tre valori di a, b, c ed otterremo, che ſebbene ciaſcuno in particolare ſia un infinito di 2.° ordine, tutti e tre non facciano che una quantità finita. In fatti riducendo i tre valori ſuddetti allo ſteſſo denominatore e poi dividendo la frazione per $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$, ſi ha

$$a + b + c = \frac{(\alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta - \alpha\delta^2 - \beta\delta^2 - \gamma\delta^2 + \delta^3)y_0 - (\alpha\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma)y_1 + (\alpha + \beta + \gamma)y_2 - y_3}{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)},$$

che è una quantità finita. Quindi introdotto α in vece di β e di γ, ſarà

$$a + b + c = \frac{(-3\alpha^2\delta + 3\alpha\delta^2 - \delta^3)y_0 + 3\alpha^2 y_1 - 3\alpha y_2 + y_3}{(\alpha - \delta)^3}.$$

Ne' valori di b, c ſi ſoſtituiſca $\alpha + d\alpha$ in vece di β; e $\alpha + d\beta$ in vece di γ, e avremo, moltiplicando b per $d\alpha$, e c per $d\beta$;

$$b\,d\alpha = \frac{(-\alpha^2\delta - \alpha\delta\,d\beta)y_0 + \big(\alpha^2 + 2\alpha\delta + (\alpha + \delta)d\beta\big)y_1 - (2\alpha + \delta + d\beta)y_2 + y_3}{(d\alpha - d\beta)(\alpha - \delta + d\alpha)};$$

$$c\,d\beta = \frac{(\alpha^2\delta + \alpha\delta\,d\alpha)y_0 - \big(\alpha^2 + 2\alpha\delta + (\alpha + \delta)d\alpha\big)y_1 + (2\alpha + \delta + d\alpha)y_2 - y_3}{(d\alpha - d\beta)(\alpha - \delta + d\beta)}.$$

Di queſti due ultimi valori ſi faccia la ſomma, riducendoli prima alla ſteſſa denominazione. Fatta poſcia la diviſione per $dx - d\beta$, e traſcurati que' termini che riſpetto ad altri ſono infiniteſimi, ſi avrà

$$bdx + cd\beta = \frac{(2\alpha^2\delta - \alpha\delta^2)y_0 - (2\alpha^2 + 2\alpha\delta - \delta^2)y_1 + 3\alpha y_2 - y_3}{(\alpha - \delta)^2}.$$

Finalmente moltiplicando $bd\alpha$ per $d\alpha$, e $cd\beta$ per $d\beta$, avremo

$$bd\alpha^2 = \frac{(-\alpha^2\delta d\alpha - \alpha\delta d\alpha d\beta)y_0 + \big((\alpha^2 + 2\alpha\delta)d\alpha + (\alpha + \delta)d\alpha d\beta\big)y_1 - \big((2\alpha + \delta)d\alpha + d\alpha d\beta\big)y_2 + d\alpha y_3}{(d\alpha - d\beta)(\alpha - \delta + d\alpha)}$$

$$cd\beta^2 = \frac{(\alpha^2\delta d\beta + \alpha\delta d\alpha d\beta)y_0 - \big((\alpha^2 + 2\alpha\delta)d\beta + (\alpha + \delta)d\alpha d\beta\big)y_1 + \big((2\alpha + \delta)d\beta + d\alpha d\beta)y_2 - d\beta y_3}{(d\alpha - d\beta)(\alpha - \delta + d\beta)}$$

Deonſi queſti altri due valori ridurre allo ſteſſo denominatore, farne indi la ſomma, e dividere il riſultato per $(d\alpha - d\beta)(\alpha - \delta)$ dopo aver negligentati i termini infiniteſimi; e riſulta

$$bd\alpha^2 + cd\beta^2 = \frac{-\alpha^2\delta y_0 + (\alpha^2 + 2\alpha\delta)y_1 - (2\alpha + \delta)y_2 + y_3}{\alpha - \delta}.$$

Riprendiamo ora in mano il valore di $bd\alpha + cd\beta$ e preſentiamolo ſotto queſta forma equivalente;

$$bd\alpha + cd\beta = \frac{\alpha\delta y_0 - (\alpha + \delta)y_1 + y_2 - \big(-\alpha^2\delta y_0 + (\alpha^2 + 2\alpha\delta)y_1 - (2\alpha + \delta)y_2 + y_3\big) : \alpha - \delta}{\alpha - \delta}.$$

Dunque poſto $bd\alpha^2 + cd\beta^2 = A$, ſarà

$$bd\alpha + cd\beta = \frac{\alpha\delta y_0 - (\alpha + \delta)y_1 + y_2 - A}{\alpha - \delta}.$$

Parimente il valore di $a + b + c$ ſi può porre ſotto queſt' altra forma;

$$a + \tfrac{1}{2}b + c = \frac{-\delta y_0 + y_1 - \big((2\alpha^2\delta - \alpha\delta^2)y_0 - (2\alpha^2 + 2\alpha\delta - \delta^2)y_1 + 3\alpha y_2 - y_3\big) : (\alpha - \delta)^2}{\alpha - \delta}$$

$$= \frac{-\delta y_0 + y_1 - (bd\alpha + cd\beta)}{\alpha - \delta}$$; e però fatto $bd\alpha + cd\beta = A'$, ſarà

$$a + b + c = \frac{-\delta y_0 + y_1 - A'}{\alpha - \delta}$$. Si chiami queſto valore A'', e colle ſoſtituzioni avremo il termine generale della ſerie così eſpreſſo

$$y_x = -\frac{(-\alpha^3 y_0 + 3\alpha^2 y_1 - 3\alpha y_2 + y_3)\delta^x}{(\delta - \alpha)^3} + A''\alpha^x + A'x\alpha^{x-1} + \frac{Ax(x-1)\alpha^{x-2}}{2}$$, eſſendo

$$A = \frac{-\alpha^2\delta y_0 + (\alpha^2 + 2\alpha\delta)y_1 - (2\alpha + \delta)y_2 + y_3}{\alpha - \delta};$$

$$A' = \frac{\alpha\delta y_0 - (\alpha + \delta)y_1 + y_2 - A}{\alpha - \delta}; \quad A'' = \frac{-\delta y_0 + y_1 - A'}{\alpha - \delta}.$$ Ho ſuppoſto in queſto calcolo, che 3 ſoli ſiano i termini che ſi devon prender nel canone neutoniano a motivo che i ſuſſeguenti ſiano infiniteſimi. E realmente il 4.° darebbe

$$(bd\alpha^3 + cd\beta^3)\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\alpha^{x-3}$$; or ſiccome b, c non ſono che infiniti di 2.° ordine, diventa $bd\alpha^3 + cd\beta^3$ un infiniteſimo di ordine primo; e però il termine è traſcurabile, il che a maggior ragione deeſi dire de' ſuſſeguenti.

16. Queſto lungo e nojoſo calcolo reſta di molto abbreviato col mio metodo. Eccone il tipo. L' equazione in z per la noſtra ricorrente ha queſta forma $(z - \alpha)^3(z - \delta) = 0$, in cui l' ultimo termine del primo membro è $\alpha^3\delta$. Si divida $\alpha^3\delta$ per $-\delta$ e reſta $-\alpha^3$. Onde $D.\alpha^3 = 3\alpha^2$; $\frac{D.3\alpha^2}{2} = 3\alpha$; $\frac{D.3\alpha}{3} = 1$. In oltre $\frac{(z-\alpha)^3(z-\delta)}{z-\delta} = (z-\alpha)^3 = (\delta - \alpha)^3$ quando ſi pone $z = \delta$. Dunque coll' alternativa de' ſegni

$$d = \frac{-\alpha^3 y_0 + 3\alpha^2 y_1 - 3\alpha y_2 + y_3}{(\delta - \alpha)^3}$$. Cerco ora il valore di A; al

qual fine divido $\alpha^3\delta$ per $-\alpha$, e ho $-\alpha^2\delta$, e quindi $D.\alpha^2\delta = \alpha^2 + 2\alpha\delta$; $\frac{D(\alpha^2+2\alpha\delta)}{2} = 2\alpha + \delta$; $\frac{D(2\alpha+\delta)}{3} = 1$. Divido poi $(z-\alpha)^3(z-\delta)$ per $(z-\alpha)^3$, e nel quoziente $z-\delta$ faccio $z=\alpha$, e mi riſulta $\alpha-\delta$ che è il denominatore di A. Sicchè alternando i ſegni;

$$A = \frac{-\alpha^2\delta y_0 + (\alpha^2+2\alpha\delta)y_1 - (2\alpha+\delta)y_2 + y_3}{\alpha-\delta}.$$

Paſſo al valore di A' e divido $\alpha^3\delta$ per $(-\alpha)(-\alpha)$ e ho di quoziente $\alpha\delta$; e quindi $D.\alpha\delta = \alpha+\delta$; $\frac{D(\alpha+\delta)}{2} = 1$. Per avere il coefficiente di $-A$ nel valore di A', differenzio al modo ſolito il denominatore $\alpha-\delta$ ſupponendo che varj ſolo α, e ho 1 di riſultato. Dunque $A' = \frac{\alpha\delta y_0 - (\alpha+\delta)y_1 + y_2 - A}{\alpha-\delta}$. Da ultimo per rintracciare il valore di A'' faccio la diviſione di $\alpha^3\delta$ per $(-\alpha)(-\alpha)(-\alpha)$, e mi naſce il quoziente $-\delta$, che ſomminiſtra $D.\delta = 1$, eſſendo anche 1 il differenziale di $\alpha-\delta$ nell' ipoteſi di α variabile unicamente, cioè eſſendo 1 il moltiplicatore di $-A'$ in A''. Quindi $A'' = \frac{-\delta y_0 + y_1 - A'}{\alpha-\delta}$, con che ſon note tutte le parti del noſtro termine generale.

17. Sia il termine generale di una ricorrente $y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + d\delta^x + e\varepsilon^x$, e ſuppongaſi $\alpha=\beta=\gamma$. Onde fatto $\beta = \alpha + d\alpha$; $\gamma = \alpha + d\beta$, e preſi 3 ſoli termini nel canone neutoniano, perchè ſon 3 le radici eguali, riſulta il termine generale equivalente $y_x = (a+b+c)\alpha^x$

$$+ (bd\alpha + cd\beta)x\alpha^{x-1} + (bd\alpha^2 + cd\beta^2)\frac{x(z-1)\alpha^{x-2}}{2} + d\delta^x + e\varepsilon^x,$$

o, fatto per brevità $bd\alpha^2 + cd\beta^2 = A$; $bd\alpha + cd\beta = A'$; $a+b+c = A''$; $y_x = d\delta^x + e\varepsilon^x + A''\alpha^x + A'x\alpha^{x-1} + \frac{Ax(x-1)\alpha^{x-2}}{2}$.

I coefficienti d, e, A ſi hanno colla regola del §. 8. L'equazione in z della noſtra ſerie è $(z-\alpha)^3(z-\delta)(z-\varepsilon)=0$ e l' ultimo termine del primo membro ſi fa $-\alpha^3\delta\varepsilon$. Dunque $\frac{-\alpha^3\delta\varepsilon}{-\delta}=\alpha^3\varepsilon$; $D.\alpha^3\varepsilon=\alpha^3+3\alpha^2\varepsilon$; $\frac{D(\alpha^3+3\alpha^2\varepsilon)}{2}=3\alpha^2+3\alpha\varepsilon$; $\frac{D(3\alpha^2+3\alpha\varepsilon)}{3}=3\alpha+\varepsilon$; $\frac{D(3\alpha+\varepsilon)}{4}=1$. Di più $\frac{(z-\alpha)^3(z-\delta)(z-\varepsilon)}{z-\delta}=(z-\alpha)^3(z-\varepsilon)$. Dunque il diviſore è $(\delta-\alpha^3(\delta-\varepsilon)$, e però

$$d=\frac{\alpha^3 y_0-(\alpha^3+3\alpha^2\varepsilon)y_1+(3\alpha^2+3\alpha\varepsilon)y_2-(3\alpha+\varepsilon)y_3+y_4}{(\delta-\alpha)^3(\delta-\varepsilon)};$$ e

per la ſomiglianza delle funzioni;

$$e=\frac{\alpha^3\delta y_0-(\alpha^3+3\alpha^2\delta)y_1+(3\alpha^2+3\alpha\delta)y_2-(3\alpha+\delta)y_3+y_4}{(\varepsilon-\alpha)^3(\varepsilon-\delta)}.$$ In oltre colla ſteſſa regola ottienſi

$$A=\frac{\alpha^2\delta\varepsilon y_0-(\alpha^2\delta+\alpha^2\varepsilon+2\alpha\delta\varepsilon)y_1+(\alpha^2+2\alpha\delta+2\alpha\varepsilon+\delta\varepsilon)y_2-(2\alpha+\delta+\varepsilon)y_3+y_4}{(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)}.$$

Per aver poi A', A'', nella 2.ª forma del termine generale porremo ſucceſſivamente $x=0$, 1, 2, 3 onde naſcano le 4 equazioni; $A''+d+e=y_0$; $A''\alpha+A'+d\delta+e\varepsilon=y_1$; $A''\alpha^2+2A'\alpha+A+d\delta^2+e\varepsilon^2=y_2$; $A''\alpha^3+3A'\alpha^2+3A\alpha+d\delta^3+e\varepsilon^3=y_3$. Da queſte opportunamente maneggiate ſi ricaverà

$$A'=\frac{-\alpha\delta\varepsilon y_0+(\alpha\delta+\alpha\varepsilon+\delta\varepsilon)y_1-(\alpha+\delta+\varepsilon)y_2+y_3-A(2\alpha-\delta-\varepsilon)}{(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)};$$

$$A''=\frac{\delta\varepsilon y_0-(\delta+\varepsilon)y_1+y_2-A'(2\alpha-\delta-\varepsilon)-A}{(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)}.$$

18. Uſando il metodo ſempre praticato, quando ſiamo arrivati al coefficiente $\alpha^2\delta\varepsilon$ di y_0 nel valore di A troviam

toſto i coefficienti di y_0 ne' valori di A', A''. Per avere quel di A', baſta dividere $\alpha^2\delta\varepsilon$ per $-\alpha$, e il quoto $-\alpha\delta\varepsilon$ è il coefficiente di y_0 in A'. L' altro poi di A'' ſi ha dividendo quel di A' per $-\alpha$, onde naſce $\delta\varepsilon$ che moltiplica y_0 in A''. La coſtante regola delle differenziazioni ci farà poi conoſcere in A', A'' i coefficienti di y_1, y_2, y_3. Si noti che in A' oltre i termini delle y abbiamo ancora $-A(2\alpha-\delta-\varepsilon)$, e che A, A' hanno lo ſteſſo denominatore. Non ci vien però meno la regola per trovare queſto denominatore, perchè eſſendo il 1.° membro dell'equazione in z $(z-\alpha)^3(z-\delta)(z-\varepsilon)$, ſe ſi divide eſſo per $(z-\alpha)^3$ e nel quoziente ſi fa $z=\alpha$, abbiamo appunto il denominatore $(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)$ che appartiene ancora ad A''. Queſto differenziato colla ſuppoſizione che varj ſolo α e diviſo per $d\alpha$ eſibiſce $2\alpha-\delta-\varepsilon$ che è eſattamente il coefficiente di $-A$ nel valore di A'. Così nel valore di A'' eſſo moltiplica $-A'$, ma oltre il termine $-A'(2\alpha-\delta-\varepsilon)$ ci compariſce eziandio il nuovo termine $-A$ che nell' eſempio del §. 15. manca. Eſſo ha per coefficiente l' unità che potrebbe anch'eſſere ciò che riſulta dalla differenziazione del coefficiente di $-A'$, quando in eſſo varj ſolo α e reſti diviſo per $2d\alpha$, mentre
$D(2\alpha-\delta-\varepsilon)=\dfrac{2d\alpha}{2d\alpha}=1$; e ſe ciò foſſe, ſi vedrebbe il perchè nel precedente eſempio ſia ſvanito il termine di A. Imperocchè il valore di A'' in eſſo è $\dfrac{-\delta y_0+y_1-A'}{\alpha-\delta}$, dove l' unità è il coefficiente di $-A'$ il cui differenziale è zero, e quindi non può averſi alcun termine di A, per eſſer nullo il ſuo moltiplicatore. Se regga queſto diſcorſo, che è ſemplicemente congetturale, ce 'l farà paleſe un altro eſempio di ricorrente più alta a cui preſentemente ci rivolgiamo.

19. Venga dunque propoſto per termine generale di una ricorrente; $a\alpha^n+b\beta^n+c\gamma^n+d\delta^n+e\varepsilon^n+l\lambda^n$, e ſia $\alpha=\beta=\gamma$. Col metodo ſolito ſi trasformi eſſo nell' equiva-

lente $l\lambda^x + e\varepsilon^x + d\delta^x + \frac{Ax(x-1)\alpha^{x-2}}{2} + A'x\alpha^{x-1} + A''\alpha^x$, ove $A = bd\alpha^2 + cd\beta^2$; $A' = bd\alpha + cd\beta$; $A'' = a + b + c$. I valori di l, e, d, A ci vengon dati dall'ultimo termine $\alpha^3\delta\varepsilon\lambda$ del primo membro dell' equazione in z, riſpetto ai numeratori, e da $(z-\alpha)^3(z-\delta)(z-\varepsilon)(z-\lambda)$ riſpetto ai denominatori, ſe ſi oſſervano le regole preſcritte. I rimanenti valori poi di A', A'' ſi avranno col porre nel termine generale traſformato $x = 0, 1, 2, 3, 4$, e maneggiare le 5 equazioni che naſcono dal' confronto dei primi 5 termini della ſerie data in guiſa ſimile a quella che abbiamo uſato al §. 17. Con ciò ſi ottiene

$$l = \frac{-\alpha^3\delta\varepsilon y_0 + (3\alpha^2\delta\varepsilon + \alpha^3\delta + \alpha^3\varepsilon)y_1 - (\alpha^3 + 3\alpha^2\delta + 3\alpha^2\varepsilon + 3\alpha\delta\varepsilon)y_2 + (3\alpha^2 + 3\alpha\delta + 3\alpha\varepsilon + \delta\varepsilon)y_3 - (3\alpha + \delta + \varepsilon)y_4 + y_5}{(\lambda-\alpha)^3(\lambda-\delta)(\lambda-\varepsilon)}$$

$$e = \frac{-\alpha^3\delta\lambda y_0 + (3\alpha^2\delta\lambda + \alpha^3\delta + \alpha^3\lambda)y_1 - (\alpha^3 + 3\alpha^2\delta + 3\alpha^2\lambda + 3\alpha\delta\lambda)y_2 + (3\alpha^2 + 3\alpha\delta + 3\alpha\lambda + \delta\lambda)y_3 - (3\alpha + \delta + \lambda)y_4 + y_5}{(\varepsilon-\alpha)^3(\varepsilon-\delta)(\varepsilon-\lambda)}$$

$$d = \frac{-\alpha^3\varepsilon\lambda y_0 + (3\alpha^2\varepsilon\lambda + \alpha^3\varepsilon + \alpha^3\lambda)y_1 - (\alpha^3 + 3\alpha^2\varepsilon + 3\alpha^2\lambda + 3\alpha\varepsilon\lambda)y_2 + (3\alpha^2 + 3\alpha\varepsilon + 3\alpha\lambda + \varepsilon\lambda)y_3 - (3\alpha + \varepsilon + \lambda)y_4 + y_5}{(\delta-\alpha)^3(\delta-\varepsilon)(\delta-\lambda)}$$

$$A = \frac{-\alpha^2\delta\varepsilon\lambda y_0 + (\alpha^2\delta\varepsilon + \alpha^2\delta\lambda + \alpha^2\varepsilon\lambda + 2\alpha\delta\varepsilon\lambda)y_1 - (\alpha^2\delta + \alpha^2\varepsilon + \alpha^2\lambda + 2\alpha\delta\varepsilon + 2\alpha\delta\lambda + 2\alpha\varepsilon\lambda + \delta\varepsilon\lambda)y_2 + (\alpha^2 + 2\alpha\delta + 2\alpha\varepsilon + 2\alpha\lambda + \delta\varepsilon + \delta\lambda + \varepsilon\lambda)y_3 - (2\alpha + \delta + \varepsilon + \lambda)y_4 + y_5}{(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\lambda)}$$

$$A' = \frac{\alpha\delta\varepsilon\lambda y_0 - (\alpha\delta\varepsilon + \alpha\delta\lambda + \alpha\varepsilon\lambda + \delta\varepsilon\lambda)y_1 + (\alpha\delta + \alpha\varepsilon + \alpha\lambda + \delta\varepsilon + \delta\lambda + \varepsilon\lambda)y_2 - (\alpha + \delta + \varepsilon + \lambda)y_3 + y_4 - A(3\alpha^2 - 2\alpha\delta - 2\alpha\varepsilon - 2\alpha\lambda + \delta\varepsilon + \delta\lambda + \varepsilon\lambda)}{(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\lambda)}$$

$$A''=\frac{-\delta\varepsilon\lambda y_0+(\delta\varepsilon+\delta\lambda+\varepsilon\lambda)y_1-(\delta+\varepsilon+\lambda)y_2+y_3-A'(3\alpha^2-2\alpha\delta-2\alpha\varepsilon-2\alpha\lambda+\delta\varepsilon+\delta\lambda+\varepsilon\lambda)-A(3\alpha-\delta-\varepsilon-\lambda)}{(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\lambda)}.$$

In queſto valore di A'' è realmente

$$\frac{D(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\lambda)}{d\alpha}=3\alpha^2-2\alpha\delta-2\alpha\varepsilon-2\alpha\lambda+\delta\varepsilon+\delta\lambda+\varepsilon\lambda,$$

come porta la regola. Di più abbiamo

$$\frac{D(3\alpha^2-2\alpha\delta-2\alpha\varepsilon-2\alpha\lambda+\delta\varepsilon+\delta\lambda+\varepsilon\lambda)}{2d\alpha}=3\alpha-\delta-\varepsilon-\lambda,$$ che

è preciſamente il coefficiente di $-A$ in A'' come eraſi nell' antecedente §. conghietturato.

20. Un maggior numero di radici eguali nell' equazione in z non altera le noſtre regole. Se le radici eguali ſaran quattro, nel termine generale vi ſaran 4 termini appartenenti alle ſteſſe radici, e 4 in conſeguenza i coefficienti che lor competono, i quali chiameremo A, A', A'', A''' oſſervando l' ordine degli altri eſempj. Il coefficiente A ſi determina col metodo de' coefficienti delle radici diſuguali, avuto però il debito riguardo alla formazione del denominatore, che ſerve anche pei valori di A', A'', A'''. L' altro A' è tale, che oltre i termini proprj delle y avrà un termine in cui entra il precedente A. Così il terzo A'' ai termini delle y avrà due termini aggiunti, il primo de' quali contiene A', l' altro A. Finalmente il quarto A''' ſarà compoſto de' reſpettivi termini delle y, e di 3 altri termini, nel primo de' quali ſia A'', nel ſecondo A', nel terzo A. Queſto è ciò a cui ci guida l' analogia degli eſempj precedenti. Per aſſicurarcene maneggieremo un nuovo eſempio di ſerie ricorrente.

21. Abbiaſi una ſerie del termine generale $a\alpha^x+b\beta^x+c\gamma^x+d\delta^x+e\varepsilon^x+l\lambda^x+p\pi^x$, e vaglia l' ipoteſi $\alpha=\beta=\gamma=\delta$. Poichè 4 ſono le radici eguali, andran preſi i 4 primi termini del canone dopo eſſerſi fatto $\beta=\alpha+d\alpha$; $\gamma=\alpha+d\beta$; $\delta=\alpha+d\gamma$, e dopo avere alzato i binomj alla podeſtà x. Per tal modo avremo il termine generale trasformato

$$=p\pi^x+l\lambda^x+e\varepsilon^x+(bd\alpha^3+cd\beta^3+d\delta\gamma^3)\frac{x(x-1)(x-2)\alpha^{x-3}}{2\cdot3}$$

$+(bd\alpha^2+cd\beta^2+d\delta\gamma^2)\frac{x(x-1)\alpha^{x-2}}{2}+(bd\alpha+cd\beta+d\delta\gamma)x\alpha^{x-1}$ $+(a+b+c+d)\alpha^x$, ovvero, fatto uſo de' ſimboli majuſcoli pei termini che ſpettano alle potenze di α;

$$p\pi^x+l\lambda^x+e\varepsilon^x+\frac{Ax(x-1)(x-2)\alpha^{x-3}}{2.3}+\frac{A'x(x-1)\alpha^{x-2}}{2}$$

$+A''x\alpha^{x-1}+A'''\alpha^x$. Inveſtighiamo ora i valori de' coefficienti colla noſtra regola e a norma della congettura del §. 20. Eſſendo l' equazione in z della noſtra ſerie $(z-\alpha)^4(z-\varepsilon)(z-\lambda)(z-\pi)=0$, l' ultimo termine del primo membro ſi fa $-\alpha^4\varepsilon\lambda\pi$. Dunque

$$p=\frac{\begin{array}{l}\alpha^4\varepsilon\lambda y_0-(\alpha^4\varepsilon+\alpha^4\lambda+4\alpha^3\varepsilon\lambda)y_1+(\alpha^4+4\alpha^3\varepsilon+4\alpha^3\lambda+6\alpha^2\varepsilon\lambda)y_2-(4\alpha^3+6\alpha^2\varepsilon\\+6\alpha^2\lambda+4\alpha\varepsilon\lambda)y_3+(6\alpha^2+4\alpha\varepsilon+4\alpha\lambda+\varepsilon\lambda)y_4-(4\alpha+\varepsilon+\lambda)y_5+y_6\end{array}}{(\pi-\alpha)^4(\pi-\varepsilon)(\pi-\lambda)}$$

Cangiando poi λ in π, e π in λ ſi ha il valore di l. Così cangiando ε in π, e π in ε ſi ha il valore di e. Quanto al valore di A, eſſo riſulta

$$A=\frac{\begin{array}{l}\alpha^3\varepsilon\lambda\pi y_0-(\alpha^3\varepsilon\lambda+\alpha^3\varepsilon\pi+\alpha^3\lambda\pi+3\alpha^2\varepsilon\lambda\pi)y_1+(\alpha^3\varepsilon+\alpha^3\lambda+\alpha^3\pi+3\alpha^2\varepsilon\lambda\\+3\alpha^2\varepsilon\pi+3\alpha^2\lambda\pi+3\alpha\varepsilon\lambda\pi)y_2-(\alpha^3+3\alpha^2\varepsilon+3\alpha^2\lambda+3\alpha^2\pi+3\alpha\varepsilon\lambda+3\alpha\varepsilon\pi\\+3\alpha\lambda\pi+\varepsilon\lambda\pi)y_3+(3\alpha^2+3\alpha\varepsilon+3\alpha\lambda+3\alpha\pi+\varepsilon\lambda+\varepsilon\pi+\lambda\pi)y_4\\-(3\alpha+\varepsilon+\lambda+\pi)y_5+y_6\end{array}}{(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\lambda)(\alpha-\pi)}$$

E quindi

$$A'=\frac{\begin{array}{l}-\alpha^2\varepsilon\lambda\pi y_0+(\alpha^2\varepsilon\lambda+\alpha^2\varepsilon\pi+\alpha^2\lambda\pi+2\alpha\varepsilon\lambda\pi)y_1-(\alpha^2\varepsilon+\alpha^2\lambda+\alpha^2\pi+2\alpha\varepsilon\lambda+2\alpha\varepsilon\pi\\+2\alpha\lambda\pi+\varepsilon\lambda\pi)y_2+(\alpha^2+2\alpha\varepsilon+2\alpha\lambda+2\alpha\pi+\varepsilon\lambda+\varepsilon\pi+\lambda\pi)y_3-(2\alpha+\varepsilon+\lambda+\pi)y_4+y_5\\-A(3\alpha^2-2\alpha\varepsilon-2\alpha\pi+\varepsilon\lambda+\varepsilon\pi+\lambda\pi)\end{array}}{(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\lambda)(\alpha-\pi)}$$

$$A''=\frac{\begin{array}{l}\alpha\varepsilon\lambda\pi y_0-(\alpha\varepsilon\lambda+\alpha\varepsilon\pi+\alpha\lambda\pi+\varepsilon\lambda\pi)y_1+(\alpha\varepsilon+\alpha\lambda+\alpha\pi+\varepsilon\lambda+\varepsilon\pi+\lambda\pi)y_2-(\alpha+\varepsilon+\lambda\\+\pi)y_3+y_4-A'(3\alpha^2-2\alpha\varepsilon-2\alpha\lambda-2\alpha\pi+\varepsilon\lambda+\varepsilon\pi+\lambda\pi)-A(3\alpha-\varepsilon-\lambda-\pi)\end{array}}{(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\lambda)(\alpha-\pi)}$$

$$A''' = \frac{-\varepsilon\lambda\pi y_0 + (\varepsilon\lambda + \varepsilon\pi + \lambda\pi) y_1 - (\varepsilon + \lambda + \pi) y_2 + y_3 - A''(3\alpha^2 - 2\alpha\varepsilon - 2\alpha\lambda - 2\alpha\pi + \varepsilon\lambda + \varepsilon\pi + \lambda\pi) - A'(3\alpha - \varepsilon - \lambda - \pi) - A}{(\alpha - \varepsilon)(\alpha - \lambda)(\alpha - \pi)}$$

22. Se coll' ordinario metodo ponendo ſucceſſivamente $x = 0$, $x = 1$ ecc. ſino a $x = 6$ ſi formeranno 7 equazioni tra le modificazioni corriſpondenti del termine generale traſformato e i 7 primi termini della ricorrente y_0, y_1 ecc. indi trattandole colle regole algebraiche ſi cercheranno i valori de' coefficienti A, A', A'', A''', queſti ſi troveranno eguali a quelli che ci ha ſomminiſtrato il noſtro metodo. Avvertiremo ſoltanto, perchè non naſca equivoco, che nel valore di A''' l' ultimo termine del numeratore $-A$ è col coefficiente 1 perchè la differenziazione del coefficiente di $-A'$ facendo variar ſolo α, e poi diviſa per $3dx$ dà appunto l' unità. Non ſi potrà sbagliare nell' aſſegnare il valor numerico che divide la differenziazione, ſe ſi farà attenzione al numero delle majuſcole precedenti che ſono nel numeratore, che ſi computano inſiem con quella di cui ſi cerca il moltiplicatore. Nel valore di A''', il coefficiente di $-A''$ è il differenziale del denominator della formola, che deeſi dividere per $1.dx$ atteſochè innanzi A'' non v' è majuſcola alcuna. Il moltiplicatore di $-A'$ è il differenziale del moltiplicatore di $-A''$ diviſo per $2dx$, perchè innanzi A v' è A''. Finalmente il coefficiente di $-A$ è il differenziale del coefficiente di $-A'$ diviſo per $3d\alpha$ per ragione che avanti A ci ſono le 2 majuſcole A', A''. Simile diſcorſo faremo pei moltiplicatori delle majuſcole ne' valori di A'', A' e varrà la regola per tutte le ipoteſi di ſerie ricorrenti, che abbiano nella equazione di relazione qualſiſia numero di radici eguali.

23. Eſprimeremo in un' altra maniera i coefficienti del termine generale delle ricorrenti, la quale ci potrà eſſere di molto comodo per certe determinate ſerie; ma prima di tutto ci convien fare alcune rifleſſioni. Sia l' equazione in z, che è la ſcala di relazione della ricorrente, $z^2 + pz + q = 0$. Se ſupponiamo che queſta equazione naſca dal prodotto $(z - \gamma)(z - \delta) = 0$, ovvero $z^2 - (\gamma + \delta)z + \gamma\delta = 0$, ſarà col confronto $\gamma\delta = q$; $-(\gamma + \delta) = p$. Dunque, facendo va-

riar γ, δ e prendendo al ſolito modo le differenze parziali, avremo $D.\gamma\delta = D.q$, cioè $D.q = \gamma + \delta$, oſſia $D.q = -p$. In oltre, poichè $-(\gamma + \delta) = p$, ſarà $\frac{D(\gamma+\delta)}{2} = \frac{-D.p}{2}$. Ma $\frac{D(\gamma+\delta)}{2} = 1$. Dunque $\frac{D.p}{2} = -1$. Sia la data equazione in z la ſeguente $(z-\gamma)(z-\delta)(z-\varepsilon) = 0$, oſſia $z^3 - (\gamma+\delta+\varepsilon)z^2 + (\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon)z - \gamma\delta\varepsilon = 0$, la quale eſprimo in queſt' altro modo; $z^3 + pz^2 + qz + r = 0$, e ſi hanno le 3 equazioni $-\gamma\delta\varepsilon = r$; $\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon = q$; $-(\gamma+\delta+\varepsilon) = p$. Da queſte ſi deduce $D.\gamma\delta\varepsilon = -D.r$; $\frac{D(\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon)}{2} = \frac{D.q}{2}$; $\frac{D(\gamma+\delta+\varepsilon)}{3} = -\frac{D.p}{3}$; e ſiccome $D.\gamma\delta\varepsilon = \gamma\delta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon$, avremo $D.r = -q$; così eſſendo $\frac{D(\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon)}{2} = \gamma+\delta+\varepsilon$, e $\frac{D.(\gamma+\delta+\varepsilon)}{3} = 1$, ſarà $\frac{D.q}{2} = -p$, e $\frac{D.p}{3} = -1$. E' facile il vedere che queſta regola ha luogo di qualunque grado ſia l' equazione in z. Suppoſta pertanto la ſeguente generaliſſima $z^v + fz^{v-1} + gz^{v-2} + hz^{v-3} \ldots + qz^3 + rz^2 + tz + u = 0$, di cui le radici ſiano β, γ, δ ecc. di numero v, eſprimano b, c, d ecc. i coefficienti che nel termine generale moltiplicano β^x, γ^x, δ^x ecc., e ſi cerchi il valore di b. Per le coſe dette al §. 6. nel numeratore di b ſarà il coefficiente di $y_0 = \frac{u}{-\beta}$. Ora egli è coſa certiſſima, che eſſendo $z-\beta$ un fattore della ſuddetta equazione, ſe in eſſa pongo β in vece di z, il riſultato è nullo. Onde $\beta^v + f\beta^{v-1} + g\beta^{v-2} + h\beta^{v-3} \ldots + q\beta^3 + r\beta^2 + t\beta + u = 0$, e però

$$\frac{u}{-\beta} = \beta^{v-1} + f\beta^{v-2} + g\beta^{v-3} + h\beta^{v-4} \ldots + q\beta^2 + r\beta + t \ldots (C).$$

Queſt' omogeneo di comparazione ſarà dunque il moltiplicatore di y_0 nel numeratore di b, che per brevità denoteremo da qui innanzi col ſimbolo $N.b$, e così i numeratori di c, d ecc. verranno eſpreſſi da $N.c$, $N.d$ ecc. Per aver poi il coefficiente di y_1 in *N.b* ſi ſa che biſogna colla ſolita regola prendere le differenze parziali di (*C*) mutando il ſegno ne' termini che ſi producono. Il perchè differenziando colla ſempre praticata diviſione delle differenze, che per comodo ſi ommettono, ſi avrà $\frac{Du}{-\beta} = (v-1)\beta^{v-2} + \beta^{v-2}df + (v-2)f\beta^{v-3} + \beta^{v-3}dg + (v-3)g\beta^{v-4} + \beta^{v-4}dh + (v-4)h\beta^{v-5} \ldots + \beta^2 dq + 2q\beta + \beta dr + r + dt$. Ma per ciò che abbiam detto al principio di queſto §., diventa $df = -v$, $dg = -(v-1)f$; $dh = -(v-2)\,g$ ecc; $du = -t$; $dt = -2r$; $dr = -3q$ ecc. Dunque ſoſtituendo i valori di queſti differenziali ſarà $\frac{D.u}{-\beta} = (v-1)\beta^{v-2} - v\beta^{v-2} + (v-2)f\beta^{v-3} - (v-1)f\beta^{v-3} + (v-3)g\beta^{v-4} - (v-2)g\beta^{v-4} + (v-4)h\beta^{v-5} - (v-3)h\beta^{v-5} \ldots\ldots + 2q\beta - 3q\beta + r - 2r$, cioè dopo la riduzione; $\frac{D.u}{-\beta} = -\beta^{v-2} - f\beta^{v-3} - g\beta^{v-4} - h\beta^{v-5} \ldots - q\beta - r$. Quindi per la legge dell' alternativa de' ſegni ſarà il moltiplicatore di $y_1 = \beta^{v-2} + f\beta^{v-3} + g\beta^{v-4} + h\beta^{v-5} \ldots + q\beta + r \ldots (D)$.

Si paſſi a inveſtigare il differenziale di queſto 2.° coefficiente che ci darà l' altro di y_2, e avremo $D(D) = (v-2)\beta^{v-3} + \beta^{v-3}df + (v-3)f\beta^{v-4} + \beta^{v-4}dg + (v-4)g\beta^{v-5} + \beta^{v-5}dh + (v-5)h\beta^{v-6} \ldots\ldots + \beta dq + q + dr$. Sicchè ſoſtituendo i valori di *df*, *dg* ecc., cangiando i ſegni e dividendo per 2 come vuol la regola, ritroveremo il coefficiente di $y_2 = \beta^{v-3} + f\beta^{v-4} + g\beta^{v-5} + h\beta^{v-6} \ldots + p\beta + q$. Così il coefficiente di y_3 diventa $\beta^{v-4} + f\beta^{v-5} + g\beta^{v-6} + h\beta^{v-7} \ldots\ldots + p$; e rieſce chiaro, che dato il coefficiente primo di y_0, levando da queſto l' ultimo termine e dividendo gli altri per β, naſcerà il coefficiente di y_1, medeſimamente levato da queſto ſecondo l' ultimo termine e dividendo gli altri per β, avremo il coefficiente di y_2; e nella ſteſſa guiſa diremo dei ſuſſeguenti coſicchè ſarà

N.b =

$$N.b = (\beta^{v-1} + f\beta^{v-2} + g\beta^{v-3} \ldots\ldots + p\beta^3 + q\beta^2 + r\beta + t)y_0$$
$$+ (\beta^{v-2} + f\beta^{v-3} + g\beta^{v-4} \ldots\ldots + p\beta^2 + q\beta + r)y_1$$
$$+ (\beta^{v-3} + f\beta^{v-4} + g\beta^{v-5} \ldots\ldots + p\beta + q)y_2$$
$$+ (\beta^{v-4} + f\beta^{v-5} + g\beta^{v-6} \ldots + p)y_3 \ldots + (\beta + f)y_{v-2} + y_{v-1}\,.$$

24. Eſſendo ſimile il raziocinio ed il calcolo pel rintracciamento de' numeratori di c, d ecc. che appartengono alle radici potenziate γ^x, δ^x ecc., per avere $N.c$ non ſi avrà da far altro che cangiare nella precedente formola β in γ; e così β in δ ove ſi voglia $N.d$, ecc. Anzi ſe ſupporremo che alcune di queſte radici diventino tra loro eguali, e ſia ciaſcuna di eſſe $= \alpha$, poichè chiamato m il numero di queſte radici eguali, abbiamo in y_x l' ultimo termine ſpettante ad $\alpha = \dfrac{Ax(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-(m-2))\alpha^{x-(m-1)}}{1.2.3\ldots\ldots(m-1)}$, e ſi è veduto ne' ſuperiori §§., che in $N.A$ il coefficiente di y_0, ſuppoſto u l' ultimo termine dell' equazione in z, è $\dfrac{u}{-\alpha}$, eſpreſſione affatto ſimile alle altre $\dfrac{u}{-\beta}$, $\dfrac{u}{-\gamma}$ ecc., ſi fa evidente, che ſarà pure

$$N.A = \alpha^{v-1} + f\alpha^{v-2} + g\alpha^{v-3} + h\alpha^{v-4} \ldots + p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + t)y_0$$
$$+ (\alpha^{v-2} + f\alpha^{v-3} + g\alpha^{v-4} + h\alpha^{v-5} \ldots p\alpha^2 + q\alpha + r)y_1$$
$$+ (\alpha^{v-3} + f\alpha^{v-4} + g\alpha^{v-5} + h\alpha^{v-6} \ldots + p\alpha + q)y_2$$
$$+ (\alpha^{v-4} + f\alpha^{v-5} + g\alpha^{v-6} + h\alpha^{v-7} \ldots\ldots + p)y_3 \ldots\ldots$$
$$+ (\alpha + f)y_{v-2} + y_{v-1} \ldots\ldots (D)\,.$$

25. Al ritrovamento dei denominatori di b, c, d ecc. ſervirà queſto

LEMMA

Sia la formola generale $z^v + fz^{v-1} + gz^{v-2} + hz^{v-3} \ldots + qz^3 + rz^2 + tz + u$, le cui radici ſiano β, γ, δ ecc. di numero v. Dico che ſe dividerò la ſormola per $z-\beta$, e poi nel quoziente porrò β in vece di z, riſulterà $v\beta^{v-1}+(v-1)f\beta^{v-2}+(v-2)g\beta^{v-3}+(v-3)h\beta^{v-4}\ldots\ldots+3q\beta^2+2r\beta+t$. Cangiando poi β in γ, δ ecc. avrò i quozienti che naſcono dividendo la formola per $z-\gamma$, $z-\delta$ ecc.

Per dimoſtrar queſto, dobbiam fare l' attual diviſione della propoſta formola per $z-\beta$, e naſce di quoziente $z^{v-2}+(\beta+f)z^{v-2}+(\beta^2+\beta f+g)z^{v-3}+(\beta^3+\beta^2 f+\beta g+h)z^{v-4}\ldots$

$+\beta^{v-2}+f\beta^{v-2}+g\beta^{v-3}+h\beta^{v-4}\ldots\ldots+q\beta^2+r\beta+t$, perchè l' ultimo reſiduo $\beta^v+f\beta^{v-1}+g\beta^{v-2}+h\beta^{v-3}\ldots+t\beta+u$ debb' eſſer nullo atteſo che ſi è poſto $z-\beta$ un diviſore eſatto della formola ſtabilita. Soſtituiamo ora nel quoziente β in vece di z, e ſarà facile il vedere che eſſo ſi tramuta in un altro, in cui abbiamo v termini β^{v-1}, indi $v-1$ termini $f\beta^{v-2}$, e così $v-2$ termini $g\beta^{v-3}$ ecc. ſino agli ultimi $3q\beta^2+2r\beta+t$. Dunque $\dfrac{z^v+fz^{v-1}\ldots+tz+u}{z-\beta}$ $=v\beta^{v-1}+(v-1)f\beta^{v-2}+(v-2)g\beta^{v-3}+(v-3)h\beta^{v-4}\ldots+3q\beta^2+2r\beta+t\ldots\ldots(E)$, quando nel quoto ſi ponga β in vece di z. Cangiato poi β in γ, δ ecc., l' eſpreſſione (E) diventerà il quoziente della ſormola diviſa per $z-\gamma$, $z-\delta$ ecc., ove in eſſo ſi metta γ, δ ecc. in vece di z.

26. Abbianſi nella ſormola z^v+fz^{v-1} ecc. più fattori eguali $z-\alpha$. Se la dividiam per un d' eſſi, e poi nel quoto ſurroghiamo α a z, è chiaro che ſarà $\dfrac{z^v+fz^{v-1}\text{ ecc.}}{z-\alpha}$ $=v\alpha^{v-1}+(v-1)f\alpha^{v-2}+(v-2)g\alpha^{v-3}\ldots+3q\alpha^2+2r\alpha+t$. Ora coſa diventerà il quoziente, ſe ſi divida la formola pel prodotto di due fattori eguali cioè per $(z-\alpha)^2$, e ſi ſoſtituiſca poi in eſſo α in cambio di z? La formola diviſa per $z-\alpha$ per l' antecedente §. deve dare $z^{v-1}+(\alpha+f)z^{v-2}+(\alpha^2+\alpha f+g)z^{v-3}+(\alpha^3+\alpha^2 f+\alpha g+h)z^{v-4}\ldots\ldots+\alpha^{v-1}+f\alpha^{v-2}+g\alpha^{v-3}+h\alpha^{v-4}\ldots+q\alpha^2+r\alpha+t$. Queſta dunque ſi dee tornare a dividere per $z-\alpha$, e naſce di quoziente $z^{v-2}+(2\alpha+f)z^{v-3}+(3\alpha^2+2\alpha f+g)z^{v-4}+(4\alpha^3+3\alpha^2 f$

$+2\alpha g+h)z^{v-5}\ldots+(v-1)\alpha^{v-2}+(v-2)f\alpha^{v-3}$

$+(v-3)g\alpha^{v-4}\dots+2q\alpha+r$. Fatto quindi $z=\alpha$, avremo $(1+2+3+4\dots+v-1)\alpha^{v-2}+(1+2+3\dots+v-2)f\alpha^{v-3}$ $+(1+2+3\dots+v-3)g\alpha^{v-4}\dots+3q\alpha+r$, ovvero

$$\frac{z^v+fz^{v-1}\text{ ecc.}}{(z-\alpha)^2}=\frac{v(v-1)\alpha^{v-2}}{2}+\frac{(v-1)(v-2)f\alpha^{v-3}}{2}$$

$$+\frac{(v-2)(v-3)g\alpha^{v-4}}{2}\dots+3q\alpha+r.$$

Così ſe ſi vorrà ſapere coſa riſulti quando ſi divida la formola per $(z-\alpha)^3$, e ſi faccia poi $z=\alpha$, con ſimile raziocinio ſi troverà

$$\frac{z^v+fz^{v-1}\text{ ecc.}}{(z-\alpha)^3}=\frac{v(v-1)(v-2)\alpha^{v-3}}{2.3}$$

$$+\frac{(v-1)(v-2)(v-3)f\alpha^{v-4}}{2.3}$$

$$+\frac{(v-2)(v-3)(v-4)g\alpha^{\alpha v-5}}{2.3}\dots+q;$$

e quindi in genere ſi potrà ſtabilire la verità di queſta equazione;

$$\frac{z^v+fz^{v-1}\text{ ecc.}}{(z-\alpha)^m}=\frac{v(v-1)(v-2)\dots\big(v-(m-1)\big)\alpha^{v-m}}{1.2.3\dots.m}$$

$$+\frac{(v-1)(v-2)(v-3)\dots(v-m)f\alpha^{v-(m+1)}}{1.2.3\dots.m}$$

$$+\frac{(v-2)(v-3)(v-4)\dots.\big(v-(m+1)\big)g\alpha^{v-(m+2)}}{1.2.3\dots.m}\text{ ecc.}\dots(F)$$

ſino al termine in cui α non ha più alcuna dimenſione.

27. I due ultimi §§. ci ſomminiſtrano i valori de' denominatori non ſolo di b, c, d ecc. che appartengono alle radici diſuguali β, γ, δ ecc. ma ancora di A, A', $A''\dots A^{m-1}$ che corriſpondono alle diverſe podeſtà di α nel termine generale della ricorrente, la cui equazione in z ha numero m di radici α eguali. Reſta che ſi trovino gl' interi numeratori di A', $A''\dots.A^{m-1}$, che in y_x moltiplicano

$$\frac{x(x-1)(x-2)\dots.\big(x-(m-3)\big)x^{x-(m-2)}}{1.2.3\dots(m-2)};$$

$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(m-4))\alpha^{x-(m-3)}}{1.2.3\ldots\ldots(m-3)}$ ecc. ſino al termine α^x, per la qual coſa adopreremo sì fattamente. L' equazione in z della ricorrente di grado v è, come ſopra, $(G)\ldots\ldots z^v + fz^{v-1} + gz^{v-2} + hz^{v-3} \ldots + pz^4 + qz^3 + rz^2 + tz + u = 0$, nella quale poſte radici eguali α di num.° m, diventa $v-m$ il num.° delle altre radici. Dunque in eſſa fatto $z = \alpha$ il riſultato ſarà zero, e avremo $\alpha^v + f\alpha^{v-1} + g\alpha^{v-2} \ldots + p\alpha^4 + q\alpha^3 + r\alpha^2 + t\alpha = -u$; onde

$$(H)\ldots\ldots \frac{u}{-\alpha} = \alpha^{v-1} + f\alpha^{v-2} + g\alpha^{v-3} \ldots + p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + t,$$

che è il coefficiente di y_0 in A come ſi è veduto al §. 24. In oltre, poichè nell' equazione (G) vi ſono m radici eguali α, per la regola di *Huddens*, moltiplicati i termini ſucceſſivi per la ſerie aritmetica v, $v-1$, $v-2$ ecc., il riſultato ſarà pure eguale a zero, e in eſſo vi ſaranno radici eguali α di num.° $m-1$. Con tale moltiplicazione riſulta $vz^v + (v-1)fz^{v-1} + (v-2)gz^{v-2} \ldots + 4pz^4 + 3qz^3 + 2rz^2 + tz = 0$. Onde dividendo l' equazione per z e poi cangiando z in α, avraſſi $v\alpha^{v-1} + (v-1)f\alpha^{v-2} + (v-2)g\alpha^{v-3} \ldots + 4p\alpha^3 + 3q\alpha^2 + 2r\alpha + t = 0$, con che reſta dato per gli altri ſimboli il valore di t. Queſto valore ſi ſoſtituiſca in (H), e ci naſcerà

$$\frac{u}{-\alpha} = -(v-1)\alpha^{v-1} - (v-2)f\alpha^{v-2} - (v-3)g\alpha^{v-3} \ldots\ldots - 3p\alpha^3 - 2q\alpha^2 - r\alpha;$$

ſicchè dividendo per $-\alpha$;

$$(I)\ldots\ldots \frac{u}{(-\alpha)^2} = (v-1)\alpha^{v-2} + (v-2)f\alpha^{v-3} + (v-3)g\alpha^{v-4} \ldots + 3p\alpha^2 + 2q\alpha + r,$$

che, come ſi ſa, è il coefficiente di y_0 in A'.

28. La equazione $vz^v + (v-1)fz^{v-1} \ldots + tz = 0$ diviſa per z dà queſt' altra $vz^{v-1} + (v-1)fz^{v-2} + (v-2)gz^{v-3} \ldots + 4pz^3 + 3qz^2 + 2rz + t = 0$, la quale contenendo $m-1$ radici eguali α potrà eſſere termine per termine moltiplicata dalla ſerie aritmetica de' riſpettivi eſponenti, e quel che riſulta ſarà parimente zero. Fatto dunque queſto, poi diviſo ogni coſa per $2z$ indi cangiando z in α,

ſi avrà $\frac{v(v-1)\alpha^{v-2}}{2} + \frac{(v-1)(v-2)f\alpha^{v-3}}{2} \ldots + 6px^2 + 3qx + r = 0$. Si ponga nell' equazione (I) il valore di r dato da queſta equazione, e dopo le riduzioni e la diviſione dell' equazione per $-\alpha$, ottienſi

$$\frac{u}{(-\alpha)^3} = \frac{(v-1)(v-2)\alpha^{v-3}}{2} + \frac{(v-2)(v-3)f\alpha^{v-4}}{2}$$

$$+ \frac{(v-3)(v-4)g\alpha^{v-5}}{2} \ldots + 3p\alpha + q,$$

la quale eſpreſſione è il coefficiente di y_0 in A''. Con ſimile operazione ſi troverà

$$\frac{u}{(-\alpha)^4} = \frac{(v-1)(v-2)(v-3)\alpha^{v-4}}{2.3}$$

$$+ \frac{(v-2)(v-3)(v-4)f\alpha^{v-5}}{2.3} \ldots + p;$$

eſſendo queſto il coefficiente di y_0 in A'''. Laonde generalmente il coefficiente di y_0 in A^{m-1} che è l' ultimo di quelli che appartengono alla radice α e moltiplica α^v viene eſpreſſo dalla ſeguente equazione

$$(L) \ldots \frac{u}{(-\alpha)^m} = \frac{(v-1)(v-2)(v-3)\ldots\big(v-(m-1)\big)\alpha^{v-m}}{1.2.3\ldots.(m-1)}$$

$$+ \frac{(v-2)(v-3)(v-4)\ldots(v-m)f\alpha^{v-(m+1)}}{1.2.3\ldots.(m-1)}$$

$$+ \frac{(v-3)(v-4)(v-5)\ldots\big(v-(m+1)\big)g\alpha^{v-(m+2)}}{1.2.3\ldots.(m-1)} \text{ ecc.}$$

fino a quel termine che ha per coefficiente numerico l' unità poſitiva.

29. Conoſciuto il moltiplicatore di y_0 in A^{m-1} che è il termine generale delle A, ſi renderà noto quello di y_1 che naſce dal differenziare nel modo conſueto il valore di $\frac{u}{(-\alpha)^m}$ cambiando poi i ſegni. Intraprendaſi pertanto queſta differenziazione, e ſarà

$$\frac{Du}{(-\alpha)^m} = \frac{(v-1)(v-2)(v-3)\ldots(v-m)\alpha^{v-(m+1)}}{1.2.3\ldots.(m-1)}$$

$$+\frac{(v-2)(v-3)(v-4)\ldots.(v-m)\alpha df^{v-(m+1)}}{1.2.3\ldots.(m-1)}$$

$$+\frac{(v-2)(v-3)\ldots\big(v-(m+1)\big)f\alpha^{v-(m+2)}}{1.2.3\ldots.(m-1)}$$

$$+\frac{(v-3)(v-4)\ldots.\big(v-(m+1)\big)\alpha^{v-(m+2)}dg}{1.2.3\ldots.(m-1)}$$

$$+\frac{(v-3)(v-4)\ldots.\big(v-(m+2)\big)g\alpha^{v-(m+3)}}{1.2.3\ldots.(m-1)}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)\ldots.\big(v-(m+2)\big)\alpha^{v-(m+3)}dh}{1.2.3\ldots.(m-1)}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)\ldots..\big(v-(m+3)\big)h\alpha^{v-(m+4)}}{1.2.3\ldots.(m-1)} + \text{ecc.}$$

E poſto $-v$, $-(v-1)f$, $-(v-2)g$ ecc. in vece di df, dg, dh ecc. dopo la riduzione degli omogenei allo ſteſſo denominatore, e il cangiamento de' ſegni, riſulterà il ſuddetto moltiplicatore di y_1, oſſia

$$\frac{Du}{(-\alpha)^m} = \frac{(v-2)(v-3)\ldots.(v-m)\alpha^{v-(m+1)}}{1.2.3\ldots.(m-1)}$$

$$+\frac{(v-3)(v-4)\ldots.\big(v-(m+1)\big)f\alpha^{v-(m+2)}}{1.2.3\ldots.(m-1)}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)\ldots.\big(v-(m+2)\big)g\alpha^{v-(m+3)}}{1.2.3\ldots.(m-1)}$$

$$+\frac{(v-5)(v-6)\ldots.\big(v(m+3)\big)h\alpha^{v-(m+4)}}{1.2.3\ldots.(m-1)} + \text{ecc.}\ldots.(M).$$

Queſto coefficiente dall' altro di y_0 (L) ſi può cavare in queſta maniera. Si ommetta il 1.° termine che moltiplica α^{v-m}, nel 2.° ſi ſoſtituiſca 1 in vece di f, nel 3.° ſi metta f in vece di g, nel 4.° g in vece di h, e così di mano in mano finchè ſi arriva all' ultimo termine, che non ha altro coefficiente fuorchè l' unità.

30. Ad avere il moltiplicatore di y_2 converrà differenziare l' equazione (M), dividere per 2 i termini che naſcono e cangiare i ſegni. Eccone il calcolo;

$$\frac{D.D\frac{u}{(-\alpha)^m}}{2}=\frac{(v-2)(v-3)\ldots\big(v-(m+1)\big)x^{v-(m+2)}}{2.1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-3)(v-4)\ldots\big(v-(m+1)\big)x^{v-(m+2)}df}{2.1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-3)(v-4)\ldots\big(v-(m+2)\big)f\alpha^{v-(m+3)}}{2.1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)\ldots\big(v-(m+2)\big)\alpha^{v-(m+3)}dg}{2.1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)\ldots\big(v-(m+3)\big)g\alpha^{v-(m+4)}}{2.1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-5)(v-6)\ldots\big(v-(m+3)\big)x^{v-(m+4)}dh}{2.1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-5)(v-6)\ldots\big(v-(m+4)\big)h\alpha^{v-(m+5)}}{2.1.2.3\ldots(m-1)}$$ ecc. Colla ſoſtituzione de' valori delle differenze df, dg, dh ecc. e colla riduzione degli omogenei dopo il cangiamento de' ſegni ſi ottiene

$$\frac{D.D\frac{u}{(-\alpha)^m}}{2}=\frac{(v-3)(v-4)\ldots\big(v-(m+1)\big)\alpha^{v-(m+2)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)\ldots\big(v-(m+2)\big)f\alpha^{v-(m+3)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-5)(v-6)\ldots\big(v-(m+3)\big)gx^{v-(m+4)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$+\frac{(v-6)(v-7)\ldots\left(v-(m+4)\right)h\alpha^{v-(m+5)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$ ecc. Queſto è il coefficiente di y_2 il quale dall' altro di y_1 ſi può dedurre così. Si preſcinda in (M) dal primo termine. Nel 2.° ſi metta 1 in vece di f, nel 3.° f in vece di g, nel 4.° g in vece di h ecc. appunto come s'è fatto in (L) per trovar (M), e ſi avrà l' intento. Onde per la ſomiglianza del calcolo, potremo ſtabilir ſenz' altro che ſia il moltiplicatore di y_3, ovvero

$$\frac{D.D.D\,\frac{u}{(-\alpha)^m}}{2.3}=\frac{(v-4)(v-5)\ldots\left(v-(m+2)\right)\alpha^{v-(m+3)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$+\frac{(v-5)(v-6)\ldots\left(v-(m+3)\right)f\alpha^{v-(m+4)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$ ecc., e così ſi dica de' ſuſſeguenti ſino al termine y_{v-m} che ha ſolo 1 di moltiplicatore.

31. Stando dunque ſul generale, ſiccome il numeratore di A^{m-1} ha due parti, la prima compoſta de' termini ne' quali entrano y_0, y_1, y_2 ecc., la ſeconda de' termini ne' quali entrano A^{m-2}, A^{m-3} ecc., come s' è veduto negli eſempj precedenti, reſpettivamente ai termini delle y ſarà la prima parte di queſto numeratore eguale all' eſpreſſione ſeguente;

$$(N)\ \frac{\ldots.1}{1.2.3\ldots(m-1)}\Big(\big((v-1)(v-2)\ldots\left(v-(m-1)\right)\alpha^{v-m}$$

$$+(v-2)(v-3)\ldots(v-m)f\alpha^{v-(m+1)}+\text{ecc.}\big)y_0$$

$$+\big((v-2)(v-3)\ldots(v-m)\alpha^{v-(m+1)}$$

$$+(v-3)(v-4)\ldots\left(v-(m+1)\right)f\alpha^{v-(m+2)}+\text{ecc.}\big)y_1$$

$$+(v-3)(v-4)\ldots\left(v-(m+1)\right)\alpha^{v-(m+2)}$$

$$+(v-4)(v-5)\ldots\big((v-m+2)f\alpha^{v-(m+3)}+\text{ecc.}\big)y_2+\ldots+y_{v-m}\Big)$$

32. Serviamoci preſentemente delle abbreviazioni del Sig.

la Grange

la Grange (§. 3). Facciaſi l' eſpreſſione generale dell' equazione in z, cioè

$$z^{v} + fz^{v-1} + gz^{v-2} + hz^{v-3} \ldots + qz^{3} + rz^{2} + tz + u = 0 = P$$

$$z^{v-1} + fz^{v-2} + gz^{v-3} + hz^{v-4} \ldots + qz^{2} + rz + t = Q$$

$$z^{v-2} + fz^{v-3} + gz^{v-4} + hz^{v-5} \ldots + qz + r = R$$

$$z^{v-3} + fz^{v-4} + gz^{v-5} + hz^{v-6} \ldots + q = S$$

ecc.

e ſupponiamo che in P vi ſiano radici eguali α di num.° m eſſendo le altre β, γ, δ ecc. di num.° $v-m$. Sarà il termine generale y_x della ricorrente che corriſponde alla formola P, come ſegue

$$y_x = b\beta + c\gamma^{x} + d\delta^{x} + \text{ecc.} + \frac{Ax(x-1)(x-2)\ldots\big(x-(m-2)\big)\alpha^{x-(m-1)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+ \frac{A'x(x-1)(x-2)\ldots\big(x-(m-3)\big)\alpha^{x-(m-2)}}{1.2.3\ldots(m-2)}$$

$$+ \frac{A''x(x-1)(x-2)\ldots\big(x-(m-4)\big)\alpha^{x-(m-3)}}{1.2.3\ldots(m-3)} + \ldots + A^{m-1}\alpha^{x}$$

Ora dalle premeſſe equazioni col far z variabile ſi trae pigliando le differenze

$$\frac{dP}{dz} = vz^{v-2} + (v-1)fz^{v-2} + (v-2)gz^{v-3} + (v-3)hz^{v-4} \ldots$$
$$+ 3qz^{2} + 2rz + t$$

$$\frac{d^{2}P}{2dz^{2}} = \frac{v(v-1)z^{v-2}}{2} + \frac{(v-1)(v-2)fz^{v-3}}{2} + \frac{(v-2)(v-3)gz^{v-4}}{2}$$
$$+ \frac{(v-3)(v-4)hz^{v-5}}{2} + \ldots + 3qz + r$$

$$\frac{d^{3}P}{2.3dz^{3}} = \frac{v(v-1)(v-2)z^{v-3}}{2.3} + \frac{(v-1)(v-2)(v-3)fz^{v-4}}{2.3}$$
$$+ \frac{(v-2)(v-3)(v-4)gz^{v-5}}{2.3} \ldots + q$$

:

:

:

$$\frac{d^mP}{1.2.3\ldots m dz^m} = \frac{v(v-1)(v-2)\ldots\big(v-(m-1)\big)z^{v-m}}{1.2.3\ldots m}$$

$$+\frac{(v-1)(v-2)(v-3)\ldots(v-m)fz^{v-(m+1)}}{1.2.3\ldots m}$$

$$+\frac{(v-2)(v-3)(v-4)\ldots\big(v-(m+1)\big)gz^{v-(m+2)}}{1.2.3\ldots m} + \text{ecc.}$$

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{dz} = (v-1)z^{v-2} + (v-2)fz^{v-3} + (v-3)gz^{v-4} \ldots + 2qz + r$$

$$\frac{d^2\mathfrak{Q}}{2dz^2} = \frac{(v-1)(v-2)z^{v-3}}{2} + \frac{(v-2)(v-3)fz^{v-4}}{2}$$

$$+\frac{(v-3)(v-4)gz^{v-5}}{2} + \ldots + q$$

$$\frac{d^3\mathfrak{Q}}{2.3dz^3} = \frac{(v-1)(v-2)(v-3)z^{v-4}}{2.3} + \frac{(v-2)(v-3)(v-4)fz^{v-5}}{2.3}$$

$$+\frac{(v-3)(v-4)(v-5)gz^{v-6}}{2.3} + \text{ecc.}$$

ecc.

$$\frac{dR}{dz} = (v-2)z^{v-3} + (v-3)fz^{v-4} + (v-4)gz^{v-5} + \text{ecc.}$$

$$\frac{d^2R}{2dz^2} = \frac{(v-2)(v-3)z^{v-4}}{2} + \frac{(v-3)(v-4)fz^{v-5}}{2}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)gz^{v-6}}{2} + \text{ecc.}$$

$$\frac{d^3R}{2.3dz^3} = \frac{(v-2)(v-3)(v-4)z^{v-5}}{2.3} + \frac{(v-3)(v-4)(v-5)fz^{v-6}}{2.3}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)(v-6)gz^{v-7}}{2.3} + \text{ecc.}$$

ecc.

$$\frac{dS}{dz} = (v-3)z^{v-4} + (v-4)fz^{v-5} + (v-5)gz^{v-6} + \text{ecc.}$$

$$\frac{d^2S}{2dz^2} = \frac{(v-3)(v-4)z^{v-5}}{2} + \frac{(v-4)(v-5)fz^{v-6}}{2}$$

$$+\frac{(v-5)(v-6)gz^{v-7}}{2} + \text{ecc.}$$

$$\frac{d^3S}{2.3dz^3} = \frac{(v-3)(v-4)(v-5)z^{v-6}}{2.3} + \frac{(v-4)(v-5)(v-6)fz^{v-7}}{2.3}$$
$$+ \frac{(v-5)(v-6)(v-7)gz^{v-8}}{2.3} + \text{ecc.}$$

ecc. ecc.

33. Se ne' valori di $\mathcal{Q}$, R, S ecc. poniam β in vece di z, diventano eſſi i coefficienti di y_0, y_1, y_2 ecc. in Nb (§. 23.) e così ſoſtituendo γ, δ ecc. a z, ſi fanno eſſi i coefficienti di y_0, y_1, y_2 ecc. in Nc, Nd ecc. Oltracciò nel valore di $\frac{dP}{dz}$ ſurrogando a z le radici β, γ, δ ecc., riſultano i valori de' denominatori di b, c, d, ecc. (§. 25). Onde facendo indicare qual radice va ſoſtituita a z in $\mathcal{Q}$, R, S dalla differenza parziale che divide dP nel denominatore, ſarà

$$b = \frac{\mathcal{Q}y_0 + Ry_1 + Sy_2 \ldots\ldots + y_{v-1}}{dP:d\beta};$$
$$c = \frac{\mathcal{Q}y_0 + Ry_1 + Sy_2 \ldots\ldots + y_{v-1}}{dP:d\gamma};$$
$$d = \frac{\mathcal{Q}y_0 + Ry_1 + Sy_2 \ldots\ldots + y_{v-1}}{dP:d\delta},$$

ecc. Quanto al numeratore di A vale la ſteſſa regola, che ſi è oſſervata in b, c, d ecc. (§. 24), ma il ſuo denominatore, che è comune eziandio agli altri ſimboli A', A'' ecc. e che è ſtato ſegnato con (F) al §. 26, è quel che diventa $\frac{d^mP}{1.2.3\ldots mdz^m}$, quando nel ſuo valore (§. 32) ſi ponga α in vece di z. Dunque ſarà

$$A = \frac{\mathcal{Q}y_0 + Ry_1 + Sy_2 \ldots\ldots + y_{v-1}}{d^mP:(1.2.3\ldots md\alpha^m)}.$$

Il valore di A' nel numeratore dev' eſſer compoſto di due parti; la prima de' termini, ne' quali entrano y_0, y_1, y_2 ..... y_{v-2}, eſſendo formata l' altra dal differenziale del denominatore di A moltiplicato in $-A$, ſuppoſto che varj ſolo α, come appariſce dagli eſempj de' §. 18, 19. La ſuddetta prima parte ſi caverà dal valor generale che ha eſſa nel numeratore di A^{m-1} (§. 31); ove ſi ponga $m = 2$, e ſarà

$$((v-1)\alpha^{v-2}+(v-2)fx^{v-3}+(v-3)g\alpha^{v-4}\text{ ecc.})y_0$$

$$+((v-2)x^{v-3}+(v-3)fx^{v-4}+(v-4)g\alpha^{v-5}\text{ ecc.})y_1$$

$$+((v-3)x^{v-4}+(v-4)f\alpha^{v-5}+(v-5)g\alpha^{v-6}\text{ ecc.})y_2\ldots+y_{v-2}.$$

Ma fatto $z = \alpha$, i moltiplicatori di y_0, y_1, y_2 ecc. ſono eguali ai valori di $\frac{d\mathcal{Q}}{d\alpha}$, $\frac{dR}{dx}$, $\frac{dS}{dx}$ ecc. Dunque coll' unione di tutte e due le parti, e col medeſimo denominatore che ha A avremo

$$A' = \frac{\frac{d\mathcal{Q}}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{dx}y_1 + \frac{dS}{d\alpha}y_2 \ldots\ldots + y_{v-2} - \frac{Ad^{m+1}P}{1.2.3\ldots\ldots md\alpha^{m+1}}}{d^mP:(1.2.3\ldots md\alpha^m)}$$

Fatto in (N) $m = 3$, onde riſulti $\left(\frac{(v-1)(v-2)\alpha^{v-3}}{1.2}\right.$ $+\frac{(v-2)(v-3)f\alpha^{v-4}}{1.2}$ ecc. $)y_0 + ((v-2)(v-3)\alpha^{v-4}$ $+(v-3)(v-4)f\alpha^{v-5}$ ecc. $)y_1 \ldots\ldots + y_{v-3}$, queſta è la prima parte del numeratore di A''. Ora poichè colla ſoſtituzione di $z = \alpha$ ne' valori di $\frac{d^2\mathcal{Q}}{1.2dz^2}$, $\frac{d^2R}{1.2dz^2}$, $\frac{d^2S}{1.2dz^2}$ ecc. riſultano i moltiplicatori ſteſſi di y_0, y_1, y_2 nell' anzidetta prima parte, e la ſeconda pei §. 18., 19. è $-\frac{A'd^{m+1}P}{1.1.2.3\ldots\ldots md\alpha^{m+1}}$ $-\frac{Ad^{m+2}P}{1.2.1.2.3\ldots md\alpha^{m+2}}$; ci ſi preſenterà il valore di

$$A'' = \frac{\dfrac{d^2 \mathfrak{Q} y_0}{1.2 d\alpha^2} + \dfrac{d^2 R y_1}{1.2 d\alpha^2} + \dfrac{d^2 S y_2}{1.2 d\alpha^2} \dots + y_{v-3} - \dfrac{A' d^{m+1} P}{1.1.2.3\dots\dots m d\alpha^{m+2}} - \dfrac{A d^{m+2} P}{1.2.1.2.3\dots m d\alpha^{m+2}}}{d^m P:(1.2.3\dots\dots m d\alpha^m)}$$

Similmente diſcorrendo, troveremo

$$A''' = \frac{\dfrac{d^3 \mathfrak{Q} y_0}{1.2.3 d\alpha^3} + \dfrac{d^3 R y_1}{1.2.3 d\alpha^3} + \dfrac{d^3 S y_2}{1.2.3 d\alpha^3} \dots + y_{v-4} - \dfrac{A'' d^{m+1} P}{1.1.2.3\dots m d\alpha^{m+3}} - \dfrac{A' d^{m+2} P}{1.2.1.2.3\dots m d\alpha^{m+2}} - \dfrac{A d^{m+3} P}{1.2.3.1.2.3\dots m d\alpha^{m+3}}}{d^m P:(1.2.3\dots m d\alpha^m)}$$

e così le altre A'''', A''''' ecc. ſino all' ultima A^{m-1}, il cui valore verrà così eſpreſſo

$$A^{m}\alpha^{1} = \frac{\dfrac{d^{m-1} \mathfrak{Q} y_0}{1.2\dots(m-1) d\alpha^{m-1}} + \dfrac{d^{m-1} R y_1}{1.2.3\dots(m-1) d\alpha^{m-1}} \dots + y_{v-m} - \dfrac{A^{m-2} d^{m+1} P}{1.1.2.3\dots m d\alpha^{m+1}} - \dfrac{A^{m-3} d^{m+2} P}{1.2.1.2.3\dots m d\alpha^{m+2}} \dots - \dfrac{A d^{2m-1} P}{1.2\dots(m-1)1.2\dots m d\alpha^{m-1}}}{d^m P:(1.2.3\dots m d\alpha^m)}$$

e però ſarà il termine generale del §. 31, cioè

$$y_x = \left(\frac{\mathfrak{Q} y_0 + R y_1 + S y_2 \dots + y_{v-1}}{dP:d\beta}\right)\beta^x$$

$$+ \left(\frac{\mathfrak{Q} y_0 + R y_1 + S y_2 \dots + y_{v-1}}{dP:d\gamma}\right)\gamma^x$$

$$+ \left(\frac{\mathfrak{Q} y_0 + R y_1 + S y_2 \dots + y_{v-1}}{dP:d\delta}\right)\delta^x + \text{ecc.}$$

$$+\left(\frac{\overset{(A)}{\mathcal{Q}y_0+Ry_1+Sy_2\ldots+y_{v-1}}}{d^mP:(1.2.3\ldots.md\alpha^m)}\right)\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\left(x-(m-2)\right)\alpha^{x(m-1)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\left(\frac{\overset{(A')}{\frac{d\mathcal{Q}y_0}{dx}+\frac{dRy_1}{d\alpha}+\frac{dSy_2}{d\alpha}\ldots+y_{v-2}-\frac{Ad^{m+1}P}{1.2.3\ldots.md\alpha^{m+1}}}}{d^mP:(1.2.3\ldots.md\alpha^m)}\right)\times$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\left(x-(m-3)\right)x^{x-(m-2)}}{1.2.3\ldots(m-2)}$$

$$+\left(\frac{\overset{(A'')}{\frac{d^2\mathcal{Q}y_0}{2dx^2}+\frac{d^2Ry_1}{2d\alpha^2}+\frac{d^2Sy_3}{2d\alpha^2}\ldots+y_{v-3}-\frac{A'd^{m+1}P}{1.1.2.3\ldots md\alpha^{m+1}}-\frac{Ad^{m+2}P}{1.2.1.2.3\ldots md\alpha^{m+2}}}}{d^mP:(1.2.3\ldots md\alpha^m)}\right)\times$$

$$\frac{x(x-1)\ldots\left(x-(m-4)\right)\alpha^{x-(m-3)}}{1.2.3\ldots(m-3)}+\ldots..$$

$$+\left(\frac{\overset{(A^{m-1})}{\frac{d^{m-1}\mathcal{Q}y_0}{1.2\ldots(m-1)dx^{m-1}}+\frac{d^{m-1}Ry_1}{1.2\ldots(m-1)d\alpha^{m-1}}+\ldots..y_{v-m}-\frac{A^{m-2}d^{m+1}P}{1.1.2.3\ldots.mdx^{m+1}}-\frac{A^{m-3}d^{m+2}P}{1.2.1.2.3\ldots md\alpha^{m+2}}\ldots..-\frac{Ad^{2m-1}P}{1.2\ldots(m-1)1.2\ldots md\alpha^{2m-1}}}}{d^mP:(1.2.3\ldots md\alpha^m)}\right)\alpha^x.$$

I ſimboli (A), (A'), (A'') ecc. (A^{m-1}) i quali rappreſentan lo ſteſſo che A, A', A'' ecc. hanno per valore le frazioni ſottopoſte che ſtan chiuſe tra le due parenteſi, e ci ricorderemo che in ciaſcun termine del valore di y_x quelli di $\mathcal{Q}$, R, S ecc. e de' loro differenziali, ſiccome dei differenziali di P vanno adattati alle ſoſtituzioni che ſi fanno in vece di z delle radici β, γ, δ ecc. α ed indicate dai moltiplicatori corriſpondenti β^{x}, γ^{x}, δ^{x} ecc., $\alpha^{x-\text{ecc.}}\ldots$, α^{x}.

34. Rieſce ora patentiſſimo in che convengano i valori de' coefficienti b, c, d ecc. A, A', A'' ecc. aſſegnati dal celebre Sig. la *Grange* coi noſtri, e in che diſcordino. Que' che riguardano le radici diſuguali β, γ, δ ecc. e così il primo A che appartiene alle radici α uguali, ſono intieramente conformi. Non così diremo degli altri valori di A', A'', A''' ecc. nel determinare i quali queſto gran Geometra ha ommeſſo tutti i termini, ne' quali entrano le A, A', $A''\ldots$; A^{m-1}, che aggiunger ſi devono ne' numeratori alla prima parte che contiene y_0, y_1, y_2 ecc., ſenza de' quali termini non ſi ha il valor giuſto delle A', A'' ecc. Rimeſſi pertanto queſti termini, ſi riordina ogni coſa e ſi preſenta con tutta l' accuratezza il termine generale delle ricorrenti che abbiano num.° m di radici eguali α, e coll' iſteſſa facilità ſi eſibirà quello di altre ricorrenti che oltre il num.° m di radici α abbiano num.° n di radici eguali β, num.° p di radici eguali γ ecc., eſſendo qualunque altro numero le radici diſuguali.

35. E' facile il vedere che $\frac{d^{m}P}{1.2.3\ldots m d\alpha^{m}}$ non è altro che il quoto, il quale naſce dalla formola di relazione $z^{v}+fz^{v-1}$ ecc. diviſa per $(z-\alpha)^{m}$, ove in eſſo ſoſtituiſcaſi α per z. Quindi chiamato Z queſto quoziente, ſarà $Z=\frac{d^{m}P}{1.2.3\ldots m d\alpha^{m}}$, e paſſando alle differenziazioni colla variabilità di α; $\frac{dZ}{d\alpha}=\frac{d^{m+1}P}{1.1.2.3\ldots m d\alpha^{m+1}}$; $\frac{d^{2}Z}{2d\alpha^{2}}$ $=\frac{d^{m+2}P}{1.2.1.2.3\ldots m d\alpha^{m+2}}$ ecc. onde $A=\frac{Qy_0+Ry_1\ldots+y_{v-1}}{Z}$;

$$A'=\frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0+\frac{dR}{d\alpha}y_1\ldots+y_{v-2}-\frac{AdZ}{d\alpha}}{Z};$$

$$A'' = \frac{\frac{d^2\mathfrak{Q}}{2d\alpha^2}y_0 + \frac{d^2R}{2d\alpha^2}y_1 \ldots + y_{v-3} - \frac{A'dZ}{d\alpha} - \frac{Ad^2Z}{1.2d\alpha^2}}{Z} \text{ ecc.}$$

ſino ad

$$A^{m-1} = \frac{\frac{d^{m-1}\mathfrak{Q}}{1.2\ldots.(m-1)d\alpha^{m-1}}y_0 + \frac{d^{m-1}R}{1.2\ldots.(m-1)d\alpha^{m-1}}y_1 \ldots + y_{v-m} - \frac{A^{m-2}dZ}{d\alpha} - \frac{A^{m-3}d^2Z}{1.2d\alpha^2} - \frac{A^{m-4}d^3Z}{1.2.3d\alpha^3} \ldots - \frac{Ad^{m-1}Z}{1.2\ldots(m-1)d\alpha^{m-1}}}{Z}.$$

Queſti valori delle A così preſentati ſono più comodi, e fanno ſchivare m differenziazioni di una formola anche più grande di quella che equivale a Z.

36. Adattiamo le teorie ſin qui eſpoſte ad una certa claſſe di ricorrenti, che hanno innanzi al primo termine y_0 tanti termini eguali a zero, quanti ſono i moltiplicatori della ricorrente meno uno, o, eſſendo v il grado della ſerie, tanti termini innanzi al primo nulli quanto è il numero $v - 1$. Tal proprietà hanno tutte quelle ſerie, che ſervono per trovare il numero delle maniere, colle quali unendo inſieme un dato numero di termini diverſi della ſerie aritmetica de' numeri naturali o continuata ſenza limite o ſino a un determinato numero, ſi può formare una data ſomma. Ora egli è certo, che, chiamato y_0 il primo termine d'una sì fatta ſerie di grado v, la cui equazione in z ſia
$z^v + fz^{v-1} + gz^{v-2} + hz^{v-3} + iz^{v-4} \ldots\ldots + tz + u = 0$, poichè i ſuoi moltiplicatori ſono $-u$, $-t \ldots$, $-i$, $-h$, $-g$, $-f$, e l' appendice de' termini zero è compoſta di num.° di termini $v - 1$, mentre i moltiplicatori ſono di num.° v, è certo, diſſi, che ſarà il 2.° termine $y_1 = -fy_0$. In oltre avremo il 3.° termine $y_2 = -fy_1 - gy_0$, cioè

$y_2 = (f^2 - g)y_0$. Poi $y_3 = -fy_2 - gy_1 - hy_0$, ovvero

$y_3 = (-f^3 + 2fg - h)y_0$ ecc. coſicchè la ſerie diventerà la

ſeguente
$(0) \ldots - y_0$, $-fy_0$, $(f^2 - g)y_0$, $(-f^3 + 2fg - h)y_0$,

$(f^4 - 3f^2g +$

$(f^4 - 3f^2g + 2fh + g^2 - i)y_0$, $(-f^5 + 4f^3g - 3f^2h - 3fg^2 + 2fi + 2gh - l)y_0$ ecc.; e queſta ſi potrà continuare finchè ſi vuole. Dunque, poichè i ſimboli f, g, h ecc. ſon quelli, che abbiamo ſempre adoperato, ſe ſupporremo che nella equazione in z vi ſiano le radici eſpreſſe colle ſolite ſpecie β, γ, δ ecc., e che b, c, d ecc. ſignifichino i moltiplicatori di β^v, γ^v, δ^v ecc. nel termine generale y_v, non avrem da far altro che ſoſtituire nel valore di $N.b$ del §. 23. in vece di y_1, y_2, y_3 ecc. i corriſpondenti valori

$-fy_0$, $(f^2-g)y_0$, $(-f^3+2fg-h)y_0$ ecc. della ſerie (O), Per tal modo ſi ha

$$N.b = y_0 \left\{ \begin{array}{r} \beta^{v-1} + f\beta^{v-2} + g\beta^{v-3} + h\beta^{v-4} + i\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ -f\beta^{v-2} - g\beta^{v-3} - h\beta^{v-4} - i\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ -f^2\beta^{v-3} - fg\beta^{v-4} - fh\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ +f^2\beta^{v-3} - fg\beta^{v-4} - fh\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ +2fg\beta^{v-4} + 2fh\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ +f^3\beta^{v-4} + f^2g\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ -f^3\beta^{v-4} + 2f^2g\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ -3f^2g\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ -g^2\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ +g^2\beta^{v-5} \text{ ecc.} \end{array} \right\}$$

ove ſi vede, che fuor del primo β^{v-1} tutti gli altri termini ſi diſtruggono, onde abbiamo con eſpreſſione ſempliciſſima $N.b = \beta^{v-1}y_0$, e per la ſteſſa ragione $N.c = \gamma^{v-1}y_0$; $N.d = \delta^{v-1}y_0$ ecc. Ponghiamo ancora che vi ſiano più radici eguali α nell'equazione in z, ed A, A', A' ecc. ſignifichino lo ſteſſo che negli eſempj antecedenti. A buon conto avremo $N.A = \alpha^{v-1}y_0$. Per gli altri poi ricorreremo all'eſpreſſione generica di $N.A^{m-1}$ de' §. 31., 35., nella quale, dopo aver fatto per brevità $\frac{(v-1)(v-2)\ldots(v-(m-1))}{1.2.3\ldots(m-1)} = \omega$; $\frac{(v-2)(v-3)\ldots(v-m)}{1.2.3\ldots(m-1)} = \omega'$, e così ai ſuſſeguenti ſurrogati ω'', ω''' ecc., ſoſtituiremo in vece di y_1, y_2, y_3 ecc. i corriſpondenti valori della ſerie (O), e naſcerà

$$N.A^{m-1} = \left\{ \begin{array}{r} \omega\alpha^{v-m} + \omega' f\alpha^{v-(m+1)} + \omega'' g\alpha^{v-(m+2)} \text{ ecc.} \\ -\omega' f\alpha^{v-(m+1)} - \omega'' g\alpha^{v-(m+2)} \text{ ecc.} \\ -\omega'' f^2\alpha^{v-(m+2)} \text{ ecc.} \\ +\omega'' f^2\alpha^{v-(m+2)} \text{ ecc.} \end{array} \right\} y_0$$

$$-\frac{A^{m-2}dZ}{1.d\alpha} - \frac{A^{m-3}d^2Z}{1.2dx^2} \text{ ecc.}$$

Da queſto calcolo pure rilevaſi che s' annullano i termini delle podeſtà di α eccetto il primo $\omega\alpha^{v-m}y_0$. Onde, rimeſſo il valore di ω,

$$N.A^{m-1} = \frac{(v-1)(v-2)(v-3)\ldots(v-(m-1))\alpha^{v-m}}{1.2.3\ldots(m-1)} y_0$$

$$-\frac{A^{m-2}dZ}{1.dx} - \frac{A^{m-3}d^2Z}{1.2d\alpha^2} \ldots\ldots \frac{-Ad^{m-1}Z}{1.2\ldots(m-1)d\alpha^{m-1}}$$

che dà tutti i valori di $N.A'$, $N.A''$, $N.A'''$ ecc., ſecondo le ipoteſi di $m = 2, 3, 4$, ecc. Per la qual coſa il termine generale di queſta ſerie ſarebbe

$$y_x = \frac{\beta^{v-1}y_0\beta^x}{dP:d\beta} + \frac{\gamma^{v-1}y_0\gamma^x}{dP:d\gamma} + \frac{\delta^{v-1}y_0\delta^x}{dP:d\delta} + \text{ecc.}$$

$$+\left(\frac{\alpha^{v-1}y_0}{Z}\right)\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(m-2))\alpha^{x-(m-1)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\left(\frac{(v-1)\alpha^{v-2}y_0}{1.Z} - \frac{dZ}{Zd\alpha}\left(\frac{\alpha^{v-1}y_0}{Z}\right)\right)\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(m-3))\alpha^{x-(m-2)}}{1.2.3\ldots(m-2)}$$

$$+\left(\frac{(v-1)(v-2)\alpha^{v-3}y_0}{1.2Z} - \frac{dZ}{Zd\alpha}\left(\frac{(v-1)\alpha^{v-2}y_0}{1.Z} - \frac{dZ}{Zd\alpha}\left(\frac{\alpha^{v-1}y_0}{Z}\right)\right)\right.$$

$$\left. - \frac{d^2Z}{1.2Zd\alpha^2}\left(\frac{\alpha^{v-1}y_0}{Z}\right)\right)\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(m-4))\alpha^{x-(m-2)}}{1.2.3\ldots(m-3)} + \text{ecc.}$$

ſino al termine che viene moltiplicato per α^x.

37. Pongaſi per eſempio numerico la ricorrente dell'equazione $(z-1)(z^2-1)(z^3-1)(z^4-1)(z^5-1) = 0$. Queſta, ſiccome è ſtato da me dimoſtrato nel Prodromo dell' Enciclopedia Italiana e poi nel num.° XI. dell' Antologia Romana per l' anno 1784, appartiene alla ſerie che eſprime il numero de' modi, onde con 5 termini diverſi della ſerie de' numeri naturali continuata ſenza limite ſi può formare

qualunque delle poſſibili ſomme. Preſento la ſuddetta equazione in queſto aſpetto equivalente;

$$(z-1)^5(z+1)^2(z^2+z+1)(z^2+1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0,$$

e noto che le 4 radici dell'ultimo fattore ſono le 4 immaginarie dell' unità elevata alla podeſtà 5.^{a}; le due del penultimo ſono le due immaginarie dell' unità biquadrata; finalmente le due dell' antipenultimo ſono le due immaginarie dell'unità cuba. Chiamo pertanto le 4 prime $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma'''$; le ſeguenti δ, δ', le 2 altre ε, ε', e denominate β le 2 eguali che naſcono dalla formola $(z+1)^2$, faccio α le cinque eguali del fattore $(z-1)^5$. Oltracciò nel termine generale y_x di queſta ſerie ſiano c, c', c'', c''' i coefficienti di γ^x, γ'^x, γ''^x, γ'''^x, d, d' quelli che moltiplicano i termini δ^x, δ'^x, indi e, e' quei che moltiplicano ε^x, ε'^x. Appreſſo faccio β' quel che moltiplica β^x, e B quel che moltipiica $x\beta^{x-1}$; finalmente A'''', A''', A'', A', A i coefficienti di α^x, $x\alpha^{x-1}$, $\frac{x(x-1)x^{x-2}}{2}$, $\frac{x(x-1)(x-2)\alpha^{x-3}}{2.3}$, $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\alpha^{x-4}}{2.3.4}$; e la forma del termine generale ſarà la ſeguente;

$$y_x = c\gamma^x + c'\gamma'^x + c''\gamma''^x + c'''\gamma'''^x + d\delta^x + d'\delta^x + e\varepsilon^x + e'\varepsilon'^x$$

$$+ Bx\beta^{x-1} + B'\beta^x + \frac{Ax(x-1)(x-2)(x-3)\alpha^{x-4}}{2.3.4}$$

$$+ \frac{A'x(x-1)(x-2)\alpha^{x-3}}{2.3} + \frac{A''x(x-1)\alpha^{x-2}}{2} + A'''x\alpha^{x-1} + A''''\alpha^x.$$

Il grado della ſerie è il 15^{esimo}, il che dà $v=15$; ed eſſendo eſſa una di quelle che hanno $v-1$, cioè 14 termini eguali a zero innanzi al primo y_0 che è 1, le competerà tutto ciò che abbiam detto nel §. precedente. Comincio dunque dal chiamar P la formola in z, e colle attuali moltiplicazioni de' fattori polinomj trovo

$$P = z^{15} - z^{14} - z^{13} + z^{10} + z^9 + z^8 - z^7 - z^6 - z^5 + z^2 + z - 1, \text{ e}$$

$$\frac{dP}{dz} = 15z^{14} - 14z^{13} - 13z^{12} + 10z^9 + 9z^8 + 8z^7 - 7z^6$$

$$-6z^5 - 5z^4 + 2z + 1 \ldots\ldots (P),$$ ove colla ſoſtituzione di γ

a z riſulta $\frac{dP}{d\gamma} = 15\gamma^{14} - 14\gamma^{13} - 13\gamma^{12} + 10\gamma^{9} + 9\gamma^{8} + 8\gamma^{7} - 7\gamma^{6} - 6\gamma^{5} - 5\gamma^{4} + 2\gamma + 1$, che ſarà il denominatore di c. Ma queſto denominatore ſi può ridurre a maggiore ſemplicità, ſe ſi riflette che eſſendo γ una delle radici dell' unità alzata al 5.° grado, ſarà $\gamma^{5} = 1$, e $\gamma^{4} + \gamma^{3} + \gamma^{2} + \gamma + 1 = 0$. E però ſoſtituendo 1 in vece di γ^{5} e di γ^{10}; $\frac{dP}{d\gamma} = 15\gamma^{4} - 14\gamma^{3} - 13\gamma^{2} + 10\gamma^{4} + 9\gamma^{3} + 8\gamma^{2} - 7\gamma - 6 - 5\gamma^{4} + 2\gamma + 1$, oſſia coll' union degli omologhi; $\frac{dP}{d\gamma} = 5(4\gamma^{4} - \gamma^{3} - \gamma^{2} - \gamma - 1) = 25\gamma^{4}$. Avremo medeſimamente $\frac{dP}{d\gamma'} = 25\gamma'^{4}$; $\frac{dP}{d\gamma''} = 25\gamma''^{4}$; $\frac{dP}{d\gamma'''} = 25\gamma'''^{4}$. Il numeratore poi di c debb' eſſere (§. 36.) $\gamma^{v-1} y_{0} = \gamma^{14}$, perchè $y_{0} = 1$, $v = 15$. Dunque $c = \frac{\gamma^{14}}{25\gamma^{4}} = \frac{\gamma^{10}}{25} = \frac{1}{25}$, e tal valore avranno ancora c', c'', c''' coſicchè i primi 4 termini di y_{x} diventano $\frac{1}{25}(\gamma^{x} + \gamma'^{x} + \gamma''^{x} + \gamma'''^{x})$. Per avere il valore di d deeſi in (P) por δ in vece di z, che ſomminiſtra $\frac{dP}{d\delta} = 15\delta^{14} - 14\delta^{13} - 13\delta^{12} + 10\delta^{9} + 9\delta^{8} + 8\delta^{7} - 7\delta^{6} - 6\delta^{5} - 5\delta^{4} + 2\delta + 1$; e queſto è il denominatore di d, che ſi riduce al ſemplice colle neceſſarie equazioni $\delta^{4} = 1$, $\delta^{2} + 1 = 0$, eſſendo δ una radice dell' unità biquadrata. In vigor della prima naſce $\frac{dP}{d\delta} = 8(\delta^{3} + \delta^{2} - \delta - 1) = 8(\delta + 1)(\delta^{2} - 1)$, ovvero, ſiccome la ſeconda dà $\delta^{2} = -1$; $\frac{dP}{d\delta} = -16(\delta + 1)$. Ma il numeratore di d è $\delta^{v-1} y_{0} = \delta^{14} = \delta^{2} = -1$; Dunque $d = \frac{1}{16(\delta + 1)} = \frac{\delta - 1}{16(\delta^{2} + 1)} = \frac{-(\delta - 1)}{32}$; e per la ſteſſa ragione eſſendo $d' = \frac{-(\delta' - 1)}{32}$, il 5.° e il 6.° termine di y_{x} ſi eſprimeranno colle formole

$\frac{1}{32}(\delta^x + \delta'^x) - \frac{1}{32}(\delta^{x+1} + \delta'^{x+1})$. Coſì ſi ha $\frac{dP}{d\varepsilon} = 15\varepsilon^{14} - 14\varepsilon^{13} - 13\varepsilon^{12} + 10\varepsilon^9 + 9\varepsilon^8 + 8\varepsilon^7 - 7\varepsilon^6 - 6\varepsilon^5 - 5\varepsilon^4 + 2\varepsilon + 1$; e appartenendo ε all' unità cuba, varranno le equazioni $\varepsilon^3 = 1$; $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Onde $\frac{dP}{d\varepsilon} = 15\varepsilon^2 - 14\varepsilon - 13 + 10 + 9\varepsilon^2 + 8\varepsilon - 7 - 6\varepsilon^2 - 5\varepsilon + 2\varepsilon + 1 = 9(2\varepsilon^2 - \varepsilon - 1) = 27\varepsilon^2$, che è il denominatore di e, il quale ha per numeratore $\varepsilon^{14} = \varepsilon^2$; e quindi $e = \frac{\varepsilon^2}{27\varepsilon^2} = \frac{1}{27}$, al qual valore ſarà anche eguale e'. Quindi il 7.° e l' 8.° termine di y_x diventano $\frac{1}{27}(\varepsilon^x + \varepsilon'^x)$.

38. Eſauriti i termini delle radici diſuguali ci ſi preſentano quelli delle radici eguali, pei quali fa duopo determinare B, B', che riguardano le 2 radici eguali β, e gli altri ſimboli A, A' ecc. che ſpettano alle 5 radici eguali α. Quanto ai primi B, B' ci ricorderem della regola del §. 35., la quale ci comanda di togliere dall' equazione in z il prodotto dei fattori eguali che contengono le radici β e di por nel quoziente β in vece di z. Con ciò abbiamo il denominatore comune de' due ſimboli B, B' che è $= (\beta - 1)^5 (\beta^2 + \beta + 1)(\beta^2 + 1)(\beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1) = \beta^{13} - 3\beta^{12} + 4\beta^{11} - 5\beta^{10} + 6\beta^9 - 6\beta^8 + 7\beta^7 - 7\beta^5 + 6\beta^5 - 6\beta^4 + 5\beta^3 - 4\beta^2 + 3\beta - 1$, che chiamo Z', onde $\frac{dZ'}{d\beta} = 13\beta^{12} - 36\beta^{11} + 44\beta^{10} - 50\beta^9 + 54\beta^8 - 48\beta^7 + 49\beta^6 - 42\beta^5 + 30\beta^4 - 24\beta^3 + 15\beta^2 - 8\beta + 3$. Ma $\beta = -1$. Dunque $Z' = -64$; $\frac{dZ'}{d\beta} = 416$. Ora pel §. 36 adattando il valore generale di $N.A^{m-1}$ e di A al noſtro caſo col fare $A = B$, $m = 2$, ritroveremo $B = \frac{\beta^{v-1} y_0}{Z'} = \frac{\beta^{14}}{-64} = \frac{-1}{64}$; ed eſ-

ſendo $B'=\frac{(v-1)\beta^{v-2}y_0}{Z^1}-\frac{BdZ^1}{Z^1d\beta}$, riſulterà $B'=\frac{14\beta^{13}}{-64}$ $+\frac{416}{-64.64}=\frac{14}{64}-\frac{416}{64.64}=\frac{15}{128}$. Sicchè il 10° e l' 11° termine di y_x ſi fanno $-\frac{x(-1)^{x-1}}{64}+\frac{15(-1)^x}{128}$, oſſia $\frac{(2x+15)(-1)^x}{128}$.

39. Reſtano i 5 termini che ſi riferiſcono alla radice $\alpha=1$, per cui biſogna trovare i 5 coefficienti A, A', A'', A''', A''''. Cominciamo dal denominatore comune, che è il quoto dell' equazione in z diviſa per $(z-1)^5$, ove in eſſo quoto facciaſi $z=\alpha$. Chiamando Z queſto quoziente sarà

$$Z=(\alpha+1)^2(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^2+1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)$$
$$=\alpha^{10}+4\alpha^9+9\alpha^8+15\alpha^7+20\alpha^6+22\alpha^5+20\alpha^4+15\alpha^3$$
$$+9\alpha^2+4\alpha+1=120.$$

Onde ſi deduce

$$\frac{dZ}{d\alpha}=10\alpha^9+36\alpha^8+72\alpha^7+105\alpha^6+120\alpha^5+110\alpha^4+80\alpha^3$$
$$+45\alpha^2+18\alpha+4=600$$
$$\frac{d^2Z}{2d\alpha^2}=45\alpha^8+144\alpha^7+252\alpha^6+315\alpha^5+300\alpha^4+220\alpha^3$$
$$+120\alpha^2+45\alpha+9=1450$$
$$\frac{d^3Z}{2.3d\alpha^3}=120\alpha^7+336\alpha^6+504\alpha^5+525\alpha^4+400\alpha^3+220\alpha^2$$
$$+80\alpha+15=2200$$
$$\frac{d^4Z}{2.3.4d\alpha^4}=210\alpha^6+504\alpha^5+630\alpha^4+525\alpha^3+300\alpha^2$$
$$+110\alpha+20=2299.$$

Riaſſunto adeſſo il valore generale di $N.A^{m-1}$ e di A (§. 36) col fare ſucceſſivamente $m=2, 3, 4, 5$, troveremo $A=\frac{1}{120}$, $A'=\frac{9}{120}$, $A''=\frac{4070}{120.120}$, $A'''=\frac{8080}{120.120}$; $A''''=\frac{1013020}{120.120.120}$; e però introducendo tutti queſti valori nel termine generale della noſtra ſerie, avrem finalmente

$$y_x = \frac{\gamma^x + \gamma'^x + \gamma''^x + \gamma'''^x}{25} + \frac{\delta^x + \delta'^x}{32} - \frac{(\delta^{x+1} + \delta'^{x+2})}{32} + \frac{\varepsilon^x + \varepsilon'^x}{27}$$

$$+ \frac{(2x+15)(-1)^x}{128} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{120.1.2.3.4} + \frac{9x(x-1)(x-2)}{120.1.2.3}$$

$$+ \frac{407x(x-1)}{12.120.1.2} + \frac{101x}{180} + \frac{50651}{6.120.120} \ldots\ldots (\mathcal{Q})$$

40. In queſto termine generale potrebbe imbarazzare il non ſapere coſa diventino i primi dieci termini, quando x aſſume i valori di 1, 2, 3, 4 ecc. Ma riflettendo, che i primi 4 termini, e così le 3 coppie ſuſſeguenti non contengono altro che le ſomme delle radici, de' loro quadrati, cubi ecc. dell' unità potenziata, ſi vede a un tratto, che ci trarrem facilmente d' intrico col noto teorema, con cui ſi eſibiſcono queſte ſomme per mezzo de' coefficienti i quali moltiplicano i termini dell' equazione compoſta delle medeſime radici. Il teorema è queſto. Sia $z^n + Az^{n-1} + Bz^{n-2} + Cz^{n-3} + Dz^{n-4} \ldots + V = 0$, e le radici di queſta equazione, $\pi, \pi', \pi'' \ldots \pi^{n-1}$. Chiamiſi la loro ſomma $\pi + \pi' + \pi'' \ldots + \pi^{n-1} = r$; la ſomma de' loro quadrati $= r'$; quella de' loro cubi $= r''$; e in genere la ſomma delle podeſtà k delle medeſime radici $= r^{k-1}$. Dimoſtrano gli Analiſti eſſere $r = -A$; $r' = -Ar - 2B$; $r'' = -Ar' - Br - 3C$; $r''' = -Ar'' - Br' - Cr - 4D$, e generalmente $r^{k-1} = -Ar^{k-2} - Br^{k-3} - Cr^{k-4} - Dr^{k-5} \ldots - kX$, chiamato X quel coefficiente che nell' equazione $z^n + Az^{n-1}$ ecc. è al termine di poſto $k+1$ Ciò premeſſo, vogliaſi v.g ſapere coſa diventano i primi 4 termini in $(\mathcal{Q})$ quando $x = 1$. Poichè ad eſſi compete 'l equazione $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, ſaranno A, B, C, D eguali all' unità poſitiva, e di più π, π' ecc. eguali a γ, γ' ecc. Dunque perchè $r = -A$, avremo $\gamma + \gamma' + \gamma'' + \gamma''' = -1 = r$. Fatto $x = 2$, i ſuddetti primi 4 termini vengono eſpreſſi da $r' = -Ar - 2B$, che colle ſoſtituzioni ſi cangia in $r' = -1$. Così troveremo $r'' = -1$; $r''' = -1$. Volendo poi la ſomma delle quinte podeſtà delle radici, nel valore dj r^{k-1} ſi fa $k = 5$, e il termine $-kX$ ſarebbe il 6.° della data equazione. Ma queſta

non ne ha che cinque. Dunque queſto termine e in conſeguenza $X=0$. Sarà pertanto $r''''=-Ar'''-Br''-Cr'-Dr$ $=-r'''-r''-r'-r=4$; il che confronta con ciò che porta la natura medeſima delle radici γ, γ', γ'', γ''', che ſon le 4 radici immaginarie dell' unità quadrato-cuba, onde debb' eſſere $\gamma^5=1$, $\gamma'^5=1$, $\gamma''^5=1$, $\gamma'''^5=1$. Fatto $x=5$, la ſomma delle ſeſte podeſtà di γ, γ' ecc. ſi fa eguale alla ſomma delle ſteſſe radici, cioè $=-1$. Così la ſomma delle ſettime podeſtà ſarà lo ſteſſo che la ſomma de' quadrati ecc., onde ſarà chiaro qual debba eſſere il valore di queſte ſomme, qualunque ſia x. Lo ſteſſo diſcorſo faremo pei termini $\frac{\varepsilon^x+\varepsilon'^x}{27}$, ai quali compete l' equazione $z^2+z+1=0$; ove fatto $x=1$, e $x=2$, ci riſulterà $\varepsilon+\varepsilon'=-1$; $\varepsilon^2+\varepsilon'^2=-1$. Ma perchè z^2+z+1 contiene le 2 radici immaginarie dell' unità cuba, ſe faremo $x=3$, ſarà $\varepsilon^3+\varepsilon'^3=2$; e quindi $\varepsilon^4+\varepsilon'^4=\varepsilon+\varepsilon'=-1$; $\varepsilon^5+\varepsilon'^5=\varepsilon^2+\varepsilon'^2=-1$; $\varepsilon^6+\varepsilon'^6=2$ ecc. Le due coppie de' termini, che in y_x contengono le radici δ, δ' che ſono le 2 immaginarie dell' unità biquadrata, deonſi riferire all' equazione $z^2+1=0$, la quale, perchè manca il 2.° termine, fa eſſere nella generale $A=0$, $B=1$. Quindi r oſſia $\delta+\delta'=0$, il che naſce, quando $x=1$, nella prima delle 2 coppie. In oltre fatto $x=2$, diventa $r'=-2B$, cioè $\delta^2+\delta'^2=-2$. E ſe $x=3$, abbiamo $\delta^3+\delta'^3$ oſſia $r''=-Br-3C$. Ma C è nullo, perchè dovrebbe trovarſi queſto coefficiente al 4.° termine dell' equazione $z^2+{*}+1=0$, il qual manca, e di più r, ovvero $\delta+\delta'=0$. Dunque $\delta^3+\delta'^3=0$. Finalmente è chiaro che ſe facciamo $x=4$, ſarà $\delta^4+\delta'^4=2$, e così ſaran noti $\delta^5+\delta'^5$; $\delta^6+\delta'^6$, ecc. per qualunque ipoteſi di x, ſenza che vi ſia biſogno nè per la ſomma delle potenze di queſte radici nè per quella delle potenze delle precedenti, di trovare prima il valore di ciaſcuna delle ſteſſe radici colle riſoluzioni algebraiche; il che riuſcirebbe molto operoſo, e ne' gradi alti di impreſa aſſai malagevole, e fors' anche diſperata.

41. Il termine generale y_x del §. 39. dà realmente il numero delle maniere, colle quali ſi può formare una data ſomma prendendo 5 diverſi termini nella ſerie aritmetica de' nu-

meri naturali; ma però eſſa deeſi conſiderare continuata ſenza limite, perchè ſe la ſerie non arrivaſſe che a un certo termine m entrerebbero in campo altre ſerie, le quali combinate con quella del ſuddetto termine generale ſervirebbero ad eſibire i veri numeri delle maniere cercate, che non ſi ottengon ſempre colla prima ſola. Nel Prodromo dell' Enciclopedia Italiana, e poi con maggiore eſattezza nel num.° XI dell' Antología Romana per l' anno 1784 eſamino l' indole di queſte nuove ſerie, determino i loro punti d' ingreſſo, e ne ſtabiliſco l' uſo, qualunque ſia il num.° de' diverſi termini dell' aritmetica che ſi prendono in ſomma. Quando i termini ſon cinque, la prima nuova ſerie che chiamo di ſottrazione ha il termine generale della ſeguente forma

$$\frac{\delta^{x'}+\delta'^{x'}}{32}-\frac{(\delta^{x'+1}+\delta'^{x'+1})}{32}-\frac{(\varepsilon^{x'+1}+\varepsilon'^{x'+1})}{27}+\frac{(2x'+11)(-1)^{x'}}{128}$$

$$+\frac{x'(x'-1)(x'-2)(x'-3))}{24.1.2.3.4}+\frac{7x'(x'-1)(x'-2)}{24.1.2.3}+\frac{239x'(x'-1)}{288.1.2}$$

$$+\frac{19x'}{16}+\frac{2815}{3456}.$$

La x' comincia ad avere il valor zero, quando nel termine generale y_x ſi fa $x=m-4$, cui corriſponde la ſomma $m+11$; e quindi diventa $x'=x+4-m$, eſſendo δ, δ', ε, ε' in queſta lo ſteſſo che nella prima ſerie. Ma queſta ſerie, i cui termini dal punto del ſuo ingreſſo van ſottratti da quelli che nella prima lor corriſpondono, non baſta, perchè quando $x=2m-7$ ſubentra alle 2 precedenti una 3.ª ſerie di addizione, il cui termine generale è

$$\frac{\varepsilon^{x''}+\varepsilon'^{x''}}{27}+\frac{(2x''+9)(-1)^{x''}}{64}+\frac{x''(x''-1)(x''-2)(x''-3)}{12.1.2.3.4}$$

$$+\frac{x''(x''-1)(x''-2)}{2.1.2.3}+\frac{173x''(x''-1)}{144.1.2}+\frac{205x''}{144}+\frac{1357}{1728}.$$

In eſſo ε, ε' ſignificano lo ſteſſo che negli altri, e $x''=x+7-2m$, che principiando dal valor zero fa aggiungere il primo termine che riſulta da queſta ipoteſi alla differenza de' correſpettivi termini nelle altre due ſerie. Per eſempio, coi 90 numeri del Lotto di Roma ſi cerca in quante maniere cinque di eſſi numeri eſtratti poſſano far la ſomma 227, che è una delle due di maſſimo numero di combinazioni. In queſta ſuppoſizione (num. cit. Antol.) diventa $x=212$, $x'=126$, $x''=39$. Poſti pertanto queſti valori ne' tre termini generali ſopra notati, riſultano i numeri $805563 - 518672 + 12369$, vale a dire in 299260 maniere diverſe ſi può fare con 5 numeri dei 90 la ſomma 227.

APPENDICE

Sul Problema del trovar le maniere, colle quali ſi può formare una data ſomma prendendo un dato numero di termini diverſi nella ſerie de' numeri naturali continuata ſino a un dato termine.

1. Il celebre noſtro Collega Sig. *Paoli* nella ſua Memoria che ſta inſerita nel 2.° Tomo della Società Italiana, dopo avere adattato le nuove teorie de' gran Geometri i Sigg. *la Place e la Grange* ſul calcolo delle differenze finite ad alcuni problemi ſpettanti alla partizione de' numeri, ſcioglie anche quello di trovare il num.° delle maniere per formare una ſomma data col prendere in una ſerie aritmetica un dato numero di diverſi termini. Ma egli nello ſteſſo tempo ſuppone che la ſerie aritmetica ſia protratta all' infinito, e laſcia intatto il problema modificato al caſo che la ſerie ſia limitata. Nell' ipoteſi trattata dal Sig. *Paoli* unica è la legge della ſerie che preſenta le ricercate maniere, laddove nell' altra del limite viene eſſa dopo alcuni termini turbata dalla neceſſità d' introdur nuove ſerie, ſenza le quali non ſi ſoddisferebbe pienamente al queſito. Avendo io pertanto verſato più d' una volta ſu queſto argomento, ho voluto avere il piacere di trattarlo nuovamente in queſt' Appendice col calcolo delle differenze finite, che mi ha guidato ad eſibire con una ſola forma di termine generale tutti i termini generali che appartengono alle diverſe ſerie neceſſarie per la ſoluzion del problema.

2. A queſto fine chiamato x il num.° de' termini, che nella ſerie de' numeri naturali $(A) \ldots\ldots 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots p, p+1, p+2, p+3$ ecc. ſi voglion prendere in ſomma,

ſuppongo note le ſerie de' modi per formare con x diverſi termini di (*A*) qualunque ſomma fattibile, ov' eſſa foſſe ſenza limite continuata. Io dimoſtro la generazione di queſte ſerie nel Prodromo dell' Enciclopedia Italiana e poi al Num.° XI. dell' Antologia Romana per l' anno 1784 diſcopro in eſſe una proprietà che mi rende facile la loro protrazione ſino a quel termine che mi aggrada. Ecco in che eſſa conſiſte. Sottopongo l' una all' altra di queſte ſerie per ordine ſecondo le diverſe ipoteſi di x.

Serie generali delle maniere

$x=1$ 1.ª 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 ecc. ... (*B*)
$x=2$ 2.ª 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5 ecc. ... (*C*)
$x=3$ 3.ª 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12 ecc. ... (*D*)
$x=4$ 4.ª 1, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 11, 15, 18 ecc. ... (*E*)
$x=5$ 5.ª 1, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 13, 18, 23 ecc. ... (*F*)
ecc. ecc.

ed oſſervo, che ſe ſcrivo la prima diſteſamente e dopo i due primi termini metto ſotto la ſteſſa ſerie, e poi replico l' operazione dopo altri due della 2.ª fila e così dopo altri due della 3.ª ecc. come nello ſchema che qui preſento

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 ecc.
1, 1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1 .... (*C*)
1, 1
ecc.

indi faccio la ſomma delle colonne verticali che riſultano, naſce la ſerie 1, 1, 2, 2 ecc. .... (*C*) che compete all' ipoteſi di $x=2$. All' iſteſſo modo operando ſulla ſerie (*C*) ma col replicare la medeſima ſerie dopo 3 in 3 termini, come nell' anneſſa figura

1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5 ecc.
1, 1, 2, 2, 3, 3, 4 .... (*D*)
1, 1, 2, 2
1
ecc.

e poi ſommate le colonne verticali ſi ottiene la ſerie (*D*) dell' ipoteſi $x=3$. Così la ſerie (*D*) replicata ſimilmente, ma dopo 4 in 4 termini e preſe le ſomme, dà origine alla ſerie (*E*);

1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12 ecc.
1, 1, 2, 3, 4, 5
1, 1
ecc.

E fatta una configurazione ſomigliante della ſerie (*E*) cogl' intervalli di 5 termini, ſi avrà ſommando le colonne la ſerie (*F*) ecc. Onde in generale trovata la ſerie che corriſponde all' ipoteſi di $x-1$, ſi avrà quella che corriſponde alla ſuſſeguente di x, ſe alla precedente ſi faranno le ſottopoſizioni della ſteſſa ſerie ma cogl' intervalli di x termini, ſiccome è chiaro.

3. Da queſta proprietà ne emana un' altra che agevola anche più la formazione di tali ſerie; ed è ſtata eſſa avvertita dal Sig. *Paoli* nella Memoria citata. Oſſervo per eſempio il 10.^{mo} termine di (*E*) che è 18, e naſce nello ſchema (*E*) dalla ſomma di 12, 5, 1. Ora il 12 è il termine che nella precedente (*D*) ſi trova allo ſteſſo poſto che è il 18. in (*E*). Vengono poi gli altri due numeri 5, 1, i quali nello ſteſſo (*E*) li trovo collocati al poſto che è indietro di 4 termini dal decimo nella medeſima figura (*E*). Così il 9.° termine di (*E*) compoſto di 10, 4, 1 vien formato da 10 che è il 9.° in (*D*) e da 4, 1 che è il 5.° in (*E*) cioè anteriore di 4 termini al 9.°; la qual regola vale per tutti gli altri. Se eſaminiamo poi ciò che accade alla fig. (*D*) e prendiamo v. g. il 10.° termine, eſſo ſi compone di 5, 4, 2, 1 cioè di 5 che è il 10.° della anterior ſerie (*C*) e di 4, 2, 1 che ſi preſentano 3 termini innanzi al 10.° nella ſteſſa (*D*); il che ſi verificherà ancora per qualunque altro termine che ſi aſſuma. Parimente nello ſchema (*C*) oltre il termine egualmente ſituato in (*B*) converrà prender quello che precede di due il poſto del primo. Onde potremo ſtabilire il canone, che nella ſerie competente al num.° indefinito x, qualunque termine ſarà eguale al termine che nella ſteſſa ſerie è diſtante x termini dal ricercato, con di più il termine di egual poſto a quel che ſi vuole, preſo nella ſerie che ſpetta alla preſente ipoteſi di $x-1$. Quindi, chiamato t il num.° de' termini, e coi nuovi ſimboli del Sig. *la Pla-*

ce, ſacendo che $Z^{(t,x)}$ rappreſenti il termine che ſi cerca nella ſerie ſpettante a x, valerà l' equazione $Z^{(t,x)} = Z^{(t-x,x)} + Z^{(t,x-1)} \ldots\ldots (a)$. E' aſſai ingegnoſo il raziocinio di cui fa uſo il Sig. *Paoli* per trarre dall' indole del problema queſta equazione, la quale egli integra col calcolo delle differenze finite accomodato al caſo che t varj con differenza variabile x, e da cui riſultano le notate ſerie (B), (C), (D) ecc., per la dimoſtrazione delle quali, ſenza andare in traccia del Prodromo, ſarà bene leggere la ſua bella Memoria, che abbiamo teſtè mentovata.

4. Ma veniamo al caſo del noſtro problema. Nella ſerie aritmetica (A) è facile il vedere; 1.°, che prendendoſi in eſſa x termini diverſi, la ſomma minima delle fattibili debb' eſſere $1 + 2 + 3 + 4 \ldots\ldots + x$, cioè $\frac{x(x+1)}{2}$, e la ſomma maſſima; $p + p - 1 + p - 2 + p - 3 \ldots\ldots + p - (x-1) = px - \frac{x(x-1)}{2}$, quando (A) debba terminare in p: 2.° che per natura del problema le maniere di formar le ſomme principiando dalla minima e ſalendo ſino ad una certa ſomma media S, ſaranno eguali di numero alle maniere per formar le ſomme principiando dalla maſſima e diſcendendo ſino alla ſteſſa S. Per la qual coſa avremo egual numero di termini nella ſerie delle maniere di qua e di là da quello che corriſponde a queſta ſomma S, il valor de' quali ſarà lo ſteſſo ne' poſti egualmente diſtanti dal medio nominato; e queſto medio eſibirà il maſſimo numero di queſte maniere: 3°. che eſſendo la ſerie delle ſomme una ſerie aritmetica limitata, e trovandoſi S in mezzo a queſta ſerie, ſarà S un medio aritmetico tra la ſomma minima $\frac{x(x+1)}{2}$ e la maſſima $px - \frac{x(x-1)}{2}$, cioè $S = \frac{x(p+1)}{2}$, dove, ſe $x(p+1)$ ſarà num.° diſpari, non potendo aver luogo la ſomma fratta che riſulta da tale ipoteſi, due ſaranno i termini eguali di maſſimo num.° di maniere, de' quali il primo, che termina la parte aſcendente della ſerie, appartiene alla ſomma

$\frac{px+x-1}{2}$; l' altro, che comincia la diſcendente, appartiene alla ſomma che ſegue $\frac{px+x+1}{2}$; e queſte ſomme ſono neceſſariamente numeri interi: 4.° che eſprimendoſi la ſomma minima dalla formola $\frac{x(x+1)}{2}$, ſe s rappreſenterà qualunque delle ſomme fattibili, e t il poſto de' termini o nella ſerie delle ſomme o in quella delle maniere, ſi avrà generalmente $t=s+1-\frac{x^2-x}{2}$, onde il poſto del termine pel num.° maſſimo di maniere ſarà dato da queſta equazione $t=1+\frac{px-x^2}{2}$.

5. Premeſſe tutte queſte coſe, ſi ripigli in mano la ſerie (A); $1, 2, 3, 4, 5 \ldots p, p+1, p+2, p+3$ ecc. e ſi ragioni così. Le ſerie (B), (C), (D) ecc. proſeguirebbero ſempre colla lor légge, ſe non ſi voleſſe porre alcun limite ai termini di (A); ma facendo p il ſuo limite, tutte le maniere di formar le ſomme nella ſerie (A) ſenza confine, che naſcono dal combinare i termini $p+1$, $p+2$, ecc. cogli altri eſiſtenti nella ſerie che va ſino a p, dovranno eſſer tolte dai numeri eſpreſſi ne' termini corriſpondenti delle ſerie (B), (C) ecc.; il che verrà a formare una ſerie di ſottrazione che unita all' altre darà il vero numero delle maniere che eſige il problema. Ora è paleſe, che la legge delle ſuddette ſerie (B) ecc. reſta invariata dalla ſomma minima $\frac{x(x+1)}{2}$ ſino alla ſomma

$p+1+2+3\ldots+(x-1)=p+\frac{x^2-x}{2}$ la quale non ſi può formare con x termini coſicchè ſia un d' eſſi maggior di p. Ma a queſta ſuccede l' altra $p+1+\frac{x^2-x}{2}$, che oltre le maniere abbracciate dalla ſerie ſino a p potrebbe anch' eſſer formata dal termine $p+1$, che manca, combinato con

$1, 2, 3 \ldots\ldots x-1$. Dunque queſta maniera va ſottratta dal termine analogo alla ſomma $p+1+\frac{x^2-x}{2}$ nelle ſerie (B) ecc.; ed ecco l' ingreſſo della ſerie di ſottrazione il cui primo termine è 1, la quale comincia ad aver luogo, quando nelle ſuddette ſerie (B), (C) ecc. ſia l' indice dei termini $t=p+2-x$.

6. La ſomma che le vien dietro è $p+2+\frac{x^2-x}{2}$, la quale oltre il numero di maniere compreſo da' termini della ſerie limitata (A) potrebbe produrſi eziandio da $p+2$ combinato con $1+2+3\ldots+x-1$, e da $p+1$ combinato con $1+2+3\ldots+x-2+x$, oſſia combinato con $1+2+3\ldots+x-(x-1)$ che è lo ſteſſo. Siccome però queſti due modi per ragion de' termini $p+2$, $p+1$ che s' impiegano non entrano nel vero numero delle cercate maniere, così dai termini di (B) (C) ecc. che ſono al poſto $p+3-x$ van levate queſte 2 combinazioni. Andando innanzi colle ſomme, e ragionando ſimilmente ſi vedrà quante combinazioni devon ſottrarſi dai termini corriſpondenti delle ſerie (B), (C), cioè ſi verran formando le ſerie delle ſottrazioni ſecondo le diverſe ipoteſi di x.

7. Ecco il tipo de' modi da eſcluderſi dalle ſerie (B) ecc. ſecondo le diverſe ſomme o ſecondo i diverſi termini delle ſteſſe ſerie (B) ecc.

$$S=p+1+\frac{x^2-x}{2};\ t=p+2-x;\ \left\{p+1+1+2+3\ldots+x-1\right\}$$

$$S=p+2+\frac{x^2-x}{2};\ t=p+3-x;\ \left\{\begin{array}{l}p+2+1+2+3\ldots+x-1\\ p+1+1+2+3\ldots x-(x-1)\end{array}\right\}$$

$$S=p+3+\frac{x^2-x}{2};\ t=p+4-x;\ \begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}p+3+1+2+3\ldots+x-1\\ p+2+1+2+3\ldots+x-(x-1)\end{array}\right\}\\ \left\{\begin{array}{l}p+1+1+2+3\ldots+x+1-x-(x-1)\\ p+1+1+2+3\ldots+x-(x-2)\end{array}\right\}\end{array}$$

$$S=p+4+\frac{x^2-x}{2};\ t=p+5-x;\ \left\{\begin{array}{l} p+4+1+2+3\ldots+x-1 \\ p+3+1+2+3\ldots+x-(x-1) \\ p+2+1+2+3\ldots+x+1-x-(x-1) \\ p+2+1+2+3\ldots+x-(x-2) \end{array}\right.$$

$$\text{ecc.}\qquad\qquad \text{ecc.}\qquad \left\{\begin{array}{l} p+1+1+2+3\ldots+x+2-(x+1)-x-(x-1) \\ p+1+1+2+3\ldots+x+1-x-(x-2) \\ p+1+1+2+3\ldots+x-(x-3) \end{array}\right.$$

$$\text{ecc.}$$

Un po' di rifleſſione farà trovare le combinazioni da eſcluderſi per le ſomme ulteriori; ma non ſi dee già credere, che tutte le combinazioni qui notate, e le altre che ſi poſſon trovare abbian luogo per ciaſcuna delle ſerie *(B)*, *(C)* ecc. che competono alle particolari ipoteſi di x. La ſerie di maniere che conveniſſe al numero indefinito x di termini che ſi prendono in ſomma le ammetterebbe tutte, ma ove a x ſi diano i valori di 1, 2, 3 ecc., debbonſi rigettare dalle notate tutte quelle combinazioni che ſon contrarie all' ipoteſi del valore che ſi è dato a x, e formeranſi per tal modo le vere ſerie di ſottrazione. Mi ſpiego più chiaramente con qualche eſempio. Sia in primo luogo $x=1$. La ſerie di ſottrazione ha il ſuo ingreſſo, quando $s=p+1=t$, cioè a quella ſomma che nella ſerie *(A)* limitata a p è fuor delle ſomme fattibili. Dunque la ſerie *(B)* ſino al termine il cui poſto è p contiene i veri numeri delle maniere per far tali ſomme oſſia ciaſcun termine della ſerie *(A)*. Ma ſe la ſerie *(B)* ſi vuol conſiderare come nata dalla ſerie *(A)* ſenza limite, anche ai termini $p+1$, $p+2$, $p+3$ ecc. di queſt' ultima corriſponderanno 1, 1, 1 ecc. nella prima, i quali devon eſſer diſtrutti dalla ſerie di ſottrazione, onde ſi verifichi la condizione del problema, che non ammettendo in *(A)* termine maggior di p, devon eſſer zero le maniere onde formare $p+1$, $p+2$ ecc. Il perchè è chiaro, che la ſerie di ſottrazione cominciando il ſuo ingreſſo all' indice $p+1$ de' termini in *(A)* debb' eſſere 1, 1, 1, 1 ecc., con che ſi annullano le maniere per formare $p+1$, $p+2$ ecc. ſino all' infinito. Con ciò pare che non concordino le maniere generali notate al principio di queſto §. e coſtituenti la ſerie generale di ſottrazione, ſecondo la quale i primi termini dovrebber eſſere 1, 2, 4, 7 ecc. Deeſi però avvertire

che

che alcune delle generali combinazioni ivi notate non ſalvano la condizione che nella ſerie (A) ſi debba prendere un ſol termine, e quindi non vanno computate. Alla ſomma $p+1$ appartiene la combinazione $p+1+1+2+3\ldots+0$ il che vuol dire che al termine $p+1$ non va unito neſſun termine della ſerie $1, 2, 3\ldots x-1$, come appunto richiede l' ipoteſi di $x=1$. Perciò alla ſomma $p+1$ ſpetta realmente nella ſerie di ſottrazione il termine 1. Per la ſeguente $p+2$ abbiamo in genere 2 combinazioni da ſottrarre; $p+2+1+2+3\ldots+0$; $p+1+1-0$. La prima va d' accordo coll' ipoteſi per la ragion ſopraddetta, ma non già la ſeconda, perchè al termine $p+1$ ſi congiunge l' altro termine 1 che ſi prende nella ſerie $1, 2, 3\ldots x$, e ſi leva zero, cioè non levandoſi alcun altro termine, ſi vengono a prendere realmente 2 termini della ſerie (A), il che è contrario all' ipoteſi di $x=1$. Ommeſſa pertanto queſta 2.ª combinazione, anche per la ſomma $p+2$ avremo il termine nella ſerie di ſottrazione che ſarà 1. Uſando di ſimile raziocinio per le ſomme $p+3$, $p+4$ ecc. e i numeri di combinazioni corriſpondenti, ſi vedrà che queſti ſaranno tutti 1, e che ſarà la ſerie di ſottrazione 1, 1, 1, 1 ecc.

8. Pongaſi $x=2$, e non incontrandoſi contrarietà alcuna all' ipoteſi pei primi 2 termini della ſerie generale di ſottrazione competenti alle ſomme $p+2$, $p+3$, ſaranno eſſi 1, 2. La ſomma però $p+4$ riceve ſenza contraddizione le 3 prime maniere notate nella ſerie generale, ma ricuſa la 4.ª, perchè eſſa verrebbe ad eſſer formata da $p+1+1+2-0$, cioè da 3 termini della ſerie (A) quando l' ipoteſi vuol che ſian 2. Così alla ſeguente ſomma $p+5$ convengono per una ragion ſimile le 3 prime combinazioni e la 5.ª, e non la 4.ª, la 6.ª e la 7.ª E ſe ſi continueranno i termini della ſerie generale di ſottrazione, ſi vedrà che queſta adattata all' ipoteſi di $x=2$ ſarà del tenore ſeguente; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ecc.

9. Suppoſto $x=3$, e fiſſate le prime 3 ſomme che ſpettano ai primi 3 termini della ſerie di ſottrazione, e ſono $p+4$, $p+5$, $p+6$, i primi 3 termini della ſerie generale ſuddetta, cioè 1, 2, 4 ſono giuſtiſſimi. Non così il 4.° della ſomma $p+7$, nel quale non va computata l' ultima

combinazione $p+1+1+2+3\ldots+x-(x-3)$, oſſia $p+1+1+2+3-0$, perchè 4 ſarebbero i termini di (A) preſi in ſomma; ma ſolo le 6 precedenti. Per queſta ipoteſi la ſerie di ſottrazione ſi troverà eſſere 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20 ecc. Ove poi per parecchj altri termini ſi continui la ſerie generale di ſottrazione, per trar da queſta le particolari ſerie che riguardan le ipoteſi de' valori numerici dati a x ſi oſſerverà valer queſta regola. Cominciando dall' ipoteſi di $x=2$, da' numeri generali delle maniere ſi eſcluderanno tutte quelle combinazioni, nelle quali appariſce il binomio compoſto della differenza tra x e il valor dell' ipoteſi dato a x, oppure della differenza tra x e un valore maggiore del valore dato a x, ammettendo tutte le altre. Così poſto $x=2$, delle 4 combinazioni del 5.° termine nella ſerie generale delle ſottrazioni, va rifiutata l'ultima, perchè in eſſa appariſce il binomio $x-2$; e delle 7 combinazioni che coſtituiſcono il 4.° termine non ſi dee tener conto della 4.ª, 6.ª e 7.ª perchè contengono i binomj $x-2$, $x-3$. Con tali avvertenze ci verrà fatto di ſtabilire per le particolari ipoteſi di x le ſeguenti

Prime ſerie di ſottrazione.

$x=1$; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 ecc.....(G)
$x=2$; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ecc.....(H)
$x=3$; 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20 ecc.....(I)
$x=4$; 1, 2, 4, 7, 11, 16, 23, 31 ecc.....(L)
$x=5$; 1, 2, 4, 7, 12, 18, 27, 38 ecc.....(M)
ecc. ecc.

10. In queſte ſerie ſi manifeſta una proprietà ſimile a quella delle altre (B), (C), (D) ecc. (§. 2.). La 2.ª (H) naſce dalla 1.ª (G) replicata nella guiſa che ſi è poſta in pratica colle prime, ma cogl' intervalli d' un ſol termine, come qui ſi vede.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & \\
 & & 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & \text{ecc.}\ldots\ldots(H) \\
 & & & & 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & \\
 & & & & & & 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & \\
 & & & & & & & & 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & \\
 & & & & & & & & & & 1 & , & 1 & , & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & , & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & & , & 1 &
\end{array}$$

La ſomma delle colonne verticali viene appunto a formare la ſerie 1, 2, 3, 4, 5 ecc., cioè la 2.ª (H). Così la ſerie (H) replicata coll' intervallo di 2 termini produce la 3.ª ſerie (I). Eccone la figura,

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 & , & 7 & , & 8 & \\
 & & & & 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 & \text{ecc.}\ldots\ldots(I) \\
 & & & & & & & & 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & , & 2 &
\end{array}$$

All' iſteſſo modo continuando le figure della ſerie (I) replicata coll' intervallo di 3 termini ſi ottiene la ſerie (L).

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & , & 2 & , & 4 & , & 6 & , & 9 & , & 12 & , & 16 & , & 20 & \\
 & & & & & & 1 & , & 2 & , & 4 & , & 6 & , & 9 & \text{ecc.}\ (L) \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & , & 2 &
\end{array}$$

E generalmente per avere la ſerie ſpettante alla ipoteſi x biſognerà nel modo ſuddetto far la replica della ſerie che riguarda l' ipoteſi di $x-1$ coll' intervallo di $x-1$ termini. Quindi ſi deduce a un colpo d' occhio per queſte ſerie una legge ſimile a quella che oſſervammo nelle ſerie (B), (C) ecc. Per eſempio nella 2.ª (H) qualunque termine t naſce dal precedente e dal termine ſovrappoſto a t nella prima fila (G) uniti in ſomma. Così ogni termine t della 3.ª (I) è l' aggregato del termine diſtante di due dal cercato e del termine che gli ſta ſopra nella fila (H); e ad avere qualunque termine t di (L) biſognerà unire il termine della ſteſſa fila (L) diſtante di tre termini al ſovrappoſto in (I). Onde uſando i ſimboli ſteſſi del §. 3. generalmente per la ſerie che compete a x varrà l' equazione $Z^{(t,x)} = Z^{(t-(x-1),x)} + Z^{(t,x-1)}$, ovvero ſoſtituendo $x+1$ in vece di x; $Z^{(t,x+1)} = Z^{(t-x,x+1)} + Z^{(t,x)} \ldots\ldots (b)$.

11. Quando $x=1$, abbiam veduto (§. 7), che coll' unica ſerie di ſottrazione 1, 1, 1, 1 ecc., la quale ha il ſuo

ingreſſo al num.° de' termini $p+1$ della ſerie (B) ſi fanno ſvanire tutte le maniere di formar le ſomme $p+1$, $p+2$, $p+3$ ecc. della ſerie illimitata (A), reſtando ſolo le altre ſino a p. Ora, fatto $x=2$, ſi potrà egli dire, che facendo entrar la ſerie di ſottrazione (H) al termine $t=p+2-x=p$ della ſerie (C) prodotta indefinitamente, queſta baſti ad annullare in (C) tutti i termini, che corriſpondono alle ſomme $2p$, $2p+1$, $2p+2$ ecc, che vanno eſcluſe dalla ſerie delle ſomme nella ſerie (A) limitata a p, perchè la ſomma maſſima è $p+p-1=2p-1$? Veggiamolo. Alla ſomma $2p$ corriſponde nella ſerie (C) $t=2p-2$ (§. 4). Dunque eſſendo eſſo poſto pari, ſarà, per l' indole della ſerie 1, 1, 2, 2, 3, 3 ecc., ivi ſituato il 2.° dei valori eguali $p-1$. Per la legge poi dell' ingreſſo della ſerie di ſottrazione (H) a quel termine dell' altra (C) che è nel poſto p (§. 7), è evidente, che ſarà pure $p-1$ il termine della ſerie aritmetica (H) che è analogo all' altro $p-1$ della ſerie (C). Onde la combinazione di queſte due ſerie formerà la ſeguente figura;

(C)....1, 1, 2, 2, 3, 3, ... $p-1$, p, p, $p+1$, $p+1$, $p+2$, $p+2$ ecc.
(H)... ... $-(p-1)$, $-p$, $-(p+1)$, $-(p+2)$, $-(p+3)$, $-(p+4)$, $-(p+5)$ ecc.
(C). . . . . 1, 1, 2, 2, 3, ecc.

Qui ſi vede che i due termini $p-1$, p della ſerie (C) vengono diſtrutti dagli analoghi della ſerie (H), ma non così ſuccede ne' ſuſſeguenti p, $p+1$, $p+1$ ecc., de' quali maggiori rieſcono que' che vi corriſpondono nella ſerie (H). Egli è dunque neceſſaria una 3.ª ſerie (C'), i cui termini combinati con quelli delle altre due vengano a diſtruggerſi ſcambievolmente. Queſta ſerie è di addizione; comincia ad avere il ſuo ingreſſo alla ſomma $2p+2$, oſſia quando in (C) è il num.° de' termini $t=2p$; e un leggiero eſame la farà trovar la ſteſſa che (C), nè vi è biſogno d' altro che di queſte 3 ſerie.

12. L' ipoteſi di $x=3$ ſomminiſtra per prima ſerie; 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7 ... (D) e l' ingreſſo della ſerie di ſottrazione (I) è al num.° de' termini $t=p+2-x=p-1$. Ora, poichè ſi ſuppone che ſi prendano 3 termini in ſomma della ſerie (A), ſi vede che p non può eſſere minore di 3, e che 6 è la minima ſomma, qualunque ſia p. Quindi ſe

$p=3$, le maniere di formar le ſomme 7, 8, 9 ecc. devono eſſer zero, e la ſerie (I) comincia ad aver luogo quando $t=2$. Onde, collocata prima di tutte la ſerie delle ſomme, la diſpoſizione delle 2 ſerie (D), (I) dev' eſſere la ſeguente;

6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18	ecc.
1,	1,	2,	3,	4,	5,	7,	8,	10,	12,	14,	16,	19	ecc. ..... (D)
	−1,	−2,	−4,	−6,	−9,	−12,	−16,	−20,	−25,	−30,	−36,	−42	ecc. ..... (I)
			1,	2,	4,	6,	9,	12,	16,	20,	25,	30	ecc. ..... (I)
						−1,	−1,	−2,	−3,	−4,	−5,	−7	ecc. ..... (D)

e fuori del 1°. termine 1 nella ſerie (D), dalle ſerie ſuſſeguenti devono rimaner diſtrutti tutti gli altri. Le 2 prime ſerie (D), (I) ſanno ottenere l' intento ſino al 4.° termine di (D); ma per queſto e pei ſuſſeguenti è neceſſaria la ſottopoſizione di una 3.ª ſerie poſitiva, i cui 3 primi termini eſſendo i medeſimi che i 3 primi di (I), mi valgo di queſta ſteſſa per 3.ª ſerie, la quale però non mi fa ſvanire gli aggregati de' termini analoghi $7-12+6$; $8-16+9$ ecc. Egli è dunque duopo impiegare una 4.ª ſerie negativa, che ha il ſuo principio al 7.° termine di (D) che ſi troverà eſſere la replica della ſteſſa prima ſerie (D) e baſterà unita alle 2 precedenti per fare ſvanire tutti i termini di (D), detratto il primo. Facciaſi rifleſſione all' ingreſſo di queſte ſerie. La 2.ª (I) entra dopo un termine della 1.ª (D); la 3.ª (I) dopo 2 termini della 2.ª e la 4.ª (D) dopo 3 termini della 3ª; oſſia per la 2ª, 3ª, 4ª, quando $t=p-1$; $t=2p-2$; $t=3p-2$. Se facciam $p=4$, l' ultima ſomma delle fattibili è 9, che deve avere una ſola maniera, ond' eſſer formata; e perciò le maniere delle altre ſomme 10, 11, 12 ecc. devono annichilarſi per mezzo de' termini delle altre 3 ſerie. In tal caſo entra la 1.ª ſerie (I) di ſottrazione, quando $t=3$, cioè dopo 2 termini della 1.ª (D). Onde, diſcorrendo colla ſcorta dell' antecedente eſempio, la 3.ª ſerie avrà il ſuo ingreſſo dopo 3 termini della 2ª; la 4.ª dopo 4 della 3.ª; e con ciò ſi otterranno le ricercate diſtruzioni. Ecco la figura di queſt' ipoteſi:

6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18	ecc.
1,	1,	2,	3,	4,	5,	7,	8,	10,	12,	14,	16,	19	ecc. .... (*D*)
		−1,	−2,	−4,	−6,	−9,	−12,	−16,	−20,	−25,	−30,	−36	ecc. .... (*I*)
					1,	2,	4,	6,	9,	12,	16,	20	ecc. .... (*I*)
									−1,	−1,	−2,	−3	ecc. .... (*D*)

dove pure ſi verifica, che gl' ingreſſi delle ſerie (*I*), (*I*), (*D*) corriſpondono nella prima agl' indici de' termini $t=p-1$; $t=2p-2$; $t=3p-2$; il che ha luogo, qualunque ſia il valore che diamo a p, eſſendo $x=3$.

13. Si è veduto, che nell' ipoteſi di $x=1$ colla ſerie (*B*) va combinata l' unica ſerie di ſottrazione, che è la ſteſſa (*B*), e comincia ad aver luogo, quando nella 1.ª ſerie ſia $t=p+1$ (§. 7); che, poſto $x=2$, la ſerie (*C*), che le compete, deeſi unire coll' altra di ſottrazione (*H*), la quale entra al termine $t=p$, e poi colla 3.ª di addizione, che è la ſteſſa (*C*) e principia, quando $t=2p$ (§. 11): che fatto $x=3$, la ſerie (*D*) dev' eſſere accompagnata da altre 3, la prima delle quali (*I*) di ſottrazione entra al termine $t=p-1$; la 2.ª di addizione, che è la replica di (*I*) entra al termine $t=2p-2$; finalmente la 3.ª di nuova ſottrazione entrando al termine $t=3p-2$ non è altro che il ritorno della ſerie (*D*). Raccoglierem quindi guidati dall' analogia, che nella ſuppoſizione di $x=4$ ſarà meſtieri alla 1.ª ſerie (*E*) dare per compagne altre 4 ſerie; la 1.ª di ſottrazione (*L*) che avrà il ſuo ingreſſo, quando in (*E*) ſia $t=p-2$, poſcia una 2.ª che comincia quando $t=2p-4$; indi una 3.ª, quando $t=3p-5$, che ſarà la replica di (*L*); da ultimo, ove $t=4p-5$ una 4.ª che ſarà il ritorno di (*E*). Per conoſcere i termini della ſeconda delle aggiunte alla prima (*E*) ci ſervirem della più piccola ipoteſi di $p=4$, il che fa eſſer 10 la ſomma unica cui ſpetta 1 nella ſerie delle maniere, dovendo ſvanir tutte le altre che riguardano le ſomme ſuſſeguenti 11, 12, 13 ecc. ſenza limite. Ora, ſcritta diſteſamente la ſerie (*E*), ſott' eſſa dopo un termine ſi collochi la ſerie (*L*) negativa; dopo 2 termini di (*L*) s' intendan poſti i termini della ſerie (*O*) poſitiva che cerchiamo: così dopo 3 termini di (*O*) ritorni (*L*) negativa, e dopo 4 di (*L*) ritorni (*E*) poſitiva. Con tale diſpoſizione delle 5 ſerie dovendo ſvanire tutte le colonne verticali, ſi troverà eſſere

la ſerie (*O*) 1, 2, 5, 8 ecc. come nell' aggiunto ſchema;

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	ecc.
1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64	72	ecc. ... (*E*
	-1	-2	-4	-7	-11	-16	-23	-31	-41	-53	-67	-83	-102	-123	-147	-174	-204	ecc. ... (*L*
			1	2	5	8	14	20	30	40	55	70	91	112	140	168	204	ecc. ... (*O*
						-1	-2	-4	-7	-11	-16	-23	-31	-41	-53	-67	-83	ecc. ... (*L*
										1	1	2	3	5	6	9	11	ecc. ... (*E*

E queſta ſerie (*O*) riuſcirà ſempre la medeſima, ove cangiando ſuppoſizione ſi faccia $p = 5$, 6, 7 ecc. e ſi mettano una ſotto l' altra le ſerie coll' ordine de' loro ingreſſi ai numeri de' termini $t = p - 2$, $2p - 4$, $3p - 5$, $4p - 5$, ſiccome ſopra è ſtato notato.

14. Camminando ſulle traccie ſegnate ne' precedenti §§. ci verrà fatto di ſcoprire, che all' ipoteſi di $x = 5$, per la quale ſi eſigon 6 ſerie coll' alternativa del poſitivo e del negativo, la 3.ª di addizione che le appartiene è 1, 2, 5, 9, 16, 25, 39, 56 ecc. e che ad eſſa è eguale la 4.ª di nuova ſottrazione, ritornando le 2 prime nelle altre 2 ſuſſeguenti. E l' eſame di ciò che ſi è trovato ſin' ora ci farà conoſcere la regola generale per qualunque ipoteſi di p e di x. Eſibiſco per comodo dell' indagine ſecondo i diverſi valori di x le ritrovate

Prime ſerie di addizione

$x = 2$; 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 ecc. .... (*C*)
$x = 3$; 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20 ecc. .... (*I*)
$x = 4$; 1, 2. 5, 8, 14, 20, 30, 40, ecc. .... (*O*)
$x = 5$; 1, 2, 5, 9, 16, 25, 39, 56 ecc. .... (*P*)
ecc. ecc.

e veggo che la 2.ª (*I*) può naſcere dalla 1.ª (*C*) ſottopoſta e replicata ſempre cogl' intervalli d' un termine dalla anteriore, come ſi vede qui appreſſo;

1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 ecc.,
1, 1, 2, 2, 3, 3, 4 ecc.
1, 1, 2, 2, 3, 3 ecc.
1, 1, 2, 2, 3 ecc.
1, 1, 2, 2 ecc.
1, 1, 2 ecc.
1, 2 ecc.
1 ecc.

facendo poi la ſomma delle colonne verticali. Così la 3.ª (O) riſulta dalle ſomme de' termini verticali della 2.ª (I) replicata cogl' intervalli di 2 termini. La 4.ª (P) naſce da (O) ripetuta cogl' intervalli di 3 termini; e però ſapremo come dee naſcere la 5.ª, 6.ª ecc. che corriſpondono a $x=6$, $x=7$ ecc. Tal proprietà poi ſi riſolve in una legge che oſſervano queſte ſerie ſimile a quella, che hanno le ſerie (B), (C), (D) ecc. e le prime di ſottrazione (G), (H), (I) ecc. I termini della 2.ª (I) in queſto §. naſcono dalla unione del precedente al cercato con quello che al cercato è ſovrappoſto nella 1.ª ſerie (C). Per avere qualunque termine della 3.ª (O) conviene unire al ſovrappoſto in (I) quel che in (O) è diſtante a ſiniſtra di due termini da quel che ſi vuole; per la 4.ª (P) al ſuo verticale in (O) quel che in (P) è diſtante di 3 termini; ecc. Dunque chiamato t il poſto del termine per queſte ſerie di addizione, e uſando i ſimboli del Sig. *la Place*, ſarà $Z^{(t,x)}=Z^{(t-(x-2),x)}+Z^{(t,x-1)}$, ovvero $Z^{(t,x+2)}=Z^{(t-x,x+2)}+Z^{(t,x+1)}$ .... (c).

15. Per le ſeconde ſerie di ſottrazione non ci verrà meno la regola. Preſentandole conforme i valori eſaminati di x, ci appariſcono come ſtanno qui eſpoſte.

Seconde ſerie di ſottrazione

$x=3$; 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 ecc. .... (D)
$x=4$; 1, 2, 4, 7, 11, 16, 23, 31 ecc. .... (L)
$x=5$; 1, 2, 5, 9. 16, 25, 39, 56 ecc. .... (P),
ecc. ecc.

e la 2.ª (L) vien prodotta dalla replica continua di (D) coll' intervallo d' un termine; la 3.ª (P) dalla ripetizione di (L) coll' intervallo di 2 termini ecc; la qual proprietà identificata coll' altra che eſprimeſi coll' equazione ſimbolica farà valere per queſte ſeconde ſerie di ſottrazione l' ugualità; $Z^{(t,x)}=Z^{(t-(x-3),x)}+Z^{(t,x-1)}$ oſſia $Z^{(t,x+3)}=Z^{(t-x,x+3)}+Z^{(t,x+2)}$... (d). Uniſcanſi preſentemente le 4 equazioni trovate (a), (b), (c), (d); e ſarà aſſai chiaro dall' ordine che eſſe oſſervan ne' termini, che, chiamato λ il num.° delle ſerie di vicendevoli ſottrazioni e addizioni che ſi combinano colle prime compreſe dall' equazione (a) per coſtitui-

re il

re il num.° di maniere onde formare una delle fattibili ſomme, ſi avrà l' equazione generaliſſima;
$Z^{(t, x+\lambda)} = Z^{(t-x, x+\lambda)} + Z^{(t, x+\lambda-1)} \ldots\ldots (k)$, la quale abbraccia tutte queſte ſerie ſenza eſcludere le ſteſſe ſerie prime di (a), traendoſi l' equazione (a) dall' ipoteſi di $\lambda = 0$. Gl' ingreſſi poi di queſte ſerie riferiti al poſto del termine nella 1.ª ſerie di (a) vengono determinati dall' equazione generale $t = \dfrac{\lambda^2 + \lambda(1 + 2p - 2x) + 2}{2}$, alla quale (§. 4.) corriſponde la formola delle ſomme corriſpondenti;
$s = \dfrac{\lambda^2 + \lambda(1 + 2p - 2x) + x^2 + x}{2}$. Fatto v. g. $\lambda = 1$, la 1.ª ſerie di ſottrazione entra al termine della 1.ª ſerie delle maniere $= 2 + p - x$ oſſia alla ſomma $s = \dfrac{2 + 2p - x + x^2}{2}$; fatto $\lambda = 2$, la 2.ª ſerie di addizione ha il ſuo ingreſſo, quando nella prima di (a) ſia $t = 4 + 2p - 2x$, o quando diventa la ſomma $s = \dfrac{6 + 4p - 3x + x^2}{2}$, e così ſi dica delle rimanenti ſino alla ſerie $x.^{\text{eſima}}$. Onde, ſebbene ſi fa uſo dello ſteſſo ſimbolo t, i valori di t nelle equazioni (b), (c), (d) variano dal 1.° t cosicchè chiamato t^λ l' indice de' termini nella ſerie del valor generico λ, ſarà
$t^\lambda = t - \dfrac{\lambda^2 - \lambda(1 + 2p - 2x)}{2}$.

16. Rimane ora che s' integri l' equazione (k) perchè ſi poſſa eſibire il termine generale di tutte le mentovate ſerie. Facendo pertanto che $\alpha_{x+\lambda}$ rappreſenti una funzione di x, e l' eſpreſſione $\pi.\alpha_{x+\lambda}$ indichi il prodotto di tutti i valori della funzione $\alpha_{x+\lambda}$ che competono alle ſucceſſive ipoteſi di $x = 1, 2, 3 \ldots, x$, cioè ſia
$\pi.\alpha_{x+\lambda} = \alpha_{1+\lambda} \cdot \alpha_{2+\lambda} \cdot \alpha_{3+\lambda} \cdot \alpha_{4+\lambda} \ldots \alpha_{x+\lambda}$, dal che naſce
$\pi.\alpha_{x-1+\lambda} = \alpha_{1+\lambda} \cdot \alpha_{2+\lambda} \cdot \alpha_{3+\lambda} \ldots \alpha_{x-1+\lambda}$, e quindi

$\pi.\alpha_{\kappa+\lambda} = \alpha_{\kappa+\lambda}.\pi.\alpha_{\kappa-1+\lambda}$; ſi ponga $Z^{(t,\kappa+\lambda)} = b^t \pi.\alpha_{\kappa+\lambda}$, ove b^t è la podeſtà $t.^{esima}$ di una coſtante b. Sarà dunque $Z^{(t-\kappa,\kappa+\lambda)} = b^{t-\kappa}\pi.\alpha_{\kappa+\lambda}$; e $Z^{(t,\kappa+\lambda-1)} = b^t\pi.\alpha_{\kappa-1+\lambda}$; e introducendo queſti valori in (k), riſulterà l' equazione $b^t\pi.\alpha_{\kappa+\lambda} = b^{t-\kappa}\pi.\alpha_{\kappa+\lambda} + b^t\pi.\alpha_{\kappa-1+\lambda}$, ovvero (dopo la diviſione per b^t, la ſoſtituzione di $\alpha_{\kappa+\lambda}.\pi.\alpha_{\kappa+\lambda-1}$ in vece di $\pi.\alpha_{\kappa+\lambda}$ e la nuova diviſione per $\pi.\alpha_{\kappa+\lambda-1}$) l' equazione

$\alpha_{\kappa+\lambda} = b^{-\kappa}\alpha_{\kappa+\lambda} + 1$, cioè $\alpha_{\kappa+\lambda} = \frac{1}{1-b^{-\kappa}}$; e però

$\pi.\alpha_{\kappa+\lambda} = \frac{1}{(1-b^{-1})(1-b^{-2})(1-b^{-3})\ldots(1-b^{-\kappa})}$. Ora potendoſi rappreſentare il denominatore di queſta frazione colla formola generica $1 + cb^{-1} + eb^{-2} + fb^{-3}$ ecc. nella quale c è l' aggregato delle radici contenute dai binomj $1-b^{-1}$; $1-b^{-2}$ ecc....., $1-b^{-\kappa}$, e preſe negativamente; e l' aggregato di tutti gli ambi delle medeſime radici; f quello de' terni preſi negativamente, ecc., ſarà pure

$\pi.\alpha_{\kappa+\lambda} = \frac{1}{1+cb^{-1}+eb^{-2}+fb^{-3} \text{ ecc.}}$ .....(y); onde coll' attual diviſione ridotta queſta frazione in ſerie, potrà $\pi.\alpha_{\kappa+\lambda}$ aſſumere un valore della ſeguente forma;

$\pi.\alpha_{\kappa+\lambda} = 1 + Nb^{-1} + N'b^{-2} + N''b^{-3}$ ecc.........(z).

Nelle 2 diverſe eſpreſſioni di $\pi.\alpha_{\kappa+\lambda}$ ſi paſſi ai logaritmi, e avrem per (z); $l\pi.\alpha_{\kappa+\lambda} = l(1 + Nb^{-1} + N'b^{-1} + N''b^{-3}$ ecc.), e per (y); $l\pi.\alpha_{\kappa+\lambda} = l1 - l(1 + cb^{-1} + eb^{-2} + fb^{-3}$ ecc.). Col prendere poi i differenziali facendo variar b troveremo

$$-\frac{b^2 D.\pi\alpha_{\kappa+\lambda}}{d.b\pi.\alpha_{\kappa+\lambda}} = \frac{N' + N\,b^{-1} + N'''b^{-2} + N''''b^{-3} \text{ ecc.}}{1 + Nb^{-2} + N\,b^{-2} + N''b^{-3} \text{ ecc.}}$$ riſpetto a

(z); e $-\dfrac{b^2 D.\pi.\alpha_{\varkappa+\lambda}}{d.b\pi.\alpha_{\varkappa+\lambda}} = \dfrac{-c - 2eb^{-1} - 3fb^{-2} \text{ ecc.}}{1 + cb^{-1} + eb^{-2} + fb^{-3} \text{ ecc.}}$ riſpetto a (y). Si butti in ſerie queſt' ultima frazione, e naſce;

$$-\frac{b^2 D.\pi\alpha_{\varkappa+\lambda}}{db\pi\alpha_{\varkappa+\lambda}} = -c + (c^2 - 2e)b^{-1} + (3ce - c^3 - 3f)b^{-2} \text{ ecc.};$$

ſicchè ricordandoci di ciò che abbiamo detto al §. 40. della noſtra Memoria che precede queſt' Appendice, vedremo che chiamate r tutte le radici della noſtra formola; r' la ſomma de' loro quadrati; r'' quella de' loro cubi, ecc., avran luogo queſte equazioni; $r = -c$; $r' = -cr - 2e$; $r'' = -cr' - er - 3f$; ecc., cioè $r = -c$; $r' = c^2 - 2e$; $r'' = 3ce - c^3 - 3f$; ecc. Laonde inferiremo eſſere

$$-\frac{b^2 D.\pi\alpha_{\varkappa+\lambda}}{db\pi\alpha_{\varkappa+\lambda}} = r + r'b^{-1} + r''b^{-2} + r'''b^{-3} + r''''b^{-4} \text{ ecc.}$$

$= \dfrac{N' + N''b^{-1} + N'''b^{-2} + N''''b^{-3} \text{ ecc.}}{1 + N'b^{-1} + N''b^{-2} + N'''b^{-3} \text{ ecc.}}$, e i valori di N', N'', N''' ecc. ſi renderan noti colla riſoluzione delle ſeguenti neceſſarie equazioni, $N' = r$; $2N'' = N'r + r'$; $3N''' = N''r + N'r' + r''$; $4N'''' = N'''r + N''r' + N'r'' + r'''$ ecc., che procedono con legge chiara; ove prima ſi trovi il modo di eſibire i valori di r, r', r'' ecc.

17. Ciò ſi ottiene ſenza difficoltà coll' inveſtigare prima per ciaſcun de' binomj, $1 - b^{-1}$, $1 - b^{-2}$ ..., $1 - b^{-\varkappa}$ la ſomma delle radici, quella de' lor quadrati, cubi ecc., e far poi la ſomma delle ſomme. Rivolgeremci pertanto al teorema analitico del §. 40, il quale, ſtabilito che ſia; $1 + Ab^{-1} + Bb^{-2} + Cb^{-3} \ldots + \gamma b^{-\varkappa} = 0 \ldots (i)$, e fatto R la ſomma delle radici di queſta ugualità, R' la ſomma de' loro quadrati, R'' quella de' cubi, ecc. ſino a R^{k-1} che rappreſenta la ſomma delle podeſtà $k.^{esime}$ delle ſteſſe radici, ci ſomminiſtra l' equazione
$R^{k-1} = -Ar^{k-2} - Br^{k-3} - Cr^{k-4} \ldots - kX$, in cui X ſignifica il coefficiente che in (i) è al num.° de' termini $k+1$. Si prenda ora in mano il 1.° binomio $1 - b^{-1}$ che

confrontato coll' equazione (i) dà $x = 1$, $X = -1$. Dunque in (l) fatto ſucceſſivamente $k = 1, 2, 3, 4$ ecc. ſi troverà $R = 1$, $R' = 1$, $R'' = 1$, $R''' = 1$ ecc. Pel 2.° binomio poi $1 - b^{-2}$ biſogna fare in (i) $x = 2$, $A = 0$; e la ſoſtituzione in (l) di 1, 2, 3 ecc. in vece di k farà che ſia $R = 0$; $R' = 2$; $R'' = 0$; $R''' = 2$; $R'''' = 0$, $R''''' = 2$ ecc. Così al 3.° binomio $1 - b^{-3}$, pel quale $x = 3$, $A = 0$, $B = 0$, compete $R = 0$; $R' = 0$; $R'' = 3$; $R'''' = 0$, $R''''' = 0$, $R'''''' = 3$ ecc. ecc. E diremo generalmente che reſpettivamente all' ultimo binomio $1 - b^{-x}$ che può eſſere riſguardato come il termine generale di tutti i precedenti, ſarà $R^{x} = x$; $R^{2x} = x$; $R^{3x} = x$ ecc., ma $R = 0$; $R' = 0$; $R'' = 0$ ecc. ſino a $R^{x-1} = 0$, annullandoſi eziandio le ſomme intermedie tra R^{x} e R^{2x}, tra R^{2x} e R^{3x} ecc. Per preſentar tutto ſotto un ſol punto di viſta ſi ſchierino orizzontalmente i ſimboli di queſte ſomme, e ad eſſi ſi ſottopongano i valori trovati mettendo rincontro a queſti i corriſpondenti binomj, come qui ſi vede;

	R,	R',	R'',	R''',	R'''',	R''''',	R'''''' ecc.
$1 - b^{-1}$	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1 ecc.
$1 - b^{-2}$	0,	2,	0,	2,	0,	2,	0 ecc.
$1 - b^{-3}$	0,	0,	3,	0,	0,	3,	0 ecc.
$1 - b^{-4}$	0,	0,	0,	4,	0,	0,	0 ecc.
$1 - b^{-5}$	0,	0,	0,	0,	5,	0,	0 ecc.
$1 - b^{-6}$	0,	0,	0,	0,	0,	6,	0 ecc.
$1 - b^{-7}$	0,	0,	0,	0,	0,	0,	7 ecc.
			ecc.				

e per la chiara legge che oſſervano queſte file orizzontali potendoſi ingrandire le colonne verticali quanto ſi vuole, ſaranno in pronto anche le ſomme delle ſomme cioè i valori di r, r', r'', r''' ecc. che appartengono alle diverſe ipoteſi di x. Sia per eſempio $x = 3$, ed è evidente, che ſi dee tener conto ſol delle 3 prime file, onde fatte le ſomme de' numeri verticali ſi avrà $r = 1$, $r' = 3$, $r'' = 4$, $r''' = 3$, $r'''' = 1$, $r''''' = 6$, $r'''''' = 1$ ecc., ma ſe $x = 5$, preſe verticalmente le ſomme nelle 5 file, riſulta $r = 1$, $r' = 3$, $r'' = 4$, $r''' = 7$, $r'''' = 6$, $r''''' = 6$ ecc. Sarà quindi noto il metodo che ſi deve tenere per gli altri caſi.

18. Non eſſendoci più ignoti i valori de' coefficienti N', N'' ecc. nell' equazione $\pi.\alpha_{n+\lambda} = 1 + N b^{-1} + N b^{-2}$ $+ N''b^{-3}$ ecc. .... (z), per avere il termine generale dell' altra (k) moltiplicheremo (z) per b^t; e proviene $b^t \pi \alpha_{n+\lambda}$ oſſia $Z^{(t,n+\lambda)} = b^t + N b^{t-1} + N' b^{t-2} + N''' b^{t-3}$ ecc., dove, perchè t è dato per le ſomme s e pel num.° de' termini x, ſaranno b^t, b^{t-1}, b^{t-2} ecc. funzioni di s e di x. Cominciamo dal caſo delle prime ſerie (B), (C), (D) ecc. (§. 2.), per le quali debb'eſſere $\lambda = 0$ (§. 15.). Eſpreſſa dunque la funzione b^t col ſimbolo $f^{(t)}$, riſulterà $Z^{(t,n)} = f(t) + N f(t-1)$ $+ N' f(t-2)$ ecc., Ora ſupponendo $x = 1$, diventa

$$\pi.\alpha_{n+\lambda} = \frac{1}{1 - b^{-1}} = 1 + b^{-1} + b^{-2} + b^{-3} \text{ ecc., e}$$

$Z^{(t,n)} = Z^{(t,1)} = b^t + b^{t-1} + b^{t-2}$ ecc., ovvero $Z^{(t,1)} = f(t)$ $+ f(t-1) + f(t-2)$ ecc., il che fa eſſere $N' = 1$, $N'' = 1$, $N''' = 1$ ecc., onde ancora ſi trae $Z^{(t-1,1)} = f(t-1)$ $+ f(t-2) + f(t-3)$ ecc., e in conſeguenza $Z^{(t,1)} - Z^{(t-1,1)} = f(t)$. Se t è negativo, o zero, ſiccome a termine nullo o negativo non può corriſpondere alcuna delle ſomme fattibili, che nella ipoteſi di $x = 1$ ſono i numeri 1, 2, 3 ecc. della ſerie (A), così ſarà $Z^{(t,1)} = 0$; $Z^{(t-1,1)} = 0$. E quindi $f(t) = 0$. Se t è poſitivo ma in modo che ſia $t > 1$, avremo $Z^{(t,1)} = 1$, $Z^{(t-1,1)} = 1$ come rilevaſi dalla ſerie (B). Onde anche con tali ipoteſi ſarà ſempre $f(t) = 0$. Ma poſto $t = 1$, abbiamo $Z^{(1,1)} - Z^{(0,1)} = f^{(1)}$, e ſiccome $Z^{(1,1)} = 1$; $Z^{(0,1)} = 0$, ſarà $f(1) = 1$. Queſto è pertanto l' unico caſo, in cui $f(t)$ ſia 1, in tutti gli altri qualunque funzione di t è zero. Preſa dunque la funzione generale di t, cioè $f(t-n)$, eſprimerà eſſa il valore 1 quando ſia $t - n = 1$, che dà $n = t - 1$. Ma nell'equazione $Z^{(t,n)} = f(t) + N f(t-1) + N' f(t-2)$ ecc., quel numero che ſotto la funzione ſi ſottrae da t è ſempre l' apice dell' N che gli corriſponde. Dunque ſvanendo tutte le altre funzioni, reſterà finalmente $Z^{(t,n)} = N^{t-1}$, che è il termine generale delle ſerie (B), (C) ecc.

19. Sopra queſto metodo, di cui ſi ſerve il Sig. *Paoli* nella ſua Memoria citata, faremo tra poco alcune noſtre ri-

fleſſioni, ma trattanto paſſeremo alla determinazione del ſimbolo generale $Z^{(t,x+\lambda)}$, per cui pure ſi ha l' equazione $Z^{(t,x+\lambda)}=b^t+N'b^{t-1}+N''b^{t-2}+N'''b^{t-3}$ ecc., o anche $Z^{(t,x+\lambda)}=f(t)+N'f(t-1)+N''f(t-2)$ ecc. Si ponga $x=1$, e per la ragione che diventa allora

$$\pi.\alpha_{x+\lambda}=\frac{1}{1-b^{-1}}=1+b^{-1}+b^{-2}+b^{-3} \text{ ecc.},$$ ſaranno N', N'', N''' ecc. eguali all' unità poſitiva; e quindi $Z^{(t,1+\lambda)}=f(t)+f(t-1)+f(t-2)+f(t-3)$ ecc.; $Z^{(t-1,1+\lambda)}=f(t-1)+f(t-2)+f(t-3)$ ecc. dalle quali equazioni traendoſi $Z^{(t,1+\lambda)}-Z^{(t-1,1+\lambda)}=f(t)$, ci reſta da determinare queſta funzione $f(t)$. Ora io oſſervo, che ſe $\lambda=1$, ſi fa $Z^{(t,1+\lambda)}=Z^{(t,2)}$, che ſpetta alla 2.ª ſerie (*H*) delle 1.ᵉ ſerie di ſottrazione, la quale è preciſamente la ſomma della 1.ª ſerie (*B*) nelle ſerie generali delle maniere. Se $\lambda=2$; $Z^{(t,1+\lambda)}=Z^{(t,3)}$ appartiene alla 2.ª ſerie (*I*) delle 1.ᵉ di addizione, che è pur la ſomma della 2.ª (*C*) delle ſuddette prime ſerie. Così, ſe $\lambda=3$, onde naſce $Z^{(t,1+\lambda)}=Z^{(t,4)}$, cui corriſponde la 2.ª ſerie (*L*) nelle ſeconde ſerie di ſottrazione, ſi vedrà che queſta è la ſomma della 3.ª ſerie (*D*) ecc. Dunque generalmente, nelle ſerie o di addizione o di ſottrazione, che competono al num. λ, quella che ha per termine generale $Z^{(t,1+\lambda)}$ ſarà la ſomma della ſerie che nelle ſerie generali delle maniere è al numero λ; e però $Z^{(t,1+\lambda)}-Z^{(t-1,1+\lambda)}$ è l' eſpreſſione del termine generale della ſteſſa ſerie, che vien denominata dal num.° λ. Ma (§. 18.) eſſo ſi è trovato $=N^{t-1}$. Dunque denotando con ${}^{\lambda}n$ il ſuddetto N, per indicare a qual ſerie appartiene, avremo $Z^{(t,1+\lambda)}-Z^{(t-1,1+\lambda)}={}^{\lambda}n^{t-1}=f(t)$, e però ${}^{\lambda}n^{t-2}=f(t-1)$; ${}^{\lambda}n^{t-3}=f(t-2)$ ecc. Quindi colle ſoſtituzioni ſarà $Z^{(t,x+\lambda)}={}^{\lambda}n^{t-1}+{}^{\lambda}n^{t-2}N'+{}^{\lambda}n^{t-3}N''+{}^{\lambda}n^{t-4}N'''\ldots+N^{t-4}$, E queſta formola abbraccia tutti i termini generali che competono a tutte le ſerie neceſſarie per la completa ſoluzione del noſtro problema.

20. Vogliaſi per eſempio il 5.° termine della 2.ª ſerie (*L*) delle ſeconde ſerie di ſottrazione, quando ſi prendono 4 numeri nella ſerie aritmetica 1, 2, 3, 4, 5...p. Sarà $x+\lambda=4$, e, perchè $\lambda=3$, $x=1$; in oltre $t=5$, e quindi

$Z^{(5,4)} = {}^3n'''' + {}^3n'''N' + {}^3n'N'' + {}^3n'N''' + N''''$. Ma perchè $x = 1$, diventa $N' = 1$, $N'' = 1$, $N''' = 1$, $N'''' = 1$. Dunque $Z^{(5,4)} = {}^3n'''' + {}^3n''' + {}^3n'' + {}^3n' + 1$. Si ſtabiliſcano le 3 ſerie delle podeſtà delle radici ſino al 4.° termine nel modo ſeguente.

R.	R',	R'',	R'''
1,	1,	1,	1
0,	2,	0,	2
0,	0,	3,	0

e ſommando le colonne verticali ſarà $r = 1$, $r' = 3$, $r'' = 4$, $r''' = 3$. Ma pel §. 16. cangiati gli N in ${}^3n$, abbiamo ${}^3n' = r$, ${}^3n'' = \frac{{}^3n'r + r'}{2}$; ${}^3n''' = \frac{{}^3n''r + {}^3n'r' + r''}{3}$; ${}^3n'''' = \frac{{}^3n'''r + {}^3n''r' + {}^3n'r'' + r'''}{4}$, mediante la ſoſtituzione de' valori delle r e la riſoluzione delle equazioni lineari che ne derivano, ſi ottiene ${}^3n' = 1$, ${}^3n'' = 2$, ${}^3n''' = 3$, ${}^3n'''' = 4$, e però il 5.° termine di $(L) = 4 + 3 + 2 + 1 + 1$, cioè $Z^{(5,4)} = 11$.

21. Si cerchi il 5.° termine della 3.ª ſerie (P) delle ſeconde di ſottrazione. Tal domanda fa ſubito eſſere $\lambda = 3$, $x = 2$, $t = 5$. Dunque, poichè i valori di ${}^3n'$, ${}^3n''$ ecc. ſon quei medeſimi che abbiam trovato nell' eſempio ſuperiore, ſoſtituendo avremo $Z^{(5,5)} = 4 + 3N' + 2N + N'' + N'''$. Debbonſi preſentemente trovare i valori di N', N'' ecc. che convengono all' ipoteſi di $x = 2$; al qual fine ſi faccia la ſolita figura numerica di due ſole file, come ſegue

R,	R',	R'',	R'''
1,	1,	1,	1
0,	2,	0,	2

dalla quale ſi ricava $r = 1$, $r' = 3$, $r'' = 1$, $r''' = 3$. Queſti valori ſoſtituiti nei generali di N del §. 16., ſomminiſtrano $N' = 1$, $N'' = 2$, $N''' = 2$, $N'''' = 3$, onde $Z^{(5,5)} = 4 + 3 + 4 + 2 + 3 = 16$.

22. Eſaminiamo preſentemente ſe i termini generali delle propoſte ſerie eſibiti da queſto ingegnoſo metodo abbiano realmente quelle qualità che competono al termine general d' una ſerie. E' noto a tutti i Geometri, che il termine

generale d' una ſerie non deve avere alcuna dipendenza, nè da termini antecedenti nella medeſima ſerie, nè molto meno da altre ſerie che, al caſo di ricorrenti doppie, precedan la data. Per meglio ſpiegarmi, ſe la ſerie variando in doppio ſenſo ſia tale, che le appartengano due variabili t, x, la prima delle quali rappreſenti il numero de' termini, x il numero delle file, il ſuo genuino termine generale ſarà una funzione di t, x tale che dati que' valori che ſi vogliono a queſte indeterminate, e introdotti nella funzione, ſomminiſtri eſſa il termine iſolato che ſi ricerca ſenza ſcorrimento nè per altri termini nè per altre file. Abbianſi per eſempio le ſerie qui eſpoſte,

	1,	2,	3,	4,	5 ...... t
1	1,	2,	3,	4,	5 ecc.
2	3,	5,	7,	9,	11 ecc.
3	8,	12,	16,	20,	24 ecc.
4	20,	28,	36,	44,	52 ecc.
5	48,	64,	80,	96,	112 ecc.
:	ecc.				
:					
x					

che hanno la proprietà compreſa dalla ſeguente equazione $Z^{(t,x)} = Z^{(t,x-1)} + Z^{(t+1,x-1)}$. Sarà facile il vedere, che la formola $2^{x-2}(2t+x-1)$ eſprime il termine generale di queſte ſerie. Ora ſaper ſi brami di qual valore ſia il 4.° termine della 5.ª fila. Dunque debb' eſſere $t=4$, $x=5$; e meſſi queſti valori nel ſuddetto termine generale, avremo $Z^{(4,5)} = 2^3(8+4) = 8.12 = 96$; il che ſi ottiene ſenza la neceſſità di conoſcere prima i precedenti termini 80, 64, 48, o qualunque altro numero delle file anteriori.

23. Ma queſto vantaggio non ſi ha coll' applicazione del metodo di cui abbiam fatto uſo in queſta Appendice al caſo del noſtro problema; la qual coſa appariſce chiaramente dall' iſteſſo termine generale $Z^{(t,x)} = N^{t-1}$ ſpettante alle prime ſerie (*B*), (*C*), (*D*) ecc. del §. 2. S' io voglio v. g. l' 8.° termine della 3.ª fila (*D*), per cui vale l' equazione $Z^{(8,3)} = N^{\prime\prime\prime\prime\prime\prime\prime}$, che mi preſcrive la regola di fare? Io debbo prima di tutto formar la figura ſeguente di 3 colonne,

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2
0, 0, 3, 0, 0, 3, 0, 0

ſommare i numeri verticali per avere le determinazioni che noto; $r=1$, $r'=3$, $r''=4$, $r'''=3$, $r''''=1$, $r'''''=6$, $r''''''=1$, $r'''''''=3$; ſegnare le 7 equazioni, $N'=r$; $2N''=N'r+r'$ ecc. ſino all' ultima $7N'''''''=N''''''r$ ecc.; introdurre in queſte i valori trovati di r, r' ecc., finalmente eſeguire la riſoluzione delle medeſime, dalla quale ricavaſi $N'=1$, $N''=2$, $N'''=3$, $N''''=4$, $N'''''=5$, $N''''''=7$, $N'''''''=8$. Si faccia qui la rifleſſione, che queſt' ultimo valore di N''''''' io non lo poſſo avere ſe prima non trovo quelli di N', N'' ecc. Ma eſſi ſono appunto i termini nella ſerie (D) precedenti all' ottavo. Dunque per poter eſibire un termine io ſon coſtretto dal metodo a formare a un per uno que' che gli vanno avanti, coſicchè ſe mi piacerà di ſaper coſa ſia il 100.^{mo} termine, la dipendenza che eſſo ha dagli altri 99 mi obbliga a trovarli tutti.

24. Creſce poi notabilmente queſta dipendenza, ſe cerco qualcun de' termini delle ſerie di addizione o di ſottrazione. Nel termine generale di queſte ſerie (§. 18.) pongo per eſempio $t=8$, $x=2$, $\lambda=3$, onde naſce $Z^{(8,5)}={}^3n'''''''+{}^3n''''''N'+{}^3n'''''N''+{}^3n''''N'''+{}^3n'''N''''+{}^3n''N'''''+{}^3n'N''''''+N'''''''$. Per ragione dell' eſpreſſione $Z^{(8,5)}$ egli è come s' io voleſſi in una ſerie il termine $t=8$, eſſendo l' altra variabile $x=5$; e per ragione che è $\lambda=3$, tal ſerie è (P) cioè quella ſerie delle ſeconde ſottrazioni che corriſponde a $x=5$. Ho ſcelto l' 8.° termine quando $\lambda=3$ perchè lo ſchema dell' eſempio ſuperiore mi determini a un tratto i valori di ${}^3n'$, ${}^3n''$ ecc, che ſono ${}^3n'=1$, ${}^3n''=2$, ${}^3n'''=3$, ${}^3n''''=4$, ${}^3n'''''=5$, ${}^3n''''''=7$, ${}^3n'''''''=8$. Dunque $Z^{(8,5)}=8+7N'+5N''+4N'''+3N''''+2N'''''+N''''''+N'''''''$; e riman l' indagine de' valori degli N che riguardan l' ipoteſi di $x=2$. Formiſi pertanto la figura che ſegue di due file ſino all' ottavo termine; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2
ed eſeguendo le conſuete ſomme, naſce $r=1$, $r'=3$, $r''=1$, $r'''=3$, $r''''=1$, $r'''''=3$, $r''''''=1$, $r'''''''=3$. Surrogati poſcia queſti valori nelle equazioni generiche degli N e compiuto il cal-

colo, avremo $N' = 1$, $N'' = 2$, $N''' = 2$, $N'''' = 3$, $N''''' = 3$, $N'''''' = 4$, $N''''''' = 4$. Sarà quindi $Z^{(8,5)} = 8.1 + 7.1 + 5.2 + 4.2 + 3.3 + 2.3 + 1.4.1.4. = 56$, com' è appunto il termine 8.° di (P). Ora oſſerveremo, che i valori degli ${}^{3}n$, ove ſi aggiunga per 1.° termine l'unità, coſtituiſcon la ſerie, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, cioè ſan riſultare gli otto primi termini di (D) che è la 3.ª delle ſerie generali delle maniere; e quei degli N coll'unità aggiunta producono gli 8 primi termini 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 di (C), che è la 2.ª delle ſteſſe ſerie generali. Sicchè è manifeſta la neceſſità di trovare ſucceſſivamente 8 termini non d'una ma di due ſerie anteriori per aver l' ottavo di (P). La qual coſa verificandoſi per qualunque altro eſempio, io dubito che le proprietà caratteriſtiche del termine generale poſſano convenire a quei termini generali che ſi trovano col preſente metodo applicato al problema che ci ſiamo propoſti.

25. Prima d' andare innanzi credo opportuno di non laſciare inavvertita una curioſa proprietà, che in tutte le ſerie di ſottrazione e di addizione combinabili colle prime delle maniere ho rimarcato, per occaſione dell'ultimo eſempio. Che ſi è egli fatto nelle ſuppoſizioni di $x = 2$, $\lambda = 3$, $t = 8$ per conoſcere il valore dell' 8.° termine di (P)? Si ſon preſi in (D) 8 termini principiando dall' ultimo e venendo ſino al primo che ſono 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1, 1; altri 8 dal primo ſino all' ottavo, cioè 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 nella ſerie (C); poi procedendo dalla ſiniſtra alla deſtra in tutte e due le file ſi ſono moltiplicati tra loro i termini di poſto eguale, come qui ſi vede, 8.1, 7.1, 5.2 ecc. ſino all' ultimo 1.4; e la ſomma di tai prodotti ha generato l' 8.° termine, di cui s' andava in traccia. Fatta ora la rifleſſione che alla ſerie (D) corriſponde l' ipoteſi di $x = 3$ che è lo ſteſſo valore di λ, e alla ſerie (C) $x = 2$ che è pure la noſtra ipoteſi, ſi cangino i dati, e ſia $x = 2$, $\lambda = 2$, $t = 7$. Poichè la ſuppoſizione di $\lambda = 2$ ci porta alle prime ſerie di addizione, ed è $x + \lambda = 4$, ſi fa evidente, che noi cerchiamo il 7.° termine della ſerie (O) (§. 14.). Dunque coll'analogia dell' eſempio ſuperiore ſi ſcrivano al roveſcio i 7 primi termini di (C), cioè 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1, perchè
1, 1, 2, 2, 3, 3, 4

$\lambda = 2$, e poi, perchè anche $x = 2$, ſi ſottopongano agli altri i 7 primi termini della ſteſſa ſerie (C) preſa dirittamente, dipoi ſi eſeguiſcano le moltiplicazioni ne' termini che ſi corriſpondono verticalmente; e ſi ottiene $4 + 3 + 6 + 4 + 6 + 3 + 4 = 30$, che è preciſamente il valore del 7.° termine di (O). Queſta regola ſi vedrà verificata in qualunque altro eſempio e la eſprimo generalmente così. Sia da trovarſi il valore di $Z^{(t, x+\lambda)}$. La determinazione di λ ci indica a quali ſerie di addizione, o di ſottrazione appartenga queſto termine, e il num.° $x + \lambda$ ci dà il valore della x che ſi ſcrive lateralmente alla ſerie, e reſta quindi noto il numero della fila nella quale $Z^{(t, x+\lambda)}$ è collocato. Conoſciuto ciò, nelle prime ſerie delle maniere ſi aſſuma quella che corriſponde a $x = \lambda$ e l' altra che ſpetta al valore di x, e in ambidue preſo il num.° t di termini, il 1.° della 2.ª ſi moltiplichi nel t^{esimo} della prima; il 2.° della 2.ª nel $t - 1.^{esimo}$ della prima ecc. ſino al prodotto del $t.^{esimo}$ della 2.ª nel 1.° della prima. La ſomma di queſti prodotti ſarà eguale a $Z^{(t, x+\lambda)}$. E queſta ſteſſa regola ſi deduce dall' equazione generale (§. 19.) per tutte queſte ſerie; $Z^{(t, x+\lambda)} = {}^{\lambda}n^{t-1} + {}^{\lambda}n^{t-2}N'$ ecc., la quale, perchè gli N appartengono ai valori di x, ſi potrebbe con maggior chiarezza ſcriver così; $Z^{(t, x+\lambda)} = {}^{\lambda}n^{t-1} + {}^{\lambda}n^{t-2x}N' + {}^{\lambda}n^{t-3x}N'' + {}^{\lambda}n^{t-4x}N''' \ldots + {}^{x}N^{n-1}$.

26. Includendo, come abbiam detto, i termini generali delle noſtre ſerie trovati col preſente metodo la neceſſità di formare una o più ſerie che comincino dal primo termine ſino a quello di poſto t, e togliendo ciò la naturale indipendenza, che le forme de' lor valori devono avere; per dare ad eſſi queſte forme io non veggo per ora altro partito che quello di ricorrere alle uſitate regole, per mezzo delle quali, conoſciuto che ſia il grado delle ſerie propoſte, e il numero sì delle radici eguali che diſuguali nelle ſcale di relazione che lor competono, ſi preſentano nel loro vero aſpetto queſti termini generali. Dobbiam però confeſſar con piacere, che all' ottenimento di un tal fine ci rieſce di molta utilità l' equazione generaliſſima $Z^{(t, x+\lambda)} = Z^{(t-x, x+\lambda)} + Z^{(t, x+\lambda-1)} \ldots\ldots (k)$, la quale è frutto de' nuovi ſimboli e abbraccia tutte le ſerie del problema. Con ciò in fatti io non ho biſogno d' altro che di ſapere il grado della ricor-

rente per le ipoteſi di $x=2$, $\lambda=0$; e la equazione (k) mi baſta per conoſcere i gradi di tutte le altre ſerie, ſenza aver da trovarli a tentone, come far dovrebbeſi, quando ſi mancaſſe di qualche guida. Fatta pertanto la ſuppoſizione di $x=2$, $\lambda=0$, queſta ci porta alla ſerie 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 ecc. . . . . . . (C), che è la 2.^{a} delle ſerie delle maniere (§. 2.); ed eſſa, come ſi può veder facilmente, è una ricorrente di 3.° grado, che ha per ſcala di relazione l'equazione $z^3-z^2-z+1=(z-1)(z^2-1)=0$. Cerchiſi adeſſo di qual grado ſia la ſuſſeguente ſerie (D) che naſce dal ſupporre $x=3$, $\lambda=0$. Coll' uſo di queſti valori l'equazione (k) diventa $Z^{(t,3)}-Z^{(t-3,3)}=Z^{(t,2)}$. Ora ſe foſſe $Z^{(t,3)}-Z^{(t-3,3)}=0$, la teoria delle ricorrenti ſemplici ci avviſerebbe ſubito, che la ſerie ſpettante al termine generale $Z^{(t,3)}$ è ricorrente di 3.° grado. Dunque eſſendo $Z^{(t,3)}-Z^{(t-3,3)}=Z^{(t,2)}$, e ſapendoſi che $Z^{(t,2)}$ è il termine generale d'un' altra ricorrente di 3.° grado, ne viene per conſeguenza, che $Z^{(t,3)}$ quando appartiene alla ſerie (D), la coſtituiſce una ricorrente di 6.° grado. Così per la 3.^{a} (E) abbiam l'ipoteſi di $x=4$, $\lambda=0$, a cui corriſponde l'equazione $Z^{(t,4)}-Z^{(t-4,4)}=Z^{(t,3)}$. Il primo membro di queſta eguagliato a zero ci porterebbe a una ſerie di 4.° grado. Ma $Z^{(t,3)}$ vuole una ſerie di 6.° Dunque (E) è ricorrente di 10.° grado. Ragionando ſimilmente per le ſeguenti ſerie (F) ecc. ſi fa paleſe, che nella coſtante ſuppoſizione di $\lambda=0$, all' equazione $Z^{(t,x)}=Z^{(t-x,x)}+Z^{(t,x-1)}$ del valore generico x appartiene una ricorrente di grado $\frac{(x+1)x}{2}$.

27. Paſſiamo preſentemente alle 1.^{e} ſerie di ſottrazione (G), (H), (I) ecc. (§. 9.) per le quali è ſempre $\lambda=1$, e vale l' equazione $Z^{(t,x+1)}-Z^{(t-x,x+1)}=Z^{(t,x)}$ ovvero $Z^{(t,x)}-Z^{(t-(x-1),x)}=Z^{(t,x-1)}$. Ommeſſa la ſerie ($G$) che è parallela ſi dia principio dalla (H) che eſige l' ipoteſi di $x=2$; ed eſſendo eſſa la ſerie aritmetica de' numeri naturali, conſiderata come ricorrente, ſarà di 2.° grado e le corriſponderà il termine generale $Z^{(t,2)}$. Sia poi $x=3$, cioè ſi voglia conoſcere il grado di (I). Per queſta avremo $Z^{(t,3)}-Z^{(t-2,3)}=Z^{(t,2)}$; e ſe foſſe $Z^{(t,3)}-Z^{(t-2,3)}=0$, ſarebbe $Z^{(t,3)}$ il termine generale d' una ſerie di 2.° grado. Sicchè

non eſſendo eguale a zero quel 1.° membro, ma bensì eguale a $Z^{(t,2)}$ che richiede ſimilmente una ſerie di 2.° grado, $Z^{(t,3)}$ apparterrà a una ricorrente di 4.° e di tal grado ſarà (I). All' iſteſſa maniera diſcorrendo, troveremo (L) di 7.° grado, (M) di 11.° ecc., onde generalmente la 1.ª ſerie di ſottrazione che ſpetta al num.° x ſarà del grado $\frac{x(x-1)}{2}+1$.

28. Per le prime ſerie di addizione ſi fa $\lambda=2$, e abbiam l' equazione $Z^{(t,x)}-Z^{(t-(x-2),x)}=Z^{(t,x-1)}$, eſſendo (C) la 1.ª ſerie dell' ipoteſi $x=2$, che dà $Z^{(t,2)}$ per termine generale della ricorrente di 3.° grado. Se $x=3$ naſce $Z^{(t,3)}-Z^{(t-1,3)}=Z^{(t,2)}$, dove il 1.° membro eſige una ſerie di 1.° grado, e l' omogeneo di comparazione $Z^{(t,2)}$ una di 3.°; e quindi a $x=3$ compete una ſerie di 4.°. Parimente le ſerie di 6°., 9°., 13.° ecc. ſaran volute dalle ſuppoſizioni di $x=4, 5, 6$ ecc., e però il grado della ſerie ſpettante a x verrà eſibito dalla formola $\frac{(x-1)(x-2)}{2}+3$.

29. Spingendo avanti l' indagine, le 2.ᵉ ſerie di ſottrazione pel valore generico x ſi troveranno del grado $\frac{(x-2)(x-3)}{2}+6$, competendo ad eſſe l' ipoteſi di $\lambda=3$; le 2.ᵉ di addizione ſono del grado $\frac{(x-3)(x-4)}{2}+10$, ecc., onde trarrem finalmente per le ſerie del valore generale λ la formola del grado $=\frac{\big(x-(\lambda-1)\big)(x-\lambda)}{2}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$, avvertendo che in ciaſcun dei ſiſtemi di queſte ſerie la prima da notarſi è ſempre quella, a cui corriſponde l' ipoteſi di $x=\lambda$.

30. Acquiſtata che ſia la notizia del grado della ricorrente eſpreſſo dalla formola univerſale $\frac{\big(x-(\lambda-1)\big)(x-\lambda)}{2}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$ ...... (u), ſi ſa che tanti debbono eſſere i ſuoi moltiplicatori, che generano la ſcala di relazione, quanto è

il numero (*u*), e che per la loro determinazione fa duopo aver noti i primi termini della ſerie di num.° 2(*u*). Ora queſto potrebbe talvolta riuſcire di troppo grande imbarazzo, ſe una rifleſſione opportuna non ci minoraſſe notabilmente la moleſtia del calcolo e non ci agevolaſſe la riſoluzione delle equazioni lineari che contengono i ſuddetti moltiplicatori, obbligandoci ſoltanto ad aver dati nella ſerie termini di numero (*u*) + 1 . Cominciamo dalle 1.e ſerie delle maniere, e ſi prenda in mano la ſerie (*D*), a cui ſi riferiſce l' equazione $Z^{(t,3)} = Z^{(t-3,3)} + Z^{(t,2)}$. E' coſa chiara, che nella precedente ſerie (*C*), che corriſponde all' ipoteſi di $x = 2$ i due termini avanti al primo ſon zero, eſſendo il 3.° e il 4.° alla ſiniſtra -1, -1, il 5.° e il 6.°, -2, -2 ecc. Fatto pertanto $t = 3$, $t = 2$, $t = 1$, $t = 0$, $t = -1$, per la ſerie (*D*) naſcono le equazioni;

1.ª $Z^{(3,3)} = Z^{(0,3)} + Z^{(3,2)}$
2.ª $Z^{(2,3)} = Z^{(-1,3)} + Z^{(2,2)}$
3.ª $Z^{(1,3)} = Z^{(-2,3)} + Z^{(1,2)}$
4.ª $Z^{(0,3)} = Z^{(-3,3)} + Z^{(0,2)}$
5.ª $Z^{(-1,3)} = Z^{(-4,3)} + Z^{(-1,2)}$

Ma $Z^{(3,3)} = 2$, $Z^{(3,2)} = 2$. Dunque la 1.ª darà $Z^{(0,3)} = 0$. Nella 2.ª abbiamo $Z^{(2,3)} = 1$, $Z^{(2,2)} = 1$, e così nella 3.ª $Z^{(1,3)} = 1$, $Z^{(1,2)} = 1$. Quindi $Z^{(-1,3)} = 0$, $Z^{(-2,3)} = 0$. Parimente eſſendo nella 4.ª $Z^{(0,3)} = 0$ $Z^{(0,2)} = 0$, e nella 5.ª $Z^{(-1,3)} = 0$, $Z^{(-1,2)} = 0$, ſaranno neceſſariamente $Z^{(-3,3)} = 0$, $Z^{(-4,3)} = 0$. Laonde in (*D*) ſicuramente 5 termini innanzi al primo ſon zero. Non ſarà però nullo il 6.°, avendoſi per eſſo l' equazione $Z^{(-2,3)} = Z^{(-5,3)} + Z^{(-2,2)}$, dove, perchè $Z^{(-2,3)} = 0$, e $Z^{(-2,2)} = -1$, debb' eſſere $Z^{(-5,3)} = 1$. Termina pertanto nella ſerie protratta alla ſiniſtra il numero de' zero al 5.° poſto; ed avendo eſſa 6 moltiplicatori, come deduceſi dalla formola (*u*) modificata alle ipoteſi di $\lambda = 0$, $x = 3$, riſulta che i termini zero anteriori al primo ſono di num.° (*u*) $-$ 1 . La ſteſſa concluſione trarremo dall' indole della ſerie (*C*) la quale è di 3.° grado ed ha 2 ſoli termini al primo che ſono $= 0$. Ed adattando il raziocinio alle altre ſerie (*E*), (*F*) ecc. reſterà ſempre verificata la propoſizione, che il 1.° termine di queſte ſerie ſarà preceduto da $(u)-1$ termini di valor nullo. E' ora evidente il vantaggio che ci vien prodotto nel calcolo da una tal proprietà, e ci ſervirà d' eſempio la ſerie (D) di cui vuolſi determinare i 6 moltiplicatori, che ſuppongo eſſere; a, b, c, d, e, f. Segno di eſſa i 7 primi termini, premetto i 5 termini zero, e ſottopongo i 6 moltiplicatori, come qui ſi vede;

$$\begin{array}{l} 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7 \text{ ecc.} \\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \end{array}$$

Eſeguite poi le conſuete moltiplicazioni trovo ſubito $f=1$, e con altre equazioni ſempliciſſime $e=1$, $d=0$, $c=-1$, $b=-1$, $a=1$, onde riſulta per (D) la ſcala di relazione $z^6-z^5-z^4+z^2+z-1=0$, ovvero $(z-1)(z^2-1)(z^3-1)=0$. Senza lo ſcoprimento di tal proprietà mi ſarebbe convenuto trovar 12 termini della ſerie, e poi riſolvere 6 equazioni contenenti tutti i 6 moltiplicatori indeterminati, il che non ſarebbe ſtato di piccolo incomodo.

31. Non ci vien meno la ſteſſa regola degli $(u)-1$ zero termini innanzi al primo per le altre ſerie di ſottrazione e di addizione. Conſideriam per eſempio le ſerie delle 1.^{e} ſottrazioni. Io veggo che quando $x=2$, eſſendo la competente ſerie (H) di ſottrazione una ſerie aritmetica, il termine anteriore al primo debb' eſſere neceſſariamente zero, e quindi $Z^{(0,2)}=0$; ma non così ſuccede dei termini ulteriori alla ſiniſtra, i quali ſono -1, -2 ecc., cioè $Z^{(-1,2)}=-1$ ecc. Ora quanti termini eguali a zero avrà la ſuſſeguente ſerie (I)? Per queſta vale l' equazione $Z^{(t,3)}=Z^{(t-2,3)}+Z^{(t,2)}$, onde fatto ſucceſſivamente $t=2$, 1, 0, naſceran le equazioni;

$$\begin{array}{ll} 1.^a & Z^{(2,3)}=Z^{(0,3)}+Z^{(2,2)} \\ 2.^a & Z^{(1,3)}=Z^{(-1,3)}+Z^{(1,2)} \\ 3.^a & Z^{(0,3)}=Z^{(-2,3)}+Z^{(0,2)} \end{array}$$

E perchè (§. 9.) $Z^{(2,3)}=2$, $Z^{(2,2)}=2$, ſarà $Z^{(0,3)}=0$. Così per eſſere $Z^{(1,3)}=1$; $Z^{(1,2)}=1$, avremo $Z^{(-1,3)}=0$; e da ultimo anche $Z^{(-2,3)}=0$, perchè $Z^{(0,3)}$ e $Z^{(0,2)}$ ſon zero. Oltre di queſti 3 non abbiamo altri termini precedenti di valor nullo; e ſiccome (I) è una ricorrente di 4.° grado, e (*H*) di 2.°, realmente i termini zero che anticipano il primo ſono di num.° $(u)-1$; il che ſi troverà realizzato non ſolo nelle ſuſſeguenti ſerie (*L*), (*M*) ecc., ma in tutte le altre di addizione o di ſottrazione, che ſon richieſte dal problema.

32. Facilitandoſi con tale avvertenza il ritrovamento de' reſpettivi moltiplicatori nelle anzidette ſerie, non ſarà più che un affar di calcolo il determinar la forma delle ſcale di relazione che ad eſſe appartengono. Io credo bene di metterle qui tutte ſotto un ſol punto di viſta, perchè procedendo eſſe con una legge aſſai chiara ſi poſſa ad ogni caſo protrar la ſerie delle ſcale quanto biſogna.

Per le 1.^{e} ſerie delle maniere; $(z-1)(z^2-1)(z^3-1)\ldots(z^x-1)=0$

2.^{e} di ſottrazione; $(z-1)^2(z^2-1)(z^3-1)\ldots(z^{x-1}-1)=0$

3.^{e} di addizione; $(z-1)^2(z^2-1)^2(z^3-1)\ldots(z^{x-2}-1)=0$

4.^{e} di ſottrazione; $(z-1)^2(z^2-1)^2(z^3-1)^2(z^4-1)\ldots(z^{x-3}-1)=0$

$\vdots \qquad \vdots$

$$\begin{array}{l} \left(\frac{x+2}{2}\right)^{esime}; \\ \left(\frac{x+1}{2}\right)^{esime}; \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (z-1)^2(z^2-1)^2(z^3-1)^2\ldots(z^{x:2}-1)^2=0, \text{ ſe } x \text{ è pari} \\ (z-1)^2(z^2-1)^2(z^3-1)^2\ldots(z^{(x-1):2}-1)^2(z^{(x+1):2}-1)=0, \text{ ſe } x \text{ è diſpari} \end{array} \right.$$

$\vdots \qquad \vdots$

$x.^{esima}$; $(z-1)^2(z^2-1)(z^3-1)\ldots(z^{x-1}-1)=0$

$(x+1).^{esima}$ $(z-1)(z^2-1)(z^3-1)\ldots(z^x-1)=0$.

Sinchè il num.° delle ſuddette ſcale è minore di $\frac{x+2}{2}$ ſe x è pari, o minore di $\frac{x+1}{2}$ ſe x è diſpari, ſi accettino le forme delle prime ſcale notate; ma quando, ſecondo che x è pari o caſſo, ſi arriva al num.° $\frac{x+2}{2}$, ovvero $\frac{x+1}{2}$, ſi debbono aſſumere le forme che a queſti numeri corriſpondono. Dalla equazione $(x+1)^{\text{eſime}}$ riſalendo ſino alla $\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\text{eſima}}$, o $\left(\frac{x+2}{2}\right)^{\text{eſima}}$, ritornan le ſteſſe equazioni che ſonoſi notate diſcendendo dalla prima ſino alla ſteſſa $\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\text{eſima}}$ o $\left(\frac{x+2}{2}\right)^{\text{eſima}}$; per la qual regola deve apparir due volte la equazione $\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\text{eſima}}$ ſe x è diſpari, e una ſolvolta la equazione $\left(\frac{x+2}{2}\right)^{\text{eſima}}$, ſe x è pari.

33. Ecco ora tutto preparato per lo ſtabilimento de' veri termini generali delle noſtre ſerie. Alle loro equazioni di relazione ſi dia quella forma che fa veder ſeparate le radici eguali dalle diſuguali, e poi ſi applichino ad eſſe le teorie eſpoſte diffuſamente nella Memoria che va innanzi a queſta Appendice, ricordandoſi nello ſteſſo tempo di ciò che ſi è detto al §. 15. relativamente agl' ingreſſi delle diverſe ſerie di ſottrazione e di addizione, onde in (*A*) limitata al termine p prendendo x termini ſi abbia il giuſto numero delle maniere, con cui ſi può formare una data ſomma. Sia per eſempio $x=2$. Queſta ipoteſi eſige 3 ſerie; la 1.ª delle maniere, la 2.ª di ſottrazione, e la 3.ª di addizione. La ſcala della 1.ª è $(z-1)(z^2-1)=0$, ovvero $(z-1)^2(z+1)=0$; quella della 2.ª che vien data dalla formola $\left(\frac{x+2}{2}\right)^{\text{eſima}}$ è $(z-1)^2=0$; e la 3.ª è poi il ritorno della 1.ª Di queſta ſi troverà il termine generale eſpreſſo dalla ſeguente equazione; $Z^{(t,2)}=\frac{2t+1}{4}-\frac{(-1)^t}{4}$; e per la 2.ª di ſottrazione ſarà $Z^{(t',2)}=t'$; finalmente per la 3.ª $Z^{(t'',2)}=\frac{2t''+1}{4}-\frac{(-1)^{t''}}{4}$. Ripreſa pertanto l' eſpreſſione generale degl' indici de' termini (§. 15.);

$t^{\lambda} = t - \frac{\lambda^2 - \lambda(1 + 2p - 2x)}{2}$, e ſatto in eſſa $x = 2$, e ſucceſſivamente $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, avremo $t' = t + 1 - p$; $t'' = t + 1 - 2p$. Si voglia ora ſapere in quante maniere con 2 termini della ſerie aritmetica che va ſino al num.° 30 ſi poſſa fare la ſomma 40. Pöichè in genere $t = s + 1 - \frac{x^2 - x}{2}$ (§. 4.), eſſendo $s = 40$, $x = 2$, ſarà $t = 38$ e $p = 30$; il che dà $t' = 9$, $t'' = -21$; e queſt' ultimo valore riuſcendo negativo ſignifica che non è ancora entrata la 3.ª ſerie, e che baſtano le 2 prime. Onde colle ſoſtituzioni avremo $Z^{(38, 2)} = Z^{(t, 2)} = \frac{77}{4} - \frac{1}{4} = 19$; e $Z^{(t', 2)} = Z^{(9, 2)} = 9$; e quindi $Z^{(38, 2)} - Z^{(9, 2)} = 10$, cioè in 10 maniere diverſe, ove ſia $x = 2$, e $p = 30$, ſi potrà far la ſomma 40.

34. La ſomma maſſima, che ſi può formare con 2 in 30 numeri di (A), è $30 + 29 = 59$, cui corriſponde $t = 57$, che è pure il maſſimo indice de' termini. Ma l' indice t'' che appartiene alla 3.ª ſerie di addizione vien dato dalla ugualità $t'' = t + 1 - 2p$, la quale poſto $t = 57$, $p = 30$, ſi cangia in $t'' = 58 - 60 = -2$. Dunque è manifeſto, che non è ancora entrata la 3. ſerie quando ſiamo alla maſſima delle ſomme fattibili; il che vuol dire che queſta 3.ª ſerie rieſce ſempre inoperoſa; anzi, perchè in genere la 3.ª ſerie ha il ſuo ingreſſo alla ſomma $s = \frac{6 + 4p - 3x + x^2}{2}$ (§. 15), cioè pel noſtro caſo alla ſomma $s = 2 + 2p$, eſſendo $2 + 2p$ ſempre maggiore di $p + p - 1$ che è la maſſima delle ſomme, non potrà mai eſſa avere impiego alcuno nella determinazione delle maniere cercate, e ſervirà ſolo per render nullo il numero di queſte maniere, qualora ci proponeſſimo alcuna ſomma fuor delle fattibili e maggior della maſſima, coſicchè il numero delle maniere onde formarſi non poteſſe divenir zero colle ſole prime 2 ſerie. Ciò avverrebbe, per dirne pur una, alla ſomma 66, cui compete $t = 64$, rimanendo invariata l' ipoteſi di $p = 30$. Quindi naſce $t' = 35$;

$t'' = 5$; e però $Z^{(t,2)} = \frac{129}{4} - \frac{1}{4} = 32$; $Z^{(t',2)} = 35$; $Z^{(t'',2)} = \frac{11}{4} + \frac{1}{4} = 3$; e ſinalmente $Z^{(t,2)} - Z^{(t',2)} + Z^{(t'',2)} = 32 - 35 + 3 = 0$, come debb' eſſere.

35. Da ciò che s' è detto ne' due precedenti §§. ſi può vedere di quanta utilità rieſca il ſegregare dalle noſtre indagini quelle ſerie, che riſguardando unicamente le ſomme maggiori della maſſima, ſul numero delle maniere cercate non poſſono avere alcuna influenza; la qual coſa può effettuarſi in qualunque ipoteſi di x e di p. Ma da un' altra fonte trarremo ancora maggiori vantaggi per abbreviarci il calcolo e ridurci al minor numero poſſibile di ſerie che baſtino a farci ottenere l' intento. A queſt' oggetto dobbiam ricordarci delle 2 parti aſcendente e diſcendente (§. 4.), in cui ſi poſſono conſiderar diviſe le ſerie, i cui termini eſprimono il preciſo numero delle maniere, onde formare qualſiſia fattibil ſomma. Ivi notammo, che nelle dette 2 parti i termini della ſerie egualmente diſtanti da quello, che ha il maſſimo numero di maniere, ſono tra loro eguali, e che abbiamo queſto maſſimo numero, ove ſia l' indice de' termini $t = 1 + \frac{px - x^2}{2}$, cioè quando ſia la ſomma $S = \frac{x(p+1)}{2}$. Onde nell' equazione del §. 15; $t^\lambda = t - \frac{\lambda^2 - \lambda(1 + 2p - 2x)}{2}$ ſurrogando in vece di t il valore $1 + \frac{px - x^2}{2}$, riſulterà $t^\lambda = \frac{2 + px + 2\lambda x - (\lambda^2 + \lambda + 2\lambda p + x^2)}{2}$; e arriveremo al termine di mezzo della ſerie primitiva delle maniere ſenza che abbiano ancora avuto il loro ingreſſo le ſerie ſpettanti all' indice de' termini t^λ ſemprechè ſia $2 + px + 2\lambda x < \lambda^2 + \lambda + 2\lambda p + x^2$, perchè in tal caſo t^λ è negativo. Sia ora data una ſomma delle fattibili $s' > \frac{x(p+1)}{2}$, che deve neceſſariamente corriſpondere a qualche termine della parte diſcenden-

te della medeſima primitiva ſerie, e rappreſenti s la ſomma equidiſtante dalla media S nella parte aſcendente; per proprietà della ſerie aritmetica delle ſomme ſarà $s=x(p+1)-s'$. Sicchè ſebbene per la ſomma s' potrebbero aver luogo più ſerie, non eſſendo eſſe ancora entrate per la ſomma s e dovendo sì s che s' formarſi in egual numero di maniere, baſterà dato s' trovar s e coll' impiego di minor numero di ſerie aſſegneremo a s' il quantitativo delle maniere che eſige s; con che ſi fa un riſparmio non indifferente di calcolo e di fatica.

36. Renderò ſenſibile queſto vantaggio col ſeguente eſempio. Aſſumo l' ipoteſi di $x=5$, la quale di ſua natura eſigerebbe 6 ſerie, e cerco quante di eſſe ne abbiſognano per arrivare al termine medio nella prima. Per ottener ciò adatto l' equazione $t^\lambda=\frac{2+px+2\lambda x-(\lambda^2+\lambda+2\lambda p+x^2)}{2}$ al valore di $x=5$, e riſulta $t^\lambda=\frac{2+5p+9\lambda-(\lambda^2+25+2\lambda p)}{2}$

Facciaſi in queſta $\lambda=1$, e naſce $t'=\frac{11+5p-(26+2p)}{2}$.

Dunque la 1.ª delle ſottrazioni avrà ingreſſo nella parte aſcendente della ſerie primitiva delle maniere, quando ſia $11+5p>26+2p$, ovvero $p>5$; il che vuol dire che entrerà ſempre fuorchè nell' unico caſo di $p=5$. Paſſando conſecutivamente all' ipoteſi di $\lambda=2$, diventa $t''=\frac{20+5p-(29+4p)}{2}$; e in queſt' ultimo membro debb' eſſere $20+5p>29+4p$, cioè $p>9$, perchè abbia luogo nella ſuddetta parte aſcendente la nuova ſerie delle addizioni, e quindi ſe $p=5,6,7,8,9$, le 2 prime ſono ſufficienti ed è inutile queſta 3.ª ſerie. Facendo poi $\lambda=3$, ſi ha $t'''=\frac{29+5p-(34+6p)}{2}$, nella qual formola ſi vede che neceſſariamente t''' è negativo, qualunque ſia il valore di p; e molto più troverem negativi i valori di t'''', t''''', che riguardan le 2 ultime ſerie. Dal che inferiremo, che al più colle ſole 3 prime ſerie ci verrà fatto di aſſegnare nella parte aſcendente della primitiva quel numero di modi che ſervono a formare qualſiſia ſomma in tal parte collocata, e in conſeguenza il num.° di modi, che compete a qualunque altra ſomma riferibile alla parte diſcendente. Pongo il caſo che ſia $p = 30$ e la ſomma data 131. Poichè la ſomma media S diventa $= 77\frac{1}{2}$, cioè le 2 ſomme medie ſono 77, 78, appartiene 131 alla parte diſcendente della 1.ª ſerie. Laonde $s' = 131$, e però $s = 24$, potendoſi in tante maniere formare la ſomma 131 in quante ſi forma la ſomma 24, che è ſituata nell' indice de' termini $t = 10$. Preſo pertanto il 10.° nella ſerie (F) (§. 2.), ſarà $Z^{(10, s)} = 23$; e per ragion della formola generale $t^{\lambda} = t - \frac{\lambda^2 - \lambda(1 + 2p - 2x)}{2}$, colla ſoſtituzione di $\lambda = 1$ e colle altre determinazioni fiſſate, avremo $t' = -16$. Dunque al 10.° termine di (F) non è ancora entrata la 1.ª ſerie di ſottrazione; e però diremo, che la ſomma 24, e in conſeguenza la data ſomma 131 ha per la ſua formazione 23 combinazioni, ſe ſi prendono nella ſerie de' numeri naturali, che termina al 30esimo, cinque diverſi numeri.

37. Chiuderemo queſta Appendice col preſentare i termini generali delle ſerie, che convengono alle 3 ipoteſi di $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ per conoſcere il valore di qualunque termine collocato tra il primo e il termine di mezzo della 1.ª ſerie, aggiungendovi ancora le formole principali, alle quali ſi dee por mente, onde reſti agevolata l'indagine delle maniere, con cui le ſomme vengono generate. E ciò affine di dare un eſemplare di quello ſpecchio, che dee metterſi innanzi agli occhi il calcolatore, ove gli piaccia d' inveſtigar ciò che accada ne' maggiori valori della x. Si vedrà, che quando è $x = 2$, baſta la 1.ª ſerie all' intento, perchè l'altra di ſottrazione ſubentra un termine dopo quello, che ſpetta alla ſomma media e rieſce perciò inutile: nelle 2 altre ipoteſi poi la ſola ſerie di ſottrazione combinata colla prima ſoddisfa pienamente al queſito.

(*A*) 1, 2, 3, 4, 5 .... p

1.ª ip. $x = 2$	Serie delle ſomme; 3, 4, 5, 6 .... $2p - 1$ Somma minima; 3; Somma maſſima; $2p - 1$; Somma media; $p + 1$. Poſto del termine corriſpondente; $p - 1$ Somma all' ingreſſo della 2.ª ſerie; $p + 2$. Poſto del termine nella 1.ª; p $t = s - 2$; $t' = t - p + 1$; $s = 2p + 2 - s'$ $Z^{(t,2)} = \frac{2t+1}{4} - \frac{(-1)^t}{4}$; $Z^{(t',2)} = t'$.
2.ª ip. $x = 3$	Serie delle ſomme; 6, 7, 8, 9, 10 .... $3p - 3$ Somma minima; 6; Somma maſſima; $3p - 3$ Somma media; $\frac{3p+3}{2}$; Poſto del termine corriſpondente; $\frac{p-3}{2}$ Somma all' ingreſſo della 2.ª ſerie; $p + 4$; Poſto del termine nella 1.ª; $p - 1$ $t = s - 5$, $t' = t - p + 2$; $s = 3p + 3 - s'$. E chiamate α, α' le 2 radici immaginarie dell' unità cuba; $Z^{(t,3)} = \frac{6t^2 + 24t + 17}{72} - \frac{(-1)^t}{8} + \frac{\alpha^{t-1} + \alpha'^{t-1}}{9}$; $Z^{(t',3)} = \frac{2t'^2 + 4t' + 1}{8} - \frac{(-1)^{t'}}{8}$.

3.ª ip. $x=4$

Serie delle ſomme; $10, 11, 12, 13 \ldots 4p-6$

Somma minima; 10; Somma maſſima; $4p-6$

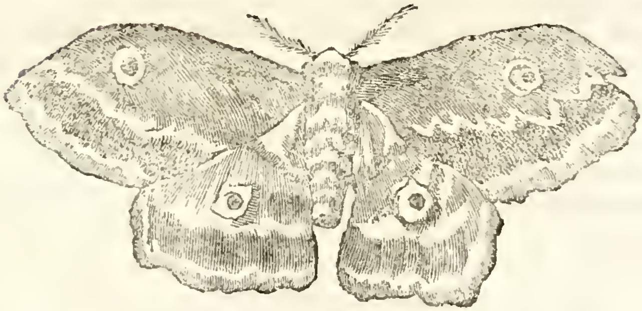
Somma media, $2p+2$; Poſto del termine corriſpondente; $2p-7$

Somma all' ingreſſo della 2.ª ſerie; $p+7$. Poſto del termine nella 1.ª, $p-2$

$t=s-9$; $t'=t-p+3$; $s=4p+4-s'$. E chiamate α, α' le 2 radici immaginarie dell' unità cuba; e β, β' le 2 immaginarie dell' unità quadrato-quadrata;

$$Z^{(t,4)}=\frac{2t^3+24t^2+81t+68}{288}-\frac{(t+4)(-1)^t}{32}-\frac{(\alpha^{t+1}+\alpha'^{t+1})}{27}-\frac{2(\alpha^t+\alpha'^t)}{27}+\frac{\beta^{t-1}+\beta'^{t-1}}{16}$$

$$Z^{(t',4)}=\frac{4t'^3+30t'^2+60t'+25}{144}-\frac{(-1)^{t'}}{16}-\frac{(\alpha^{t'+1}+\alpha'^{t'+1})}{27}-\frac{2(\alpha^{t'}+\alpha'^{t'})}{27}.$$



TENTATIVO

Per migliorare i Cannocchiali Acromatici propoſti da Eulero

Del Sig. Ab. BARNABA ORIANI Aſtronomo nel Regio Oſſervatorio di Milano.

VErſo la metà del noſtro ſecolo ſi fece l' importante rivoluzione nell'Ottica colla invenzione dei Cannocchiali Acromatici. Il gran *Neuton* aveva aſſerito, che la diſperſione dei colori nei diverſi corpi traſparenti era proporzionale alla forza refrattiva dei medeſimi. Il che ſe foſſe ſtato vero, la confuſione nei cannocchiali prodotta dalla diverſa refrangibilità dei raggi di luce ſarebbe ſtata irrimediabile, come dopo il *Neuton* dimoſtrarono tutti gli Autori d' Ottica. Nel 1747 *Eulero* cominciò a ſoſpettare che combinando diverſe ſoſtanze traſparenti ſi poteſſe arrivare a togliere la diſperſione dei colori ſenza levare tutta la rifrazione, e propoſe un oggettivo compoſto di due lenti di vetro in mezzo alle quali vi foſſe dell' acqua; ma *Dollond* ſeguendo di mano in mano tutti i principj d' *Eulero*, appoggiato alle ſperienze fatte da *Neuton*, dimoſtrò, che queſt' oggettivo avrebbe dovuto avere un' apertura infinitamente grande, e per conſeguenza ſarebbe ſtato impraticabile.

Il rinnomato *Clairaut* dimoſtrò ſubito dopo con rigore geometrico che le ſpeculazioni d' *Eulero* erano totalmente inſuſſiſtenti, e che s' opponevano alle celebri ſperienze neutoniane citate da *Dollond*. Klingenſtierna, geometra Svezzeſe, in viſta dei progetti d' *Eulero* eſaminò attentamente le ſperienze, ed i principj ſtabiliti da *Neuton*. Nel 1755 mandò a *Dollond* una piccola Memoria in cui ſoſtenne che il riſultato dell' eſperienza 8 del lib. 2. dell' Ottica di *Neuton* ſi poteva metter in dubbio. *Dollond* ſi miſe toſto a ripetere queſte ſperienze con oggettivi compoſti di vetro, e d' acqua ſecondo le prime idee di *Eulero*; ma non riuſcirono troppo felicemente. Adoperò in ſeguito due diverſe ſorta di vetri conoſciuti coi nomi di *Flint*, e *Crown* e riuſcì a comporre un ſiſtema di tre priſmi, cioè due di *Crown*, ed uno di *Flint* in maniera che gli oggetti veduti attraverſo due priſmi poſti cogli angoli refringenti in parti oppoſte compajono ſenza alcuna rifrazione, ma con i colori; e ſe ſi guardano con tutti e tre i priſmi, gli oggetti ſi veggono fuori di luogo riſpetto alla viſta diretta, cioè ſi ha la rifrazione ſenza che compaja alcun colore, oſſia ſi ottiene la rifrazione ſenza alcuna ſeparazione, o diſperſione di raggi colorati, ciò che a *Neuton* era parſo impoſſibile.

Toſto che fu conoſciuta una ſcoperta così deciſiva, ed intereſſante, i più celebri Matematici allora viventi, *Clairaut*, *d' Alembert*, *Eulero* per mezzo della Geometria, e dell' Analiſi ricercarono le regole per coſtruire degli oggettivi perfetti, cioè ſenza colori, e liberi ancora dalla confuſione prodotta dalla sfericità delle lenti. E *Dollond* medeſimo ajutato più dalle ſue ſperienze che dalla teoria compoſe degli oggettivi a due, ed a tre lenti di *Flint*, e *Crown* eſenti ſenſibilmente da tutti e due i difetti. Ebbimo pure in Italia un valentiſſimo Geometra il P. Boſcovich, il quale in varie diſſertazioni pubblicate negli Atti dell' Accademia di Bologna ed in Vienna, e più ſpecialmente nei cinque Volumi dei ſuoi Opuſcoli ſtampati l' anno ſcorſo a Baſſano, ci ſpiegò le teorie dei cannocchiali acromatici, e ci inſegnò con ſemplici macchinette da eſſo inventate, o perfezionate a determinare le qualità rifrattive, e diſtrattive dei varj vetri.

L' incomparabile *Eulero*, che aveva data la prima ſpinta a queſta ſcoperta, trattò diffuſamente dei difetti, e dei rimedj di ogni ſorta di cannocchiali in molte Memorie inſerite negli Atti delle principali Accademie, e ſegnatamente nei Volumi dell' Accademia di Berlino per gli anni 1757, 1762. Pubblicò in ſeguito nel 1769 la ſua Diottrica, che un gran Matematico (*a*) qualifica di Trattato completo ſu queſta materia; e che non ſolamente contiene formole belliſſime, e generaliſſime eſpoſte con tutto il dettaglio che ſi può deſiderare; ma ancora le loro applicazioni ad un gran numero di caſi relativi ai cannocchiali, ai teleſcopj a rifleſſione, ed ai microſcopj. Non contento però *Eulero* d' aver applicate a molti eſempj particolari le ſue formole, fece pubblicare dal Sig. *Fuſs* rinomato Matematico di Pietroburgo un' altr' opera (*b*) unicamente deſtinata alla pratica. In eſſa dà le dimenſioni di tre oggettivi, uno a due lenti di *Flint*, e *Crown*, e gli altri due a tre lenti, e prendendo il più perfetto dei tre, egli inſegna di quali curvature debbano eſſere le lenti componenti l' oggettivo, e le oculari; a quale diſtanza debbano eſſere collocate l' une dall' altre per ottenere differenti ingrandimenti, e per le diverſe ſorta di cannocchiali aſtronomici, e terreſtri; e nella prefazione di queſt' opera *Eulero* ſoſtiene (*c*) che i cannocchiali da eſſo propoſti ſono molto più perfetti degli acromatici del celebre *Dollond*, e che da eſſi ſi poſſono ſperare molte importanti ſcoperte nell' Aſtronomia.

L' oggettivo perfetto di *Eulero* è diverſo da quelli eſeguiti dal *Dollond* e da quelli propoſti dagli altri Matematici. In queſti le lenti ſono unite l' una all' altra immediatamente, e quello ha le lenti alquanto diſtaccate, di maniera che ſe nell' eſecuzione l' artiſta ha fatto qualche piccolo sbaglio intorno alle curvature preſcritte, vi ſi può molte volte rimediare, accorciando, o allungando un tantino la diſtanza delle lenti fra loro. Queſta precauzione di non addoſſare immediatamente

---

(*a*) Il Sig. *de la Grange* Nouveaux Memoires de l' Acad. de Berlin pour l' année 1778 pag. 162.

(*b*) Il titolo intero dell' opera è il ſeguente; *Inſtruction détaillée pour porter les lunettes de toutes les differentes eſpéces au plus haut degrè de perfection dont elles ſont ſuſceptibles tirée de la Théorie dioptrique de Mr.* Euler *le pere, & miſe à la portée de tous les Ouvriers en ce genre par Mr.* Nicolas Fuſs *avec la deſcription d' un Microſcope, qui peut paſſer pour le plus parfait dans ſon eſpece, & qui eſt propre a produire tous les groſſiſſemens qu' on voudra. A' St. Petersbourg* 1774.

(*c*) *On verra par là ſuffiſamment, que les lunettes de* Dollond *connues ſous le nom d' achromatiques, peuvent être portées à un beaucoup plus haut dégrè de perfection, & qu' ainſi l' on a lieu de ſe promettre les plus importantes decouvertes dans l' Aſtronomie.* Nell' opera ſopra citata pag. 9.

le lenti l' una all' altra ſi trova uſata ancora in molti eſempj della ſua Diottrica. Ivi però la diſtanza del mezzo d'una lente al mezzo dell' altra è molto più piccola di quella preſcritta nel ſuo oggettivo perfetto, ed eccede pochiſſimo la groſſezza dei vetri, coſicchè le lenti appena appena non ſi toccano l' una l' altra. Queſt' oggettivo è per un altro riguardo notabilmente diverſo da quelli propoſti nella ſua Diottrica. Eſſo ha due lenti iſoſceli, e la terza ſola ha le due facciate di diverſa curvatura dererminate dall' equazione, che rende nullo, o almeno inſenſibile l' errore prodotto dalla sfericità delle lenti. Ma in quaſi tutti gli oggettivi della ſua Diottrica le lenti hanno le facciate di curvatura diverſa. Una lente, che debba eſſere di una data diſtanza focale, può avere le due curvature l' una dall' altra diverſe in infinite maniere, e quel numero, che determina certe curvature a preferenza di tutte le altre, è chiamato da *Eulero numero arbitrario*, ed è *minimo* quando ſi fa eguale all' unità, ed è ſempre maggiore dell' unità quando ſi vogliono le due facciate della lente di eguale sfericità, oſſia quando la lente è iſoſcele. Nel caſo poi del *minimo* ſi ha il vantaggio di non deviare molto dai riſultati indicati dalle formole algebraiche, quantunque l' artiſta faccia le curvature delle lenti un poco diverſe dalle preſcritte. Onde nella ſua Diottrica *Eulero* ha ſempre preferito di fare il *numero arbitrario* eguale all' unità piuttoſto che alla quantità, che rende le due facciate della lente eguali fra loro.

I famoſi oggettivi di *Dollond* hanno una lente iſoſcele, e le facciate di ciaſcuna delle altre due lenti ſono bensì diſeguali, ma non di tanto quanto importerebbe l' ipoteſi del *numero arbitrario* minimo. E queſto forſe vien fatto da *Dollond* per evitare le curvature troppo grandi, che impediſcono di dare una conſiderevole apertura all' oggettivo. E forſe ancora per la ſteſſa ragione ha *Eulero* abbandonata la ſua prima idea del *numero arbitrario* minimo, col ſoſtituire nel ſuo oggettivo perfetto due lenti iſoſceli a quelle di troppo diverſe curvature, tanto più che nell' eſecuzione viene notabilmente diminuita la ſpeſa, potendoſi lavorare l' oggettivo con quattro ſole pattine, mentre negli oggettivi della Diottrica ne abbiſognano ſei.

Eſſendomi venuta la curioſità di vedere in qual modo aveva *Eulero* ricavato dalle formole generali della ſua Diottrica l' indicato oggettivo perfetto, mi ſembrò che queſto poteva ridurſi ad una molto maggiore perfezione, ed a maggiore facilità, e minor diſpendio per l' eſecuzione. L' oggettivo, che ſono per proporre combinato con oculari ſimili a quelli di *Eulero*, dà gli ſteſſi ingrandimenti, che dà il ſuo, colla medeſima chiarezza, egual campo e diſtinzione, e pure il cannocchiale riſulta meno lungo dell' Euleriano nella ragione di 4 a 5. Così, a cagion d' eſempio, per un ingrandimento di 320 volte in un cannocchiale aſtronomico a due oculari la diſtanza dell' oggettivo dal ſito dell' occhio è per l' *Eulero* di 85 pollici e $\frac{1}{2}$, ma col ſeguente oggettivo queſta diſtanza non arriva a 69 pollici. Per lavorare l' oggettivo Euleriano vi vogliono quattro pattine, mentre pel ſeguente baſtano tre ſole. Finalmente, ſe non m' inganno, la correzione della confuſione prodotta dalla diverſa refrangibilità de' raggi, oſſia l' acromatiſmo, ſarà più eſatto in queſto, che in quello.

Mi ſervirò delle formole già dimoſtrate da *Eulero* nella ſua Diottrica, e prenderò per primo eſempio un cannocchiale Aſtronomico con un oggettivo triplo ed a due oculari. Sia dunque la ragione del ſeno d' incidenza al ſeno di rifrazione dall' aria nel vetro $= n$, per un' altra ſorta di vetro ſia queſta ragione $= n'$. Le diſperſioni di queſti due vetri saranno fra loro come $dn : dn'$. Aſſumeremo con *Eulero* pel vetro ingleſe volgarmente detto *Crown-glaſs* $n = 1,53$; pel *Flint-glaſs* $n' = 1,58$, e $\frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n'-1} = 7 : 10$. Facendo ora per brevità

$$\mu = \frac{n(4n-1)}{8(n-1)(n+2)}$$

$$\nu = \frac{4(n-1)^2}{4n-1}$$

$$\rho = \frac{4+n-2nn}{2(n-1)(n+2)}$$

$$\sigma = \frac{n(2n+1)}{2(n-1)(n+2)}$$

$$\tau = \frac{n\sqrt{(4n-1)}}{2(n-1)(n+2)}$$

e ſarà

Pel Crown-glaſs	Pel Flint-glaſs
$n = 1,53$	$n' = 1,58$
$\mu = 0,9875$	$\mu' = 0,8724$
$\nu = 0,2196$	$\nu' = 0,2529$
$\rho = 0,2267$	$\rho' = 0,1414$
$\sigma = 1,6601$	$\sigma' = 1,5827$
$\tau = 0,9252$	$\tau' = 0,8775$

Si ponga ora la diſtanza dell' oggetto dalla I lente oggettiva $= a$, la diſtanza della ſua immagine dalla ſteſſa lente $= \alpha$. Queſte due quantità a, α ſi ſogliono chiamare da *Eulero diſtanze determinatrici*, da altri *fochi conjugati*, e da altri a ſi nomina *foco dei raggi incidenti* ed α *foco dei raggi rifranti*. Sieno inoltre b, β; c, γ le diſtanze determinatrici della II e III lente dell' oggettivo: eſſendo queſto per ipoteſi di tre lenti ſarà γ il foco compoſto di tutte e tre; ſimilmente ſieno d, δ; e, ε le diſtanze determinatrici della prima, e della ſeconda oculare. Saranno le diſtanze tra la lente

I, e la II $= \alpha + b$
II, e la III $= \beta + c$
III, e la IV $= \gamma + d$
IV, e la V $= \delta + e$

Si faccia ora $\frac{a}{b} = -P$, $\frac{\beta}{c} = -Q$; $\frac{\gamma}{d} = -R$; $\frac{\delta}{e} = -S$;

$\frac{\beta}{b} = B$; $\frac{\gamma}{c} = C$; $\frac{\delta}{d} = D$; $\frac{\varepsilon}{e} = E$

e ſi ponga $B' = \frac{B}{B+1.}$; $C' = \frac{C}{C+1}$; $D' = \frac{D}{D+1}$; $E' = \frac{E}{E+1.}$.
le diſtanze focali delle lenti I, II, III, IV, V ſi chiamino p, q, r, s, t; e ſupponendo che la diſtanza a dell' oggetto dalla I lente ſia infinita, ſi avrà $p - \alpha$. Per fare poi che i raggi ſortano paralleli dall' ultima oculare ſi dovrà fare

$\varepsilon = \infty$, e ſarà quindi $e = t$, e per conſeguenza $E = \infty$, ed $E' = 1$.

Finalmente ſia π la ragione della ſemiapertura della II lente alla ſua diſtanza focale, π' la ſteſſa ragione per la III lente, π'', e π''' per la IV, e V lente, ed eſprimendo per m il numero delle volte che il diametro dell' oggetto viene ingrandito, coſicchè ſia nel noſtro caſo $m = -P\mathcal{Q}RS$, per O la diſtanza dell' occhio dall' ultima oculare; e per ϕ il ſemidiametro del campo apparente di maniera che ſia $\phi = \frac{\pi - \pi' + \pi'' - \pi'''}{m + 1.}$, ſi avranno le ſeguenti equazioni per le diſtanze determinatrici.

$$\alpha = \frac{P\mathcal{Q}}{BC}\gamma;\ b = \frac{-\mathcal{Q}}{BC}\gamma;\ \beta = \frac{-\mathcal{Q}}{C}\gamma;\ c = \frac{1}{C}\gamma$$

$$d = \frac{-1}{R}\gamma;\ \delta = \frac{-D}{R}\gamma;\ e = \frac{D}{RS}\gamma;$$

e le diſtanze focali ſaranno

$$p = \frac{P\mathcal{Q}}{BC}\gamma;\ q = \frac{-B'\mathcal{Q}}{BC}\gamma;\ r = \frac{C'}{C}\gamma;\ s = \frac{-D'}{R}\gamma,\ t = \frac{D}{RS}\gamma.$$

quindi gl' intervalli tra la

I, e la II lente $= \alpha + b = \frac{\mathcal{Q}\gamma}{BC}(P - 1)$

II, e la III $= \beta + c = \frac{\gamma}{C}(1 - \mathcal{Q})$

III, e la IV $= \gamma + d = \gamma\left(1 - \frac{1}{R}\right)$

IV, e la V $= \delta + e = \frac{-D\gamma}{R}\left(1 - \frac{1}{S}\right)$

e la diſtanza dell' occhio

dall' ultima oculare $= O = \frac{-\pi'''}{m\phi}t.$

Queſti intervalli devono eſſere tutti poſitivi, diverſamente ne riſulterebbe un cannocchiale illuſorio (*a*).

Siccome le prime tre lenti, che formano l' oggettivo, devono eſſere tra loro poco diſtanti per non diminuire di troppo il campo apparente, dovranno per conſeguenza P, e $\mathfrak{Q}$ eſſere poco differenti dell' unità, e potremo ſupporre come nell' oggettivo perfetto d' *Eulero* $P = \frac{20}{19}$ e facendo il primo intervallo $\alpha + b$ eguale al ſecondo $\beta + c$, oſſia $\frac{\mathfrak{Q}}{BC}\gamma(P - 1) = \frac{\gamma}{C}(1 - \mathfrak{Q})$ avremo $\mathfrak{Q} = \frac{19B}{19B + 1}$. Quindi ſiccome γ è poſitivo, e per ipoteſi $P > 1$, e $\mathfrak{Q} < 1$, acciocchè i due primi intervalli reſtino poſitivi dovranno eſſere B, e C poſitivi. Vedremo ben toſto che S deve eſſere neceſſariamente negativo, e per conſeguenza R poſitivo, onde l' ultimo intervallo $= \delta + e$ non può eſſere poſitivo a meno che non ſia D negativo.

Si avranno in ſeguito le equazioni ſeguenti.

$$\pi = \frac{(1 - P)\Phi}{B}$$

$$-\pi' = \frac{(1 - P\mathfrak{Q})\Phi - \pi}{C'}$$

$$\pi'' = \frac{(1 - P\mathfrak{Q}R)\Phi + \pi - \pi'}{D}$$

Per evitare gli angoli troppo grandi, e per avere nello ſteſ-

---

(*a*) Vennero alcune volte propoſte delle combinazioni di oculari affatto impraticabili appunto per non aver avuto riguardo alla qui indicata proprietà. Se per eſempio ſi voleſſero mettere due oculari in un cannocchiale aſtronomico in maniera che l' immagine reale ſtaſſe tra l' oggettivo e la prima oculare, ſi avrebbe neceſſariamente S poſitivo e maggiore dell' unità, R negativo, e D negativo, quindi l' intervallo tra le due oculari $= \delta + e$ riſulterebbe negativo, lo che ſarebbe un aſſurdo. Oltre di che ſe una tale combinazione foſſe praticabile, col togliere nello ſteſſo tempo il margine colorato degli oggetti, il campo apparente non riſulterebbe doppio, ma molto minore di quello, che ſi ottiene con una ſola oculare. Quindi ſi vede, che il progetto del celebre Artiſta *Ramsden* propoſto nelle Tranſazioni Filoſofiche della Società Reale di Londra per l' anno 1783 parte I pag. 94 non è eſeguibile.

ſo tempo un campo apparente più grande conviene fare iſoſcele l' ultima oculare, per lo che ſi potrà mettere

$$-\pi''' = \frac{1}{4}.$$

Il valore di ϕ è ſempre una frazione molto piccola quando m è grande, e le quantità P, e PQ ſono poco diverſe dall' unità, onde π, e π' diventano piccoliſſimi, e ſi poſſono conſiderare come eguali a zero. Per tal modo B, e C reſtano tuttavia indeterminate, e la terza equazione ſi riduce a

$$\pi'' = \frac{(1 - PQR)\phi}{D}$$

Ci reſtano ora tre equazioni alle quali conviene ſoddisfare. La prima, che ſerve a togliere i colori cagionati principalmente dalle oculari ſul margine degli oggetti è

$$0 = \frac{7\pi}{P} - \frac{10\pi'}{PQ} + \frac{7\pi''}{PQR} - \frac{7\pi'''}{PQRS}$$

Suppongo in queſta equazione, e nelle ſeguenti, che la ſola ſeconda lente dell' oggettivo ſia di Flint, e tutte le altre ſieno di Crown. I primi due termini di queſta equazione per la ragione poc' anzi accennata ſi poſſono tralaſciare, e ſi avrà

$$\pi'' = \frac{\pi'''}{S} = \frac{-1}{4S}$$

Per avere il più gran campo poſſibile biſogna prendere $\pi'' = \frac{1}{4}$, e fare la prima oculare iſoſcele conveſſa. Onde ne riſulta $S = -1$. e per conſeguenza avremo $PQR = m$, oſſia $R = \frac{m}{PQ}$, ed il ſemidiametro del campo apparente ſarà

$$\phi = \frac{\pi'' - \pi'''}{m+1} = \frac{1}{2(m+1)} = \frac{1718}{m+1} \text{ minuti di grado.}$$

L' equazione del paragrafo precedente colla ſoſtituzione de' valori ora trovati dà il valore di D', cioè

$$D' = \frac{\phi(1 - PQR)}{\pi''} = \frac{2(m-1)}{m+1}$$

Sarà

Sarà quindi

$$D = \frac{D'}{1 - D'} = \frac{-2(m-1)}{3m-1}$$

e nel caſo di m molto grande ſarà ſenſibilmente

$$D' = -2\text{, e } D = -\frac{2}{3}$$

La ſeconda equazione, che ſerve a togliere ogni confuſione prodotta dalla diverſa refrangibilità de' raggi, cioè che rende acromatico il cannocchiale, è

$$0 = 7 - \frac{10}{B'.P} + \frac{7}{BC'.PQ} - \frac{7}{BCD'.PQR} + \frac{7}{BCD.PQRRS}$$

I due termini ultimi, che appartengono alle due oculari, ſono molto piccoli riſpetto ai primi quando m è un numero molto grande, per eſſere $PQR = m$, e $PQRS = -m$, onde ſi potranno conſiderare come nulli. Non è nemmeno neceſſario di ſoddisfare a queſt' equazione con l' ultima eſattezza, primo perchè la proporzione di $\frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n'-1} = 7 : 10$ può eſſere un tantino diverſa nelle differenti paſte di Flint, e Crown, e poi perchè un piccolo sbaglio nell' acromatiſmo non pregiudica molto alla bontà del cannocchiale (*a*). Avremo dunque

$$0 = 7 - \frac{10}{B'.P} + \frac{7}{BC'.PQ}$$

ſoſtituendo i valori di $B' = \frac{B}{B+1}$, $P = \frac{20}{19}$, $Q = \frac{19B}{19B+1}$, ne ricaveremo

$$C' = \frac{7(19B+1)}{10B(5B+19)}$$

e quindi

(*a*) Il Sig. *Beguelin* ha dimoſtrato (Memoires de l' Acad. de *Berlin* de l' an. 1763 pag. 19) che ſe in un dato cannocchiale l' aberrazione prodotta dalla sfericità delle lenti preſa lungo l' aſſe, oſſia *l' aberrazione longitudinale di sfericità* è per eſempio di un pollice, per produrre un' eguale confuſione nell' occhio colla diſperſione de' colori fa d' uopo che l' aberrazione longitudinale di refrangibilità ſia di 520 pollici.

$$C = \frac{C'}{1 - C'} = \frac{7(19B + 1)}{50BB + 57B - 7}$$

Delle due quantità indeterminate B, C non ce ne rimane ora che una ſola in noſtro arbitrio, poichè l'altra reſta neceſſariamente determinata con queſta equazione. *Eulero* prima di riſolvere la terza, ed ultima equazione che viene in ſeguito, deve aver preſo ad arbitrio $B = \frac{9}{5}$ il qual valore ſoſtituito nelle due formole precedenti darebbe

$$C' = \frac{7(9 \cdot 19 + 5)}{90(9 + 19)} = \frac{1232}{2520} = \frac{22}{45} = 0,\ 4889$$

$$C = \frac{C'}{1 - C'} = \frac{22}{23} = 0,\ 9565$$

Ma dalle dimenſioni dell' oggettivo perfetto d' *Eulero* (*Inſtruction pour porter les lunettes au plus haut degré de perfection ecc.* pag. 28) ſi ricava $C = 1,\ 2762$, che è molto diverſo dal valore precedente. Dunque, ſe non mi ſono ingannato nei calcoli, ſi dovrà dire che l'oggettivo propoſto nell' opera citata non è acromatico quanto lo potrebbe eſſere. Mettendo nell' equazione generale dell' acromatiſmo

$$0 = \frac{dn}{n-1} - \frac{dn'}{n'-1} \cdot \frac{1}{B'P} + \frac{dn}{n-1} \cdot \frac{1}{BC'PQ}$$

i valori di $P = \frac{20}{19}$, $B = \frac{9}{5}$, $Q = \frac{19B}{19B+1} = \frac{171}{176}$,

$B' = \frac{B}{B+1} = \frac{9}{14}$, $C' = \frac{C}{C+1} = \frac{12762}{22762} = 0,\ 5607$, che ricavanſi dall' oggettivo Euleriano, ſi otterrebbe la ragione

$\frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n'-1} :: 3 : 4$, invece di quella che danno le ſperienze ed aſſunta dal medeſimo *Eulero* tanto nella ſua Diottrica quanto nell' opera ora citata, e che è $= 7 : 10$

Paſſiamo ora alla terza ed ultima equazione, che ſerve a diſtruggere totalmente o a rendere inſenſibile la confuſione cagionata dalla sfericità delle lenti. Ritenendo le denominazioni già indicate ed inoltre chiamando λ, λ', λ'', λ''', λ'''' i *numeri arbitrarj* per le lenti I, II, III, IV, V, dei quali numeri abbiamo già ſopra dato un cenno, l' equazione da riſolverſi nel noſtro caſo ſarà

$$0 = \lambda - \frac{\mu'}{\mu B' P}\left(\frac{\lambda'}{B'^2} + \frac{\nu'}{B}\right) + \frac{1}{B^3 C' P \mathfrak{Q}}\left(\frac{\lambda''}{C'^2} + \frac{\nu}{C}\right)$$

$$- \frac{1}{B^3 C^3 D' m}\left(\frac{\lambda'''}{D'^2} + \frac{\nu}{D}\right) - \frac{\lambda''''}{B^3 C^3 D^3 . m}$$

I numeri λ''', e λ'''' ſono già determinati per le condizioni trovate diſopra, cioè che le due oculari debbano eſſere iſoſceli conveſſe. Se inoltre aveſſimo già preſo ad arbitrio un valore di B, e da queſto aveſſimo colla formola del paragraſo precedente ricavato il valore di C, per ottenere un cannocchiale acromatico della medeſima forma di quelli propoſti da *Eulero* nella citata opera, biſognerebbe prendere ancora λ', e λ'' in modo, che la ſeconda, e terza lente dell' oggettivo foſſero iſoſceli, ed in queſt' ultima equazione non rimarrebbe d' incognito che il ſolo numero arbitrario λ della prima lente, il quale per conſeguenza facilmente coll' equazione medeſima ſi determinerebbe. Ma invece noi laſceremo indeterminata la lettera B, e prenderemo i numeri arbitrarj λ, λ', ecc. in maniera che tutte le lenti ſieno iſoſceli: colla riſoluzione poi di queſt' ultima equazione troveremo il valore di B, in ſeguito quello di C, e di tutte quelle lettere che da queſte dipendono

Per vedere in qual modo ſi determinano le curvature delle lenti per mezzo de' numeri arbitrarj, chiameremo F il raggio di ſfericità della facciata anteriore della prima lente oggettiva cioè di quella che è voltata verſo l' oggetto, e G il raggio della facciata poſteriore della ſteſſa lente; ſimilmente F', G'; F'', G''; F''', G'''; F'''', G'''' i riſpettivi raggi delle facciate anteriori, e poſteriori delle lenti II, III, IV, V; e ſiccome la ſola lente II è di Flint mentre tutte le altre ſono di Crown, avremo

$$F = \frac{\alpha}{\sigma \mp \tau \sqrt{(\lambda - 1)}} \qquad G = \frac{\alpha}{\rho \pm \tau \sqrt{(\lambda - 1)}}$$

$$F' = \frac{Bb}{\rho' B + \sigma' \mp \tau'(1 + B)\sqrt{(\lambda' - 1)}} \qquad G' = \frac{Bb}{\sigma' B + \rho' \pm \tau'(1 + B)\sqrt{(\lambda' - 1)}}$$

$$F'' = \frac{Cc}{\rho C + \sigma \mp \tau(1 + C)\sqrt{(\lambda'' - 1)}} \qquad G'' = \frac{Cc}{\sigma C + \rho \pm \tau(1 + C)\sqrt{(\lambda'' - 1)}}$$

$$F'' = \frac{Dd}{\rho D + \sigma \mp \tau(1 + D)\sqrt{(\lambda''' - 1)}} \qquad G''' = \frac{Dd}{\sigma D + \rho \pm \tau(1 + D)\sqrt{(\lambda''' - 1)}}$$

$$F'''' = \frac{e}{\rho \mp \tau\sqrt{(\lambda'''' - 1)}} \qquad G'''' = \frac{e}{\sigma \pm \tau\sqrt{(\lambda'''' - 1)}}$$

Eguagliando ora in ciaſcuna lente il raggio della facciata anteriore a quello della poſteriore ſi ricaveranno i valori dei numeri arbitrarj che ſaranno eſpreſſi nella maniera ſeguente.

$$\lambda = 1 + \left(\frac{\sigma - \rho}{2\tau}\right)^2 = 1,60006$$

$$\lambda' = 1 + \left(\frac{\sigma' - \rho'}{2\tau'}\right)^2 \left(\frac{1 - B}{1 + B}\right)^2 = 1 + 0,67446(1 - 2B')^2$$

$$\lambda'' = 1 + \left(\frac{\sigma - \rho}{2\tau}\right)^2 \left(\frac{1 - C}{1 + C}\right)^2 = 1 + 0,60006(1 - 2C')^2$$

$$\lambda''' = 1 + \left(\frac{\sigma - \rho}{2\tau}\right)^2 \left(\frac{1 - D}{1 + D}\right)^2 = 1 + 0,60006(1 - 2D')^2$$

oſſia per eſſerſi trovato ſopra $D' = -2$, ſarà

$$\lambda''' = 1 + 0,60006.25 = 16,00150$$

$$\lambda'''' = 1 + \left(\frac{\sigma - \rho}{2\tau}\right)^2 = 1,60006.$$

Si ſono già precedentemente trovati i valori di Q, B, C, C' eſpreſſi con funzioni di B; onde non rimane che di ſoſtituire queſti nella terza equazione indicata ſopra. Ma ſi entrerebbe in un calcolo troppo lungo ed operoſo, ſe dopo la ſoſtituzione ſi voleſſe riſolvere l' equazione direttamente, e mi pare più eſpediente il fare alcune ſuppoſizioni per i valori di B (*a*) che ſoſtituiti nell' equazione danno diverſi ri-

---

(*a*) Per non andare affatto a tentoni nelle prime ſuppoſizioni ſi potrebbe ottener una prima approſſimazione facendo $P = Q = 1$, e tralaſciando nell' equazione i termini che hanno m nel denominatore come molto piccoli; per tal modo l' equaziozione ſarebbe

$$0 = \lambda - \frac{\mu'\lambda'}{\mu B'^3} + \frac{\lambda''}{B^3 C'^3} - \frac{\mu' r}{\mu B B'}$$

ſultati, dai quali co' metodi conoſciuti ſi ricaverebbe il giuſto valore di B, che verifica l' equazione. In queſta maniera dopo poche ſuppoſizioni trovai che nel caſo di $m = 320$ deve eſſere $B = 0,9366$. L'ordine del calcolo nella riſoluzione dell' equazione potrebbe eſſere il ſeguente.

B . . . . $= 0,9366$
LB . . . . $= 9,9715542$
$L(B+1) = L\,1,9366$ . . . . . . $= 0,2870399$
LB' . . . . $= 9,6845143$
B' . . . . $= 0,48363$
$2B'$ . . . . $= 0,96726$
$L(1-2B')^2$ . . . . $= 7,0300778$
$L\,0,67446$ . . . . $= 9,8289562$
$L\,0,000723$ . . . . $= 6,8590340$
$\lambda' = 1,000723$

$L\,7$ . . . . $= 0,8450980$
$L(19B+1) = L\,18,7954$ . . . . . . $= 1,2740515$
L Numeral . . . . $= 2,1191495$
$L\,10B$ . . . . $= 0,9715542$
$L(5B+19) = L\,23,683$ . . . . $= 1,3744367$

$+ \frac{\nu}{B^3 CC}$. nella quale ſoſtituendo i valori di $B = \frac{B}{B+1}$; $C = \frac{7}{3(B+1)}$; $C' = \frac{7}{3B+10}$. $\lambda = 1,60006$;
$\lambda' = 1 + 0,67446\left(\frac{1-B}{1+B}\right)^2$;
$\lambda'' = 1 + 0,60006\,(1-2C')^2$
$= 1 + 0,60006\left(\frac{3B-4}{3B+10}\right)^2$, ed i valori di μ', μ, ν, ν ſopra aſſegnati, otterreſſimo un' equazione di terzo grado la quale riſolta dà i tre ſeguenti valori di B, $B = -1$; $B = 1,4023$; $B = 5,3485$. La prima radice $B+1=0$ è inutile, perchè indica ſoltanto il caſo di tre lenti piane, ſi potrà dunque prendere una delle altre due, per eſempio la ſeconda, come una prima approſſimazione. Si noti che queſto caſo particolare, e limitato dalle ſuppoſizioni di $P = Q = 1$, ed in cui non ſi tiene conto della confuſione prodotta dalle oculari, è ſtato già da molti Ottici trattato. Egli è per altro evidente che la groſſezza ſola delle lenti non permette di ſupporre $P = 1$, $Q = 1$, ma ſi dovrebbe fare almeno $P = \frac{46}{45}$ e $Q = \frac{45B}{45B+1}$.

L Denomin. . . . . $= 2,\ 3459909$

L Numerat. . . . . $= 2,\ 1191495$

LC' . . . . $= 9,\ 7731586$

C' . . . . $= 0,\ 59314$

$1 - C'$ . . . . $= 0,\ 40686$

$L(1 - C')$ . . . . $= 9,\ 6094429$

LC . . . . $= 0,\ 1637157$

$1 - 2C'$ . . . . $= 0,\ 18628$

$L(1 - 2C')^2$ . . . . $= 8,\ 5403510$

$L\ 0,\ 60006$ . . . . $= 9,\ 7781947$

$L\ 0,\ 020823$ . . . . $= 8,\ 3185457$

$\lambda'' = 1,\ 020823.$

$L\ 19B = L\ 17,\ 7954$ . . . . $= 1,\ 2503077$

$L(19B + 1)$ . . . . $= 1,\ 2740515$

$L\mathcal{Q}$ . . . . $= 9,\ 9762562$

Per maggiore facilità ſi diſpongano in ordine queſti valori

$L\frac{1}{B}$ . . . . $= 0,\ 0284458$

$L\frac{1}{B'}$ . . . . $= 0,\ 3154857$

$L\frac{1}{C}$ . . . . $= 9,\ 8362843$

$L\frac{1}{C'}$ . . . . $= 0,\ 2268414$

$L\frac{1}{\mathcal{Q}}$ . . . . $= 0,\ 0237438$

$L\frac{1}{P}$ . . . . $= 9,\ 9777236$

Calcolo dei termini della terza equazione.

$L\frac{\mu'}{\mu} = L\,0,\ 8834$ . . . . $= 9,\ 9461786$

$L\frac{1}{P}$ . . . . $= 9,\ 9777236$

$L\lambda'$ . . . . $=0,\ 0003138$

$L\frac{1}{B'^3}$ . . . . $=0,\ 9464571$

$L\frac{\mu'\lambda'}{\mu B'^3 P}=L\,7,\ 42460$ . . . . $=0,\ 8706731$

$L\lambda''$ . . . . $=0,\ 0089504$

$L\frac{1}{B^3}$ . . . . $=0,\ 0853374$

$L\frac{1}{P\mathcal{Q}}$ . . . . $=0,\ 0014674$

$L\frac{1}{C'^3}$ . . . . $=0,\ 6805242$

$L\frac{\lambda''}{B^3C'^3P\mathcal{Q}}=L\,5,\ 97420$ . . . . $=0,\ 7762794$

$L\nu'=L\,0,\ 2529$ . . . . $=9,\ 4029488$

$L\frac{\mu'}{\mu P}$ . . . . $=9,\ 9239022$

$L\frac{1}{BB'}$ . . . . $=0,\ 3439315$

$L\frac{\nu'\mu}{\mu BB'P}=L\,0,\ 46858$ . . . . $=9,\ 6707825$

$L\nu=L\,0,\ 2196$ . . . . $=9,\ 3416323$

$L\frac{1}{B^3P\mathcal{Q}}$ . . . . $=0,\ 0868048$

$L\frac{1}{CC'}$ . . . . $=0,\ 0631257$

$L\frac{\nu}{B^3CC'P\mathcal{Q}}=L\,0,\ 31014$ . . . . $=9,\ 4915628$

La ſomma de' termini che appartengono all' oggettivo ſarà quindi $1,\ 60006-7,\ 42460+5,\ 97420-0,\ 46858$

$+0,31014=-0,00878$. Paſſiamo al calcolo degli altri termini appartenenti alle oculari

$L\lambda''' = L\,16,0015 \;\ldots\ldots\ldots\; = 1,2041606$

$L\dfrac{1}{m} = L\dfrac{1}{320} \;\ldots\ldots\ldots\; = 7,4948500$

$L\dfrac{1}{B^3} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; = 0,0853374$

$L\dfrac{1}{C^3} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; = 9,5088529$

$L\dfrac{1}{D'^3} = L\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \;\ldots\ldots\ldots\; = 9,0969100\,(-)$

$L - \dfrac{\lambda'''}{B^3C^3D'^3m} = L + 0,00245 \;\ldots\; = 7,3901109$

$L\lambda'''' = L\,1,60006 \;\ldots\ldots\ldots\; = 0,2041363$

$L\dfrac{1}{m} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; = 7,4948500$

$L\dfrac{1}{B^3C^3} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; = 9,5941903$

$L\dfrac{1}{D^3} = L\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 \;\ldots\ldots\ldots\; = 0,5282739\,(-)$

$L - \dfrac{\lambda''''}{B^3C^3D^3m} = L + 0,00663 \;\ldots\; = 7,8214505$

$L\nu \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; = 9,3416323$

$L\dfrac{1}{m} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; = 7,4948500$

$L\dfrac{1}{DD'} = L\dfrac{3}{4} \;\ldots\ldots\ldots\; = 9,8750613$

$L\dfrac{1}{B^3C^3} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; = 9,5941903$

$L - \dfrac{\nu}{B^3C^3DD'm} = L - 0,00020 \;\ldots\; = 6,3057339$

La

La ſomma de' termini per le oculari ſarà $= 0,\ 00245 + 0,\ 00663 - 0,\ 00020 = 0,\ 00888$. La ſomma di queſti co' precedenti dell' obbiettivo ſarà dunque $= 0,\ 00888 - 0,\ 00878 = 0,\ 0001$. L' equazione reſta pertanto verificata col valore di $B = 0,\ 9366$, poichè la differenza di una diecimilleſima è affatto inſenſibile, e ſi può francamente traſcurare.

Per un altro ingrandimento m minore di 320 il riſultato dell' equazione diventa maggiore, coſicchè pel caſo di $m = 50$, arriva a $0,\ 0476$. Tuttavia ſiccome i più accreditati Autori d'Ottica *d' Alembert* (*a*), *Beguelin* (*b*), *Hennert* (*c*) ſoſtengono, che l' aberrazione cagionata dalla sfericità delle lenti, e miſurata ſull' aſſe del cannocchiale, e che chiamaſi volgarmente *aberrazione longitudinale*, è inſenſibile all' occhio quando non oltrepaſſa la quantità $0,080075\,\gamma$ e molte volte reſta ancora inſenſibile quantunque ſia maggiore di $0,\ 000075\,\gamma$; ci reſta da vedere quale debba eſſere il riſultato della noſtra equazione che renda l' *aberrazione longitudinale* $= \pm 0,\ 000075\,\gamma$. Pongaſi generalmente il riſultato medeſimo $= H$, ed il ſemidiametro dell' apertura dell' oggettivo $= x$. Vedremo toſto che il noſtro oggettivo dà $x = 0,\ 0975\,\gamma$; l' aberrazione longitudinale ſarà

$$\frac{\mu H B^2 C^2 D^2 x^2}{p}$$

Ora abbiamo già trovato $B = 0,9366$, $\log. C = 0,\ 1637157$, e per conſeguenza $C = 1,\ 4579$, $D = -\frac{2}{3}$, ed è

$p = \frac{PQ}{BC}\gamma = 0,\ 7299\,\gamma$, $\mu = 0,\ 9875$, $x = 0,0975\,\gamma$: fatta la ſoſtituzione di queſti valori nella formola precedente, eſſa diventa $= 0,\ 01066 H\gamma$, e fatta queſta eguale al limite dell' aberrazione inſenſibile $0,\ 000075\,\gamma$ darebbe

---

(*a*) Memoires de l' Acad. de Berlin. Année 1769 pag. 259.

(*b*) Memoires de l' Acad. de Berlin. An. 1763 pag. 9.

(*c*) Diſertation ſur les moyens de donner la plus grande perfection poſſible aux lunettes, qui a remportè le prix de l' Acad. de Berlin en 1771.

$H = 0,\ 00704$. Dunque finchè il riſultato della noſtra equazione non arriva a queſto limite $0,\ 00704$, ſi potrà prendere m maggiore, o minore di 320 come ſi vuole ſenza eſſere obbligati a mutare il valore trovato di $B = 0,\ 9366$. Vale a dire che, l' oggettivo, il quale fa il maſſimo effetto pel caſo di $m = 320$, ſarà con quella reſtrizione egualmente buono qualora gli ſi adattino delle oculari diverſe da quelle che convengono all' ingrandimento di 320 volte. Per la ſteſſa ragione quantunque nel caſo di $m = 320$ l' artiſta non eſeguiſca coll' eſtrema eſattezza le lenti in maniera che il valore di B devj un poco dall' aſſegnato $= 0,\ 9366$, purchè la deviazione non ſia tale da produrre $H > 0,\ 00704$, il cannocchiale ſarà ſempre eccellente, e la piccola confuſione che vi rimarrà non ſarà percettibile.

Dal calcolo eſpoſto abbiamo ottenuti i valori ſeguenti

$\text{Log.}\,B = 9,\ 9715542;$ $\quad B = 0,\ 93660$

$\text{Log.}\,B' = 9,\ 6845143;$ $\quad B' = 0,\ 48363$

$\text{Log.}\,C = 0,\ 1637157;$ $\quad C = 1,\ 45786$

$\text{Log.}\,C' = 9,\ 7731586;$ $\quad C' = 0,\ 59314$

$\text{Log.}\,P = 0,\ 0222764;$ $\quad P = 1,\ 05263$

$\text{Log.}\,\mathcal{Q} = 9,\ 9762562;$ $\quad \mathcal{Q} = 0,\ 94680.$

$\text{Log.}\,\frac{R}{m} = 0,\ 0014674;$ $\quad R = 1,\ 00338.m.$

$$S = -1.$$

$$D = -\frac{2(m-1)}{3m-1} = -\frac{2}{3}$$

$$D' = -\frac{2(m-1)}{m+1} = -2$$

Quindi per le diſtanze determinatrici ſi avrà

$\text{Log.}\,\frac{\alpha}{\gamma} = 9,\ 8632627;$ $\quad \alpha = 0,\ 72990\gamma$

$\text{Log.}\,\frac{b}{\gamma} = 9,\ 8409863;$ $\quad b = -0,\ 69340\gamma$

$\text{Log.}\,\frac{\beta}{\gamma} = 9,\ 8125405;$ $\quad \beta = -0,\ 64944\gamma$

$\text{Log.}\,\frac{c}{\gamma} = 9,\ 8362843;$ $\quad c = \ \ 0,\ 68594\gamma$

$$d = -\frac{1}{1,00338.m}\gamma = -\frac{\gamma}{m}$$

$$\delta = e = \frac{2(m-1)}{3m-1} \cdot \frac{1}{1,00338m}\gamma = \frac{2}{3m}\gamma$$

Gl' intervalli fra la lente

$$\text{I } e \text{ II} = \alpha + b = 0,03650\gamma$$

$$\text{II } e \text{ III} = \beta + c = 0,03650\gamma$$

$$\text{III } e \text{ IV} = \gamma + d = \frac{m-1}{m}\gamma$$

$$\text{IV } e \text{ V} = \delta + e = \frac{4}{3m}\gamma$$

Diſtanza dell' occhio $= O = \frac{m+1}{3mm}\gamma = \frac{1}{3m}\gamma$

La ſomma di tutti queſti intervalli darà la lunghezza del cannocchiale, che trovaſi $= \left(1,073 + \frac{2}{3m}\right)\gamma$. L' immagine reale in queſto cannocchiale ſta fra le due oculari, ed è diſtante dalla prima della quantità $\delta = \frac{2}{3m}\gamma$. Il ſuo ſemidiametro a cui ſi deve eguagliare il raggio del diaframma è $= \phi PQD\gamma = \frac{1}{3m}\gamma$

Le diſtanze focali delle lenti ſaranno

$p = 0,72990\gamma$; $q = -0,33535\gamma$; $r = 0,40686\gamma$

$s = -2d = \frac{2}{m}\gamma$; $t = \delta = \frac{2}{3m}\gamma$

Finalmente il raggio della facciata anteriore, e poſteriore della lente

Prima $= 2(n-1)p = 0,77369\gamma$

Seconda $= 2(n'-1)q = -0,38901\gamma$

Terza $= 2(n-1)r = 0,43127\gamma$

Quarta $= 2(n-1)s = \frac{2,12}{m}\gamma$

Quinta $= 2(n-1)t = \frac{2,12}{3m}\gamma$

Le due ultime lenti IV, e V, che ſono le oculari, devono avere tutta l' apertura di cui ſono capaci. Per trovare l' apertura dell' oggettivo $=2x$ ſeguiremo la pratica adottata da *Eulero*, la quale conſiſte nell' eguagliare x alla quarta parte del raggio minimo di curvatura delle tre lenti oggettive. Nel noſtro oggettivo il raggio minimo è quello della lente iſoſcele concava di Flint, cioè della lente II, e fu trovato $=0,38901\gamma$. Avremo dunque $x=\frac{0,38901}{4}\gamma$ $=0,0975\gamma$. Volendo dare al cannocchiale una grande chiarezza faremo pure con *Eulero* $x=\frac{m}{50}$, ed otterremo quindi $\gamma=\frac{m}{50.0,0975}=\frac{m}{5}$ proſſimamente.

Aggiungeremo ora un eſempio per direzione degli artiſti, e prenderemo il caſo di $m=320$, che è il maſſimo ingrandimento dato da *Eulero* a' ſuoi cannocchiali. Queſto ſervirà a confrontare i vantaggi dell' oggettivo trovato, con quelli dell' oggettivo perfetto Euleriano

Cannocchiale Astronomico

Con oggettivo triplo, e a due oculari, che ingrandiſce il diametro degli oggetti 320 volte.

	Pollici
I L' oggettivo compoſto di tre lenti avrà la ſua diſtanza focale di	64, 00
Il diametro della ſua apertura	12, 48
1°. La prima lente di Crown ed egualmente conveſſa d' ambedue le parti avrà la diſtanza focale	47, 71
Il raggio di curvatura dell' una, e dell' altra facciata	49, 52
2.° Dal mezzo di queſta lente al mezzo della ſeconda ſi metterà la diſtanza di	2, 34
3.° La ſeconda lente di Flint concava egualmente d' ambedue le parti avrà per diſtanza focale	21, 46
Ed il raggio di curvatura dell' una, e dell' al-	

	Pollici
tra facciata	24, 90
4.° La diſtanza del mezzo di queſta lente al mezzo della ſeguente deve eſſere	2, 34
5.° La diſtanza focale della terza lente di Crown egualmente conveſſa d' ambedue le parti	26, 04
Il raggio di curvatura di ciaſcuna delle ſue facciate	27, 60
II La diſtanza di queſt' oggettivo alla prima lente oculare	63, 87
La prima lente oculare di Crown egualmente conveſſa d' ambedue le parti avrà per diſtanza focale	0, 40
Ed il raggio di curvatura di ciaſcuna facciata	0, 42
III La diſtanza della prima oculare al diaframma dev' eſſere	0, 13
Il diametro del diaframma	0, 13
IV La diſtanza della precedente oculare alla ſeconda, ed ultima ſarà di	0, 27
La ſeconda oculare di Crown egualmente conveſſa d' ambe le parti, avrà per diſtanza focale	0, 13
Ed il raggio di ciaſcuna delle due facciate	0, 14
V La diſtanza dell' occhio dall' ultima oculare dev' eſſere di	0, 07
Il diametro del campo apparente ſarà di	$10', 42''$
La lunghezza totale del cannocchiale	68, 89

Adatteremo ora al medeſimo oggettivo una combinazione di tre lenti oculari diſpoſte in maniera che il cannocchiale ſerva per gli oggetti terreſtri, e li rappreſenti dritti. In queſto caſo prendendo $m = 200$ il riſultato dell' equazione, che ſerve a diſtruggere la confuſione cagionata dalla sfericità delle lenti, è $= 0, 00022 = H$, cioè molto minore del limite trovato ſopra, che era $= 0, 00704$, onde ſe ne può aſpettare il più grande effetto.

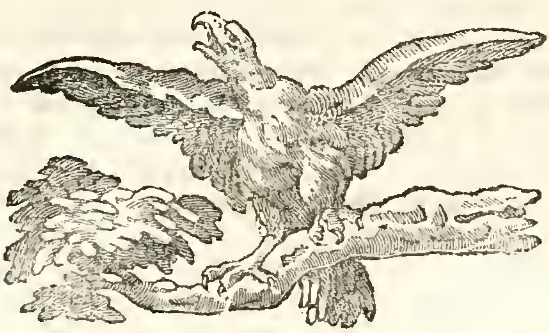
Cannocchiale Terrestre

Con oggettivo triplo ed a tre oculari che ingrandiſce il diametro degli oggetti 200 volte.

	Pollici
I L' oggettivo compoſto di tre lenti, delle quali la prima e la terza di Crown, e la ſeconda di Flint, avrà la diſtanza focale di	40, 00
Il diametro della ſua apertura	7, 80
1.° La prima lente di Crown egualmente conveſſa d' ambedue le parti avrà per diſtanza focale	29, 20
Ed il raggio di curvatura delle due facciate	30, 95
2.° Dal mezzo di queſta lente al mezzo della ſeconda vi ſarà l' intervallo di	1, 46
3.° La ſeconda lente di Flint egualmente concava d' ambedue le parti avrà per diſtanza focale	13, 41
Ed il raggio di curvatura di ciaſcuna delle due facciate	15, 56
4.° Dal mezzo di queſta lente al mezzo della terza vi ſarà l' intervallo di	1, 46
5.° La diſtanza focale della terza lente di Crown egualmente conveſſa d' ambe le parti ſarà di	16, 27
Ed il raggio di ciaſcuna delle due facciate	17, 25
II La diſtanza dell'oggettivo alla prima lente oculare ſarà di	40, 48
III La prima lente oculare di Crown egualmente conveſſa d' ambedue le parti avrà per diſtanza focale	0, 48
Ed il raggio di curvatura di ciaſcuna delle due facciate	0, 51
IV La diſtanza della prima oculare dalla ſeconda ſarà	2, 16
V La ſeconda oculare di Crown egualmente conveſſa d'ambedue le parti avrà per diſtanza focale	0, 97
Ed il raggio di ciaſcuna delle due facciate	1, 03
VI Fra la ſeconda e la terza oculare vi ſarà l' intervallo di	1, 37

	Pollici
VII La terza, ed ultima oculare di Crown egualmente conveſſa d' ambedue le parti avrà per diſtanza ſocale	0, 40
Ed il raggio di ciaſcuna delle due facciate	0, 42
VIII La diſtanza dell' occhio dall' ultima oculare dev' eſſere di	0, 28
IX Il diametro del campo apparente	12′ 9″
X La lunghezza totale del cannocchiale	47, 21.

Si potrebbero in ſimile maniera moltiplicare gli eſempj coll' adattare al trovato oggettivo altri ſiſtemi di oculari per ottenere un campo apparente più grande, come ha fatto *Eulero* nell' opera molte volte citata, ma per non prolungare più oltre queſto ſcritto finirò col rammentare agli artiſti l' avvertimento dato dal medeſimo *Eulero*, cioè che per una maggiore ſicurezza del buon eſito del cannocchiale, ſarà bene di prendere le miſure qui eſpoſte in pollici, e centeſime di pollice dal piede che ha i pollici più grandi. In caſo che le curvature delle lenti non riuſciſſero eſattamente della grandezza preſcritta, avvicinando, o slontanando un poco una lente dall' altra vi ſi potrà molte volte rimediare.



OSSERVAZIONI

SU I FELDSPATI, ED ALTRI FOSSILI SINGOLARI DELL' ITALIA.

Del P. Ermenegildo Pini Ch. Reg. B. Profeſſore di Storia Naturale a Milano indirizzate

Al Sig. Cavaliere Ignazio de Born Conſigliere nel Dipartimento Aulico delle Miniere, e membro delle Società di Pietroburgo, Londra, Upſal ecc.

Illuſtriſs. Signore.

Il nobile entuſiaſmo, con cui V. S. Illuſtriſs. intende alle ſcoperte di nuovi prodotti naturali, mi fece ſperare che ella foſſe per aggradire la notizia di alcune, per quanto io ſtimo, pregevoli pietre da me trovate nell' Italia. Per indirizzarle però queſte mie Oſſervazioni, che vi feci, mi convenne dimenticare per alcun poco la grandezza ed importanza delle ſcoperte da lei fatte nella Storia naturale, ed il pregio del metodo, con cui ella le fa eſporre; nè io certamente ſarei venuto in queſta determinazione, ſe non ſulla fiducia, che ella ſia per riguardarle anzi come amatore, che come giudice di queſta Scienza: la qual fiducia è appoggiata ſulle corteſi di lei maniere, che in più occaſioni ho io pure eſperimentate, e che ai Naturaliſti renderanno ſempre caro il di lei nome. Ho l' onore ecc.

Di varj Foſſili ſingolari dell' Italia.

NE' viaggi mineralogici, che feci per l' Italia, mi venne fatto di ſcoprirvi varj foſſili, che per la loro novità o rarità ſtimai di deſcrivere in alcuni Opuſcoli. Avendo compreſo che quelli dai Mineralogiſti furono riputati non immeritevoli della loro attenzione, vi proſeguii le mie ricerche o per me ſteſſo, o per mezzo di altre perſone che indirizzai in diverſe parti; ed in tal modo mi riuſcì di trovarne altri non meno pregevoli, i quali ora imprendo a deſcrivere.

1. Io comincierò dalle miniere di ferro dell' iſola d' Elba, ſiccome quelle che maggiormente contribuiſcono alla gloria mineralogica dell' Italia. Sono eſſe tanto eleganti per la loro forma, e così delizioſe per la varietà, e nitidezza dei colori, che a ragione è riputata imperfetta una collezione mineralogica, la quale ne ſia mancante. E veramente la loro bellezza, e varietà vuolſi riguardare non come uno ſterile ornamento della Mineralogia, ma anzi come un allettativo allo ſtudio di queſta ſcienza. Molti dei colori che ſi preſentano nella ſuperficie di queſte miniere furono già da me accennati nelle mie *Oſſervazioni mineralogiche ſulla miniera di ferro dell' Iſola d' Elba*. Altri in ſeguito aſſai ſingolari ne riconobbi, i quali non ſi poſſono abbaſtanza deſcrivere con parole. Fra i pezzi colorati ſi apprezzano maſſimamente i cangianti, cioè quelli, che mutano il colore col mutare di ſituazione o l' occhio, o l' oggetto. In un pezzo però oſſervai un ſucceſſivo cangiamento di colori per mezzo del ſolo alito, abbenchè rimanga fiſſo sì l' oggetto che l' occhio. L' alito ſuole appannare i corpi lucidi, e mutarne il colore deteriorandolo; nella miniera però da me accennata l' alito appena lo appanna, ed a miſura che eſſo vi perviene e che va ſvaporando vedeſi ſuccedere al color giallo di fuoco il verde di ſmeraldo e il roſſo di rubino aſſai vivo. Queſto pezzo è un' ematite azzurrognola quaſi lenticolare, le cui lenti ſono larghe ſino ad un pollice, e la cui ſuperficie riſplende di un color roſſiccio di fuoco cangiante con colore quaſi d' acqua marina. La cagione d' onde derivano i colo-

ri in queſte miniere già fu da me ſpiegata nella indicata Memoria, e da quella ſteſſa facilmente ſi può intendere come l' alito poſſa far cangiare colore conſervandoſi la vivacità, e lo ſplendore de' medeſimi.

2. Tra le criſtallizzazioni alcune parimenti ne incontrai in queſte miniere, che per innanzi non vi aveva mai vedute, nè da altri trovai deſcritte; e queſte ſono due maſſimamente cioè la parallelepipeda, e l' eſagona. Il Sig. *Romè de l' Isle* nella ſua eccellente Criſtallografia (*a*) deſcrive bensì varie miniere di ferro di quell' Iſola, la criſtallizzazione delle quali egli riduce a modificazioni del cubo. Niſſuna però è un vero cubo, nè un parallelepipedo, ma tutte ſono figure o di 12 facce, o di 24, o di 30, o di altro numero, le quali egli deriva dal cubo, introducendo in queſto arbitrarie addizioni, o ſottrazioni, o altre mutazioni. I parallelepipedi, che io deſcrivo, ſono perfetti almeno in quella parte, che rimane iſolata. Eſſi formano un elegante gruppo, nel quale ſono tra loro intrecciati oppure inſinuati nel rimanente del minerale. La parte, che rimane iſolata, ha i piani contigui ſituati tra loro ad angoli retti; e gli angoli ſolidi non ſono troncati. Molti però di queſti parallelepipedi hanno qualche angolo ſolido ridotto ad una piramidetta, come è nella figura I. l' angolo *n*. La grandezza dei maggiori non eccede le 4 linee.

3. Più ſingolare è l' altra criſtallizzazione in lamine eſagone. Queſte formano un elegante gruppo, in cui le lamine ſono tra loro intrecciate; una però rimane del tutto iſolata e moſtra la ſua figura compiutamente eſagona quaſi equilatera, così che anche le altre devonſi riputare di ſimile figura, benchè per eſſere inſerite l' una nell' altra moſtrino ſoltanto alcuni dei loro lati. Le lamine ſono forti ma però ſottili in modo che ſono quaſi taglienti; alcune inoltre vanno gradatamente ingroſſandoſi verſo il centro, così che ſembrano eſſere compoſte di due piramidi eſagone molto compreſſe, ed unite alla loro baſe.

4. La qualità della miniera, in cui ſi riconoſcono le due

(*a*) T. 2. Criſtallographie. Paris 1783.

indicate criſtallizzazioni è un'ematite azzurrognola. Nelle oſſervazioni ſopraccennate io deſcriſſi inoltre alcune ocree di ferro criſtallizzate eptaedre, e poliedre. Queſte ſono ſembrate tanto ſtrane al Sig. *de l' Isle*, che ſenza complimenti aſſerì quelle eſſere ematiti ſoltanto incroſtate di ocrea. La facilità, con cui egli ſtima che altri abbia pigliato in iſcambio la croſta pel nocciolo, fa ſoſpettare che a lui ſia non di rado intervenuto di prendere un ſimile granchio. Io però prima di aſſerire, che quelle criſtallizzazioni foſſero di materia ocracea, ne ſpezzai più d' una, e trovai che nell' interno erano ſimili all' eſterno, cioè a dire avevano un apparenza terrea di color giallaſtro foſco, come lo ſogliono aver le ocree oſſia le calci di ferro volgari, nè certamente in neſſuna parte compariva quel teſſuto, e quello ſplendore che è proprio delle ematiti azzurrognole. La ſingolarità pertanto di queſte criſtallizzazioni non dovrà ritenere il Sig. *de l' Isle* dall' aumentare con eſſe la ſua Criſtallografia.

5. Un altro pregio della Mineralogia Italiana è ripoſto nei belli criſtalli di feldſpato che trovai nel granito di Baveno, e che già deſcriſſi in una particolare Memoria (*a*). Queſto pregio diviene maggiore atteſa la preſente rarità, della quale a taluno piacque di farne carico a me, quaſi come ſe aveſſi a tal fine uſato un mezzo ſimile a quello, che diceſi praticato dagli Olandeſi per far divenire prezioſe certe droghe. Ma la vera cagione ſi è, che dopo della ſcoperta da me fatta ed enunciata di queſti criſtalli tutti ſi affrettarono di raccogliere quelli, che negli antichi lavori del granito erano ſtati abbandonati ſulla montagna, ed in ſeguito eſſendoſi diminuito il lavoro di queſto ſaſſo, ſi diminuì anche l' occaſione di poterne eſtrarre.

6. Queſti criſtalli ſono o bianchi, o roſſi carnicini; ed i primi ſono più rari dei ſecondi. La figura sì degli uni che degli altri ſuol eſſere parallelepipeda col vertice poliedro, e tali parallelepipedi ſogliono eſſere quaſi equilateri. I più grandi da me finora trovati hanno due pollici di larghezza, e

---

(*a*) Memoire ſur des nouvelles criſtalliſations de Feldſpath. Milan 1779.

3 di altezza, o lunghezza, e queſti ſono roſſi; tra i bianchi il più groſſo è ſolo di 16 linee di larghezza, e di due pollici di altezza. Nella deſcrizione, che già diedi, di queſti criſtalli notai le diverſità più principali dei loro vertici. In ſeguito altre molte varietà trovai nei vertici ſteſſi, le quali ſarebbe inutile di deſcrivere, ſiccome quelle che non conducono a niſſuna utile conſeguenza. Il Sig. *de l' Isle* però ne fece una ſeria occupazione avendone data una copioſa, e minuta deſcrizione parte nelle figure che io ho anneſſe alla ſopraccitata mia Memoria, e parte ſui feldſpati che io diedi al Sig. *Beſſon*, o che altronde gli pervennero; anzi egli ſi luſinga di avere dai vertici ſteſſi riconoſciuta la natura de' criſtalli medeſimi. Per determinarla diſtingue i criſtalli in ſemplici, e compoſti, da lui nominati *Macles*, e che ſi poſſono chiamare *Applicatelli*: per la compoſizione ſuppone, che due criſtalli ſieno ſtati come diviſi longitudinalmente ognuno ſecondo una diverſa diagonale, e che quindi ſi ſieno riuniti nella direzione delle diagonali medeſime: poſta la quale combinazione il vertice di queſti criſtalli compoſti riſulta quaſi dalle metà di due vertici di criſtalli ſemplici. Queſta appoſizione però è del tutto arbitraria sì perchè egli non ne arreca veruna prova, e sì anco perchè tra gli accennati criſtalli niſſuno moſtra di eſſere unito nella ſuppoſta maniera, quando che in molti ſi riconoſce chiaramente che ſono quaſi come formati da due o più, uniti in una direzione parallela alle loro facce. E veramente quell' angolo ſinuoſo, che io ho notato nel vertice di qualche criſtallo, e che il Sig. *de l' Isle* prende per argomento della ſua ſuppoſizione, può bensì provare l' unione da me indicata, ma non quella da lui ſuppoſta, giacchè tale angolo è diretto non a ſeconda della diagonale, ma bensì verſo il mezzo de' lati.

7. Ommettendo pertanto molte varietà dei vertici, che in ſeguito mi ſi preſentarono, paſſerò ad alcuni criſtalli a priſma romboidale, che nei feldſpati di Baveno ſono rariſſimi. Nella mia Memoria ne indicai alcuno, il quale però era poco bene determinato. Ma due ne raccolſi dappoi del tutto deciſi. Uno di queſti che è carnicino è iſolato, ed è diſegnato nella figura 2. in grandezza naturale. La ſezione perpendicolare all' aſſe del priſma è un rombo *AECB* (*Fig.* 2.

n.° 2.) con uno degli angoli minori alquanto ſmozzato, così che il piano potrebbeſi riguardare come pentagono a cagione del piccolo lato *CD*. L'angolo maggiore *ABC* è di 120.°, ed il minore *BAE* di 60.° Il priſma è a doppio vertice, uno dei quali è diedro a piani quaſi triangolari *GIL*, *GFL*; l'altro è un poco guaſto così che non ſi può determinare la figura dei piani.

8. L' altro priſma romboidale è di feldſpato bianco, ed è ſimile al precedente, ſe non che è alquanto più grande eſſendo di 8 linee di larghezza.

9. Oltre alla figura priſmatica, o parallelepipeda o romboidale trovaſi nei feldſpati di Baveno anche il priſma eſagono. Di queſti ultimi io già deſcriſſi più varietà ed anche quella che ha il vertice diedro (pag. 56.), che che in contrario ne dica il Sig. *de l' Isle*. A queſte io ora ne aggiugnerò un' altra di feldſpato bianchiſſimo, che è un priſma eſagono quaſi equilatero a doppio vertice piano, e parallelo.

10. Nelle cavità dei graniti di Baveno, nelle quali ſogliono ſtar racchiuſe le accennate criſtallizzazioni, trovai una materia bianchiſſima che alle qualità eſterne io reputo feldſpato. Eſſa è ſtriata, ma aſſai fragile, ed è quaſi diſpoſta in criſtalletti priſmatici: è opaca, e ſi ſpezza in laſtrine o ſcagliette. Potrebbeſi quella chiamare feldſpato fragile.

11. Nei gruppi, che riſultano dall' intreccio dei varj criſtalli di feldſpato, ſcriſſi già che talora trovaſi fluor minerale; aggiunſi pure che talora il fluore è inſerito anche nella ſoſtanza medeſima del granito, a cui ſono aderenti i criſtalli ſteſſi; onde il Sig. *de l' Isle* che aſſeriſce il contrario ſembra non avere abbaſtanza inteſe le mie eſpreſſioni.

12. Dall' eſiſtenza del fluor minerale in queſti gruppi di feldſpato, e nel granito ſteſſo, come pure dal decrepitare, che quelli fanno nel fuoco, conghietturai che nella compoſizione di quelli entraſſe qualche porzione di fluor minerale. I fondamenti di queſta conghiettura non ſono certamente molto ſolidi, e perciò io non molto ho inſiſtito ſu di eſſa. Per deciderſi converrebbe far l' analiſi di queſti feldſpati dirigendola appunto a queſto fine di ſepararne il fluor minerale, o almeno di trovarvene i componenti. Nell' analiſi che l' eſimio Profeſſore *Scopoli* fece dei feldſpati criſtallizzati di Ba-

veno e che corteſemente mi comunicò, egli vi trovò della terra calcarea, la quale è uno dei componenti del fluor minerale. Per cercar l'acido ſpatico, che ne è l'altro componente, converrebbe iſtituir l' analiſi in modo, che queſto, quando vi foſſe, ſi poteſſe ſviluppare dalle altre molte ſoſtanze, che entrano nei feldſpati ſteſſi, e ſeparatamente raccogliere; la qual maniera di analiſi finora non è ſtata iſtituita, e perciò non ſi può aſſicurare, che queſto acido non vi eſiſta. Che qualche acido eſiſta nei feldſpati, tuttochè neſſuno finora ne lo abbia ſeparato, da molti argomenti ſi può raccogliere come più ſotto accennerò, e quando vi ſia non ſi potrà determinarne la natura ſe non dappoichè ſia attualmente ſeparato da ogni altra ſoſtanza.

13. Vengo ora ai feldſpati da me ſcoperti al *S. Gottardo*, montagna ſituata nell' Italia ſui confini cogli Svizzeri. Quelli furono da me deſcritti in due Opuſcoli già da qualche anno pubblicati (*a*): la loro ſingolarità m' induſſe a proſeguirne la raccolta ſulla ſperanza di trovare altri pezzi curioſi, ed iſtruttivi; e dopo d' avere, direi quaſi, fatta ſpazzare quella montagna, feci pure abbaſſare le acque di un laghetto, ſotto le quali vedevaſene una certa quantità. Con tali diligenze mi riuſcì di averne altri pezzi, che meritano di eſſere qui rammemorati.

14. Nella ſopraccitata mia Memoria diſſi già, che la figura romboidale era la più comune nei feldſpati da me raccolti al S. Gottardo. Queſto ſteſſo ho veduto verificato anche in ſeguito; e coſtantemente l' angolo maggiore del rombo è di circa 120.°, ed il minore di 60.° come nei feldſpati di Baveno a priſma romboidale, dei quali angoli ſpeſſo uno degli ottuſi, e talora anche uno degli acuti è troncato in modo che forma un piccolo lato. Queſti rombi trovanſi ſpeſſo elegantemente intrecciati, e formano de' grandiſſimi gruppi ora inſeriti in una matrice granitoſa, ed ora ſenza matrice. Di queſti gruppi uno ne ebbi lungo 2 piedi, largo $1\frac{1}{4}$, ed alto $1\frac{1}{2}$. Talora i rombi anche ſolitarj ſono di grandezza

---

(*a*) *Oſſervazioni mineralogiche nella montagna di S. Gottardo* inſerita nel Tomo IV. degli Opuſcoli Scelti di Milano 1781. *Memoria mineralogica nella montagna, e ſuoi contorni di S. Gottardo*. Milano 1783.

giganteſca; ed il maſſimo tra quelli da me in ſeguito raccolti è lungo 9 pollici, largo 7 $\frac{1}{2}$, alto 8; e queſto è ſemitraſparente, e vi ſi veggono delle lamine cangianti con colore di madriperla. Alcune volte queſti rombi ſono intrecciati con groſſi, e terſiſſimi criſtalli di rocca giallicci. La criſtallizzazione in forma di parallelepipedo ſul principio della raccolta era rariſſima, dappoi divenne alquanto più frequente; e con queſta figura ſi preſentarono diverſi feldſpati di maraviglioſa grandezza. Il più grande è largo 8 pollici, alto 9. Il ſuo vertice è alquanto rotto, così che non vi ſi poſſono determinare i piani; e ſu di un lato è veſtito di mica eſagona argentina roſacea. Generalmente anche queſti feldſpati parallelepipedi ſono ſemitraſparenti, ed hanno il vertice a piani indeterminati, ſembrando come compoſto dal concorſo di rombi, o di altre criſtallizzazioni. In queſti vertici frequentemente s' incontrano angoli ſinuoſi, i quali ſogliono eſſere diretti verſo il mezzo delle facce del priſma; talora anche il mezzo è incavato a forma quaſi di piramide quadrilatera. Come tali vertici ſieno compoſti dal concorſo di diverſe criſtallizzazioni ſi può comprendere dalla loro ſpezzatura, nella quale le laſtrine ſi veggono manifeſtamente unite a diverſi angoli in diverſa direzione.

15. Ordinariamente uno ſolo è il vertice di ciaſcun parallelepipedo; talora però ne ſono due oppoſti, ma ſempre a piani indeterminati, almeno nei ſemitraſparenti. Incontranſi talora feldſpati parallelepipedi opachi bianchi, i quali ſi raſſomigliano aſſai a quelli di Baveno, eccettochè nella deciſione, e nettezza dei piani.

16. Nei feldſpati di S. Gottardo i priſmi eſagoni ſono aſſai rari, e più ſpeſſo vi s' incontrano de' priſmi poligoni, ma con un numero indeterminato di facce, delle quali anche alcune ſogliono eſſere inſinuate o in altri criſtalli o in granito: sì gli eſagoni che i poligoni ſembrano provenire da rombi inſinuati l' uno nell' altro in modo, che dalle loro facce, che rimangono al di fuori, riſultino priſmi di più o meno facce.

17. Altre criſtallizzazioni più o meno irregolari mi ſi ſono preſentate, il pregio delle quali è ripoſto maſſime nella

loro prodigioſa grandezza che talora giunge ad un piede, e mezzo.

18. Per la grandezza sì di queſti, come di que' due criſtalli regolari poc' anzi deſcritti, i feldſpati del S. Gottardo ſi devono riguardare i più giganteſchi dopo i criſtalli di rocca. L'Italia in quella parte, che ſu i ſuoi confini forma il Valleſe, ha il pregio di contenere i più groſſi criſtalli di rocca, dei quali colà ne vidi uno di piedi due e mezzo di diametro. A tale grandezza di criſtallizzazione neſſun' altra materia giugne quando pure non ſi vogliano tra' criſtalli annoverare le colonne, o i priſmi di baſalte. Ma in queſti non ſi ſono per anco riconoſciuti veri caratteri di criſtallizzazione. E veramente affinchè una figura regolare poſſa riputarſi provenuta da criſtallizzazione conviene, che quella riſulti nella attuale combinazione di fina materia ſciolta in qualche fluido, alla quale ſoluzione riduceſi anche la fuſione; ed allora abbiamo argomento che in una data materia ſia naturalmente intervenuta queſta operazione, quando quella anche iſolata trovaſi di una data figura regolare. Ma la figura dei priſmi baſaltici ſembra provenuta dappoichè la materia era già ridotta in groſſe ed informi maſſe, le quali nel riſtringerſi ſi ſieno ſtaccate l'una dall'altra. In fatti tali priſmi giganteſchi non mai ſi trovano creſciuti ſolitarj, ma ſempre ſono oppoſti gli uni agli altri, inoltre le facce dei priſmi ſteſſi non hanno quella uniformità di ſuperficie, che nei veri criſtalli ſi oſſerva, ma preſentano quelle ſcabrezze, e diſuguaglianze che ſogliono intervenire nei diſtacchi di materie che ſi riſtringono. I criſtalli di rocca pertanto avranno nella grandezza il primo luogo ſu tutte le materie criſtallizzate finora note, ed i feldſpati criſtallizzati del S. Gottardo il ſecondo.

19. In tale grandezza però ſono innumerevoli degradazioni ſino alla ſottigliezza minore di quella d' un ago. Queſti criſtalletti più fini ſono ſparſi ſu i più grandi in forma di aghi, i quali ſpeſſo ſono diſtribuiti a rete: il che forma la varietà di feldſpato acicolare e reticolato. Per lo più il reticolato riluce per una tenue tinta ocracea, l' acicolare talora è roſſo di minio. Queſta ſeconda varïetà incontraſi ſparſa ſopra un gruppo di criſtalli poliedri di feldſpato bianco opaco,

paco, ed è anche inſinuato nella matrice, che è un aggregato di ſimile feldſpato, e di mica.

20. Avendo eſpoſte quelle varietà di feldſpati che mi ſi preſentarono nelle ulteriori raccolte da me fatte, vengo ora a dire di alcune oſſervazioni che in ſeguito vi feci. Primamamente nel colore generalmente li trovai o bianchi, o lattei, e tra queſti ſecondi alcuni hanno una tinta verdiccia. Ordinariamente al fuoco non decrepitano, abbenchè ſieno criſtallizzati: il che è un' eccezione al principio aſſerito dal Sig. *Kirvan* (*a*), il quale ſembra non aver conoſciuti i feldſpati di S. Gottardo.

21. Nella maggior parte dei feldſpati di queſta montagna da me ſucceſſivamente raccolti trovai un'altra proprietà, che ai primi mancava. Queſta è che nello ſpezzarli eſalano un odore quaſi ſimile a quello della pietra ſuilla, il quale dura per lo ſpazio di circa la decima parte di un minuto, più o meno ſecondo la groſſezza de' pezzi. Quello, che è più ſingolare, ſi è, che queſto odore non eſala ſtropicciando un pezzo contro l' altro, nella qual operazione ſi ſente ſolo un odore quaſi ſimile a quello, che tramandano i quarzi tra loro sfregati. Quell' odore puzzolente ſembra un indizio dello ſviluppamento di qualche ſoſtanza volatile combinata con qualche acido.

22. Sulla ſtruttura lamellare dei feldſpati eſpoſi già quanto baſtava per una deſcrizione. Al preſente gioverà aggiugnere una diverſità, che è tra queſta ſtruttura e quelle che il Sig. *Sauſſure* aſſegnò in altri feldſpati da lui oſſervati, e che il Sig. *de l' Isle* adotta come univerſale. L' eſimio Profeſſore di Ginevra riduce tali laſtrine a priſmi rettangoli tron-

---

(*a*) Il *Kirvan* pag. 127 Elemens de Mineralogie aſſeriſce, *che il feldspato criſtallizzato decrepita ad un moderato calore; il che non fa quello, che non è criſtallizzato*. Nella mia Memoria ſu i feldſpati di Baveno accennai bensì che ciò era vero in queſta ſpecie. Ma per rapporto ad altre la coſa è altrimenti. In fatti nelle mie Oſſervazioni Mineralogiche ſu i feldſpati di S. Gottardo al §. 23. notai, che eſſi non ſogliono decrepitare al fuoco, benchè ſieno criſtallizzati; ſoggiunſi anche che per contrario in un feldſpato dell' iſola di Bornholm io avea oſſervata la decrepitazione abbenchè non foſſe criſtallizzato.

cati obliquamente da due piani paralleli come nella figura *ABDIEFGL* (*fig.* 3.), così che ognuna di eſſe preſenta quattro facce rettangole cioè *AIFG*, *BDEL*, *ABDI*, *GLEF*, e due in figura di parallelogrammo, o di rombo allungato, quali ſono *IDEF*, *ABLG*. Nei feldſpati di S. Gottardo le laſtre hanno bensì un contorno di quattro facce tra loro perpendicolari, le altre due però non ſono parallele ma del tutto irregolari così che nè ſono piane, nè formano colle facce contigue un angolo coſtante. Tali certamente ſi preſentano alloraquando ſi ſpezzano anche feldſpati meno conſiſtenti, o ſi conſiderano quelli, che da ſe ſteſſi ſono giunti ad un certo grado di ſcompoſizione. A maggior dichiarazione di tal coſa ſia *DMBACN* una laſtra (*fig.* 4.) nella quale intendanſi le tre rette *AD*, *AB*, *AC* tra loro perpendicolari, eſprimenti tre diverſe direzioni. Se la laſtra *DMBC* nel totale era naturalmente unita nei piani *ABNC*, *DACL*, quella per la ſola percoſſa rieſce diviſibile in ogni punto per piani perpendicolari sì alla direzione *AD*, come all' altra *AB*: ed in tal modo ſi può per eſempio colla ſola percoſſa ritrarne la laſtrina *GPEAIFCK*, che è racchiuſa da quattro piani contigui tra loro perpendicolari. Ma non mai la laſtra ſi ſpezza per piani perpendicolari alla terza direzione *AC*; onde per eſempio la indicata laſtrina *PC* ha ſempre le due eſtremità *GE*, *KF* irregolari.

23. Queſto vale nei pezzi, in cui le laſtre hanno una direzione coſtante; ma alcuni le hanno viſibilmente in diverſa direzione. Così alcuni nella ſezione preſentano un piano il quale ha le laſtrine diſtribuite come nella figura 5., oppure come nella figura 6; altri finalmente le hanno in direzioni molto varie, e queſti ſembrano eſſere riſultati dalla combinazione di diverſi criſtalli. Qualunque però di quelle porzioni, che ha le laſtre in direzione diverſa dalle altre contigue, come ſono le porzioni *ENK*, *ENF* (*Fig.* 6.) preſenta quella diſpoſizione di laſtrine che poc' anzi ho ſpiegata; cioè a dire ognuna, come *ENK*, avrà le laſtre ſpezzabili per piani perpendicolari a due direzioni, e non mai a tre.

24. Per facilità d'eſpreſſione io chiamerò *commeſſura* l'unione delle laſtre nelle direzioni, ſecondo le quali le laſtre ſi poſſono ſpezzare per piani paralleli, quali ſono *ADLC*,

VEF, come pure *ABNC*, *HGK* (*fig.* 4.); *Giuntura* l' unione delle medeſime in quella direzione ſecondo la quale le ſpezzature non rieſcono in piani paralleli come è il piano *XOR*.

25. Le laſtrine, di cui ſono compoſti i feldſpati di S. Gottardo, ſono ſottiliſſime. La maſſima ſottigliezza loro ſi preſenta principalmente nel romper de' groſſi pezzi, giacchè allora nel forzato diſtacco ſi ſeparano lamine tanto ſottili, e lunghe, che quaſi ſono fleſſibili. In queſte però per la loro ſottigliezza non ſi conſerva un contorno regolare, e però non ſi può in una direzione riconoſcere il paralleliſmo delle commeſſure.

26. Da queſte ſottiliſſime laſtrine ne riſultano altre più groſſe; ma queſte nella loro unione hanno anche nei pezzi più grandi frequenti commeſſure viſibili, le quali tolgono l' uniformità alla pietra. Queſte commeſſure ſono tanto frequenti che appena può ritrarſene qualche laſtrina netta in groſſezza di tre linee. Inoltre nelle giunture in vece di commeſſure trovanſi frequentiſſimi peli in ogni direzione, e di figure irregolariſſime. Di qui è che i pezzi groſſi più di mezzo pollice ſogliono eſſere ſoltanto ſemitraſparenti, ſebbene ciaſcuna laſtrina, da cui quelli ſono compoſti, ſpeſſo ſia traſparentiſſima.

27. Dalle coſe eſpoſte è manifeſto, che la ſtruttura lamellare nei feldſpati di S. Gottardo è diverſa da quella, che il Sig. *Sauſſure* ha riconoſciuta in altre pietre di tal natura, e che il Sig. *Romè de l' Isle* non ſolo riguarda come generale ai feldſpati, ma aſſume anche come un principio per iſpiegarne le diverſe criſtallizzazioni dei medeſimi (*a*). Egli ſtima, che avendo le lamelle eſpoſte dal Sig. *Sauſſure* due facce in forma di parallelogrammo e quattro in forma di rettangolo, ſi poſſa da queſta ſtruttura facilmente intendere come i criſtalli di feldſpato ora ſieno priſmi romboidali, ora

---

(*a*) La deſcritta ſtruttura, e maniera di ſpezzarſi dei feldſpati di S. Gottardo dimoſtra pure non eſſere generalmente vero, che il feldſpato ſi ſpezzi in cubi, o rombi, come aſſeriſce il Sig. *Mongez* nella nota al §. CXXX. *Sciagraphie du Regne mineral par M.* Bergman Paris 1784.

rettangoli. Ma primamente i feldſpati di S. Gottardo non avendo nelle loro lamelle verun piano in forma di parallelogrammo o di rombo, eſſi certamente non poſſono eſſere riuſciti romboidali a cagione della figura delle loro lamelle; in ſecondo luogo, eſſendo ogni lamella quaſi come una criſtallizzazione, rimane ancora a ſpiegare d' onde in queſte derivi la figura o romboidale, o altra qualunque. Finalmente, ammeſſa anche l' indicata figura delle laſtrine, potrebbe dalla loro unione riſultare qualunque altra figura di criſtallizzazione. Perciocchè eſſe, come accennai, ſono piccoliſſime, e ſottiliſſime; ed altronde è noto che da piccoli criſtalli di una data figura può riſultare un corpo di qualunque altra figura, come per eſempio da un poligono di molti lati può riſultare un circolo e da molti cubetti può formarſi una sfera. E veramente nei feldſpati noi vediamo anche la figura priſmatica eſagona, e poliedra, e molte altre figure indeterminate, che non ſono riducibili a priſmi quadrangoli ſe non introducendo, come fa il Sig. *de l' Isle*, in una ſuppoſta figura arbitrarie addizioni, e ſottrazioni con altre modificazioni, per mezzo delle quali alla fine ſi può intendere che da un corpo qualunque derivi qualunque altro di qualſivoglia figura. Così per eſempio in quel modo che uno può derivare la figura del priſma eſagono da diverſi rombi tra loro combinati, altri potrà per contrario derivare la figura del priſma romboidale, conſiderandolo come una porzione del priſma eſagono. Un eſagono equilatero (*Fig.* 7.) ha ogni lato eguale al raggio *GC* del circolo, dentro del quale può eſſere inſcritto; e però, conducendo i tre raggi *GC*, *GA*, *GE*, eſſo ſarà diviſo in tre parallelogrammi eguali *ABCG*, *GCDE*, *AGEF*, che ſaranno altrettanti rombi. Se ſu queſto eſagono intendeſi formato un priſma retto, e ſe ſupponeſi che pei tre raggi paſſino altrettanti piani perpendicolari all' eſagono, facilmente s' intenderà ciò, che ho detto della derivazione vicendevole del priſma romboidale dall' eſagono.

28. Dalla diſpoſizione ſopraccennata delle lamelle dipende il cangiante colorato, che forma uno dei principali pregi dei feldſpati di S. Gottardo da me già chiamati Adularie. Le lamelle nei piani delle loro commeſſure ſono bensì liſce, e ſpeſſe volte più luſtre di quel, che ſi poſſa ottenere coll'

artificiale pulimento; ma non mai ſono cangianti. Il cangiante, quando vi è, ſempre ſi preſenta ſoltanto ſulle giunture. Due ſpecie però di cangianti voglionſi diſtinguere. Uno ſi ha per rifrazione combinata colla rifleſſione; l' altro per ſemplice rifrazione, o traſmiſſione. Il cangiante, che ho detto preſentarſi ſulle giunture, è della prima ſpecie; e queſto ordinariamente ſi vede dirigendo il piano delle giunture alla luce, e tenendo l' occhio dalla ſteſſa parte da cui cade la luce. Affinchè però il cangiante compaja, conviene che l'occhio ſia ſituato in una certa direzione per rapporto all' oggetto. L'altro cangiante di traſmiſſione ſi ha anche ſu i piani delle commeſſure; e perchè queſto ſia ſenſibile, conviene che la lamella ſia tra la luce e l' occhio, e che queſto ſia ſituato in una certa direzione per rapporto al piano ſteſſo. Il primo cangiante di rifleſſione ſuol eſſere più vivo del ſecondo e di un colore più carico che l'altro di traſmiſſione, il quale ſolitamente conſiſte in un colore dilavato più o meno ceruleo.

29. La formazione del cangiante di rifleſſione dipende primamente da una diſperſione della luce incidente. Queſto io ho riconoſciuto principalmente in un pezzo di adularia traſparentiſſimo, e cangiante con una luce viva, ma non molto colorata. Eſſendo queſto ben pulito in piano, ed avendolo avvicinato alla luce di una candela in modo che dal piano poteſſe all' occhio pervenirne la rifleſſione, vidi che eſſo rifletteva due immagini della medeſima, cioè a dire in una certa ſituazione l' immagine della fiamma era rifleſſa diſtintamente come da uno ſpecchio, ed in quella ſituazione non appariva il ſolito cangiante; in altra ſituazione poco diverſa l'immagine della fiamma compariva più languida, ed accompagnata nel ſuo contorno da una diſperſione di luce, la quale rendeva la pietra diſugualmente cangiante, ed a miſura che io andava allontanando la pietra dalla fiamma, l'immagine di queſta ſempre più ſi andava confondendo colla luce diſperſa dal ſuo contorno, e finalmente ſul piano della pietra non altro più compariva ſe non un cangiante uniforme: la qual uniformità proveniva dalla ceſſazione di quella maggior vivacità che era nell'immagine della fiamma quando era più vicina.

30. Il cangiante adunque deriva primamente da una diſperſione di luce, la quale, come è manifeſto, è anche accompagnata da rifleſſione. Queſta però proviene non ſolo dal piano ſuperficiale della pietra, ma anche da altri, che ſono al diſotto della ſuperficie ſteſſa, i quali pure producono una ſimile diſperſione di raggi. Di che è pruova il vedere che il colore del cangiante rieſce tanto più dilavato, e meno vivo, quanto più ſi aſſottiglia la pietra.

31. Finalmente a formare il cangiante concorre una ſeparazione di certi raggi colorati. E veramente provenendo quello anche da raggi rifleſſi dalle laſtrine ſottopoſte alla ſuperficie, è manifeſto che queſti sì nell' entrarvi, come nell' uſcirne devono rifrangerſi. In queſta rifrazione ſi fa una ſeparazione di certi raggi colorati ſotto a certi angoli: d'onde ſegue che il cangiante ſecondo la diverſa natura delle lamelle ſi preſenta ſotto diverſo colore, e che queſto non è viſibile ſe non ſotto certi angolì.

32. Il cangiante pertanto delle adularie ſi può riguardare come una copioſa rifleſſione di luce diſperſa, e rifratta. La rifleſſione è copioſa in quanto che ſi fa da molti piani ſituati a diverſe diſtanze dalla ſuperficie, ed in tanto molta luce ſi riflette in quanto che in molti piani ſuccede pure la diſperſione. Eſſendo le laſtrine diſpoſte parallelamente per riguardo a due direzioni tra loro perpendicolari, ſembra che quelle poſte in una di tali direzioni ſervano alla diſperſione della luce, e che le altre riflettano verſo la ſuperficie gl'indicati raggi ſotto certi angoli che altronde ſono dipendenti anche dalla rifrazione.

33. Dalle coſe dette ſi poſſono ſpiegare le molte varietà, che oſſervanſi nel cangiante di queſti feldſpati. In alcuni queſto ha un colore molto carico, in altri aſſai dilavato; alcuni anche ne mancano del tutto. Quelli, che non lo hanno, o ſono opachi, o ſono i più traſparenti. La ragione per cui i primi ne ſono mancanti è forſe perchè eſſendo opachi non può farviſi quella rifleſſione, e rifrazione di luce che ho accennata: onde preſentano ſolo in ſuperficie quella variazione di luce che è comune a tutti i feldſpati. I traſparentiſſimi in tanto non hanno il cangiante in quanto che le loro lamelle ſono più fittamente unite, così che tra l' una e l' altra

non può intervenire quella modificazione di luce che più ſopra ho accennata. Queſti però ſogliono in vece avere una vivacità di luce tale, che quando ſono faccettati, puliti, ſuperano talora nello ſplendore qualunque altra gemma, eccetto il diamante.

34. Il colore, col quale appare il cangiante, è o ceruleo, o argentino, o giallognolo, o bianchiccio quaſi ſtriato; talora è anche roſſiccio di fuoco ma dilavato, le quali varietà dipendono dalla diverſa aggregazione, o coerenza delle lamelle. Il cangiante ſcherza sì ſulle facce piane, che ſulle curve; ma ſu queſte ſeconde ſi preſenta più facilmente, e gira col girare della pietra come interviene negli occhi di gatto, e nelle lunarie: il che ſecondo i principj poc' anzi arrecati dee appunto intervenire. Sulle ſuperficie piane la luce rieſce più viva che ſulle curve di modo che vi ſi può ſcoprire qualunque piccoliſſimo atomo che vi ſi ſovrapponga, e qualunque ſottiliſſimo sfregio che vi ſia. Per queſta proprietà combinata colla molta durezza della pietra io già propoſi di farne uſo per camei, e maſſime ſigilli, giacchè l'inciſione vi ſpicca a meraviglia, e prende una maggiore morbidezza. Finora però atteſa la piccolezza delle laſtre proveniente dalla cagione ſopraindicata appena ſi è potuto formare qualche pezzo netto di una grandezza ſufficiente a tale uſo.

35. Allora che nell'anno 1781. pubblicai le mie Oſſervazioni ſulla montagna del S. Gottardo riportai ai feldſpati quelle pietre colà trovate, in cui riconobbi il compleſſo di quelle proprietà maſſimamente eſterne, che da altri erano già ſtate aſſunte per caratteri dei feldſpati. Tali proprietà ſono 1.° la ſtruttura lamellare, 2.° lo ſcintillare alla percoſſa con acciajo, 3. il cangiante della pietra. A queſte aggiungevanſi la criſtallizzazione in priſmi romboidali, o parallelepipedi già riconoſciuta in altre ſimili pietre riputate generalmente feldſpati, la non difficile ſuſione, e la natura del ſaſſo in cui queſte ſi trovano, il quale è un deciſo granito, tra i cui ingredienti è il feldſpato. Queſte proprietà certamente baſtavano per riportare le accennate pietre ad uno dei generi già conoſciuti dai Mineralogiſti, nè mi ſembrò che coll' analiſi ſi poteſſe giugnere ad una maggiore determinazione. Imperocchè allora non erano ancora ſtate ben analizzate quelle

pietre, che con queſto nome s' indicavano, nè ſi era fiſſato quali componenti foſſero richieſti per coſtituire il feldſpato, ed altre molte pietre. Onde coll' analiſi ſi ſarebbero bensì potuti riconoſcere certi componenti di quelle pietre, ma non avrebbero ſervito a riportarle al genere dei ſeldſpati nè ad altro genere già noto;, ſe non al caſo che quelli conveniſſero con quelli fiſſati per tal genere, il che per le coſe dette troppo difficilmente avrebbe potuto intervenire.

36. Al preſente maſſime dopo le diligenti ricerche del Sig. *Bergman* ſonoſi aumentate le determinazioni dei componenti di diverſe pietre, e con ciò ſi ſono bensì aumentate le cognizioni chimiche dei foſſili, ma non ſi è per anco facilitata la determinazione ſiſtematica dei medeſimi, così che dall'analiſi non ſi ſaprà ancora ſe le pietre riputate generalmente feldſpati ſieno da riportarſi a queſto genere o ad altro. Quel ſommo Chimico determinò cinque terre ſemplici, cioè la ponderoſa, la calcarea, la ſelcioſa, l' argillacea, e la magneſia; e queſte ſebbene in natura non ſi ſogliono trovare del tutto pure; cio non oſtante potendoſi eſſe ſeparare quando ſono unite, e diſtinguere tra loro, prende dalle varie loro combinazioni i caratteri di diſtinzione delle diverſe pietre. In tal modo potendoſi quelle cinque terre combinare due a due, tre a tre ecc., ſi poſſono avere tante diviſioni oſſia altrettanti generi, quante ſono le diverſe combinazioni di queſte cinque qualità. Anzi potendo eſiſtere, ed eſiſtendo realmente altri foſſili diverſi in natura dalle terre, e diverſi pure tra loro, come ſono i ſali, i bitumi, ed i metalli, e potendo queſti combinarſi colle terre, ſi potrà perciò avere un numero molto maggiore di combinazioni; e conſeguentemente di generi di pietre.

37. Nell' eſecuzione però di tal maniera di diviſioni, che ſembra la più preciſa, e la più ſemplice, ſi oppongono molte difficoltà. Una delle principali è che in moltiſſime pietre tra loro diverſiſſime d' apparenza, e riputate comunemente di genere diverſo, trovanſi gli ſteſſi componenti: onde coll' accennata maniera di diviſioni ſi confondono molti generi già abbaſtanza diſtinti, e pochi generi ne poſſono riſultare. Così

ſecondo il *Bergman* (*a*) il quarzo, il pietroſelce, e la zeolite hanno per componenti la terra ſelcioſa, l' argillacea, e la calcarea, e però dovrebbero ſormare un ſolo genere, abbenchè lo ſteſſo Chimico realmente li diſtingua, come anche gli altri Mineralogiſti ſanno. Parimenti la mica, ed il feldſpato ſecondo lui ſono compoſti di terra ſelcioſa, ed argillacea, e di magneſia. Perlochè in tal modo l' analiſi ſerve anzi a conſondere le pietre già diſtinte di quel che ſia a fiſſarvi una più preciſa diſtinzione. Sembrerebbe poterſi togliere tale confuſione con aver riguardo non ſolo alla qualità, e al numero delle terre ſemplici, ma anche alla quantità oſſia proporzione nella quale ſono tra loro combinate. I Signori *Bergman*, e *Kirvan* (*b*) hanno di ſatti aſſunto tale principio. Ma nel farne uſo tornano maggiori confuſioni, ed ambiguità. Perciocchè in due modi ſi può eſprimere la proporzione dei componenti, cioè o indeterminatamente uſando i vocaboli di poco, o molto, oppure con determinazioni numeriche. La prima maniera è generalmente ſeguita dal *Bergman*, come quando dice che la mica è compoſta di argilla, di molto ſelce, e di poca magneſia intimamente unita all' argilla ſteſſa. La ſeconda è ordinariamente ſeguita dal *Kirvan*, dicendo per eſempio, che la mica è un' argilla unita con $\frac{116}{100}$ del ſuo peſo di ſelce, $\frac{7}{10}$ di magneſia pura, e $\frac{5}{10}$ di ferro deflogiſticato. Queſta ſeconda maniera è bensì più determinata quanto all' eſpreſſione; ma non può valere ſe non per quel tal pezzo che ſi è analizzato; perciocchè non mai ſi troveranno due pezzi, benchè in apparenza egualiſſimi, i quali abbiano gli ſteſſi componenti nella medeſima proporzione, che ſi è trovata in uno; (*c*) e però ſe nella proporzione dei componenti ſi pone la natura delle pietre per coſtituirne i generi o qualunque diviſione ſiſtematica, non mai ſi potrà ad un genere fiſſato riportare un' altra pietra che

---

(*a*) Sciagraphia Regni Mineralis Lipſiæ 1782.

(*b*) Elemens de Mineralogie. Paris 1785.

(*c*) Queſta verità è manifeſta dai principj, che ho eſpoſti in una Introduzione *Sull' Unicità degli Eſſeri Fiſici*, che ho premeſſa alla Traduzione da me pubblicata degli Elementi di Storia Naturale del Sig. *Leſke*, in Milano 1786 Vol. II. in 8.

ſi trovi: onde ne riſulteranno tanti generi di pietre, quanti ſaranno i pezzi che ſi analizzeranno, cioè a dire ſi avranno innumerevoli generi, i quali non rappreſenteranno che le ſingole pietre analizzate, e perciò non ſi potranno neppur conſiderare come generi. Per introdurre una maggiore determinazione potrebbeſi aver riguardo anche al modo d' unione delle diverſe qualità, e quantità di terre tra loro combinate. Così il *Bergman* per diſtinguere la mica dal feldſpato, le quali due pietre ſecondo lui hanno lo ſteſſo numero, e le ſteſſe qualità di componenti, aggiugne che nella mica l' argilla è intimamente unita con un poco di magneſia, la qual intima unione non è notata nel feldſpato. Poco però per l' accennato oggetto ſi profitta anche con queſto ripiego: perciocchè una terra ſi riguarda da noi più o meno intimamente unita con un' altra ſecondo che più o meno difficilmente riuſciamo a ſepararle; e queſta difficoltà è relativa ai mezzi con cui ſi tenta la ſeparazione. Altronde non ſi può far uſo di tal ripiego, ſe non aſſegnando il grado di unione con eſpreſſioni o indeterminate o numeriche; nel che intervengono quelle difficoltà, che ho accennate nell' eſpreſſione delle proporzioni dei componenti.

38. Nell' aſſumere per caratteri di diſtinzione i componenti chimici avvi un' altra difficoltà, ed è che le qualità dei componenti, le loro proporzioni, ed il grado di loro unione ſono coſe relative alle operazioni che ſi fanno nell' attuale analiſi, così che facendovi altre operazioni generalmente ſi avrebbero altri riſultati (*a*). Di ciò abbiamo moltiſſimi eſempj nelle ſole opere di *Bergman*. Di qui è che ſe dopo d' aver claſſificate le pietre ſecondo i componenti trovati con certi proceſſi vi ſi ſcopriſſe con altri qualche altro componente, converrebbe mutarne la claſſificazione: onde il metodo di claſſificare appoggiato ai ſoli componenti chimici ha in sè un principio d' incertezza e di mutabilità.

39. Aggiugneſi che non di rado i Mineralogiſti chimici in certe pietre da ognuno di eſſi riguardate, per eſempio, come feldſpati trovarono diverſi componenti, tuttochè abbiano

---

(*a*) Vedaſi il Capo II. della citata Introduzione.

nell' analiſi ſeguito lo ſteſſo proceſſo; e quindi ciaſcuno fiſsò per caratteri dei feldſpati quei componenti che vi trovò. Così il *Bergman* per caratteri di queſte pietre fiſsò una combinazione di terra ſelcioſa, di argilla, e di un poco di magneſia. Laddove ſecondo il *Kirvan* vi dee inoltre eſſere contenuta anche terra peſante in una certa proporzione. Onde è che il feldſpato di *Bergman* non è quello di *Kirvan*, così che un Mineralogiſta non potrebbe chiamare feldſpato una pietra ſe non aggiugnendo il nome dell' Autore, che egli ha ſeguito. Che ſe avvenga che un altro Chimico in una pietra che ha tutte le apparenze di feldſpato trovi qualche altro componente, egli non potrebbe riportarla nè al feldſpato di *Bergman*, nè a quello di *Kirvan*, e così rieſcirebbe inutile la claſſificazione di queſti due celebri Mineralogiſti. Ciò appunto interviene nei feldſpati di Baveno, ne' quali ſecondo l' analiſi del Sig. *Scopoli* non ſi trova la terra peſante ammeſſa dal *Kirvan* per carattere del feldſpato; e per contrario contiene terra calcarea, che ſecondo il *Bergman* non entra tra i componenti caratteriſtici del medeſimo.

40. Sembrami inoltre veriſimile che nei feldſpati contengaſi qualche ſoſtanza ſalina probabilmente acida, la quale ſe vi foſſe contenuta formerebbe un altro componente diverſo dai già trovativi; nel qual caſo la claſſificazione delle pietre ſecondo i loro componenti richiederebbe che per il feldſpato ſi fiſſaſſero altri caratteri diverſi da quelli finora determinati. Che i feldſpati contengano qualche ſoſtanza acida io il conghietturo dall' odore che tramandano sfregandoli tra loro: il quale certamente indica una ſoſtanza volatile; e che queſta ſia accompagnata da acido ſi può argomentare dal piccante dell' odore medeſimo. In quei feldſpati, che contengono terra calcarea, ſiccome ſono quelli di Baveno, non ſi può dubitare che eſiſta almeno l' acido aereo. In molti feldſpati di S. Gottardo ſembra contenerſi anche un altro acido ſimile a quello, che è contenuto nella pietra ſuilla; e queſti ſono quelli, i quali nello ſpezzarli tramandano un odore puzzolente ſimile a quello che dalla pietra ſuilla viene tramandato. Per decidere ſe queſto, od altro acido, ed in genere ſe qualche ſale ſia contenuto nei diverſi feldſpati, conviene dirigere l' analiſi eſpreſſamente a tal fine, ed uſare quei pro-

ceſſi, i quali non poſſano alterare le ſoſtanze ſaline, al caſo che vi ſieno contenute; e forſe che con tali cautele ſi riuſcirà a ſcoprire nei feldſpati di Baveno l' acido ſpatico, il quale, quando vi eſiſteſſe, formerebbe colla terra calcarea già ſcopertavi il fluor minerale, che io ſoſpettai eſſervi contenuto. Le rifleſſioni finora fatte non tendono ed eſcludere le claſſificazioni ſiſtematiche, le quali altronde quanto ſi debbano valutare fu già da me generalmente dimoſtrato nella ſopraccennata Introduzione. Solo io inteſi a far vedere, che i componenti chimici non baſtano da ſoli a fare una preciſa claſſificazione dei foſſili, e che non ſono per anco fiſſati i componenti diſtintivi del feldſpato, così che a determinare ſe una pietra ſia o no feldſpato i caratteri eſterni ſopraindicati ſaranno ancora da ſeguirſi a preferenza di qualunque analiſi che di quella ſi faccia; ed io non credo di avere errato, allorchè ſeguendo tali caratteri ho riportato ai feldſpāti quelle pietre del S. Gottardo, che ho chiamate adularie.

41. Fuvvi bensì chi avanzò, che tali adularie erano zeoliti, e preteſe provarlo con certi argomenti derivati da alcune eſperienze. La nullità però de' ſuoi argomenti fu già da me dimoſtrata con altre eſperienze, che ho pubblicate in un Supplemento (*a*), ed il traſunto di queſte gioverà che io qui riporti accompagnato da qualche rifleſſione. Il principale argomento diretto a provare, che l' adularia è una zeolite, conſiſteva nell' aſſerire che quella nel fuoco ſi comporta nello ſteſſo modo come queſta. Per riconoſcere ſe così foſſe o no, feci le ſeguenti eſperienze paragonate.

ESPERIENZA I.

42. Preſi un pezzo di adularia traſparentiſſima, groſſo alcune linee, e due pezzi ſimili di feldſpato, uno bianco di Baveno, e l'altro di Danimarca, ambedue quaſi ſemitraſparenti; appreſtai pure alcuni pezzi ſimili di zeolite sì criſtallizzata traſparente, che non criſtallizzata dell' Iſola di Ferae. Avendo quindi fatti arroventare due crogiuoli, in uno gettai

---

(*a*) Supplemento alle Oſſervazioni Mineralogiche ſu la montagna di S. Gottardo nel Tom. VI. degli Opuſcoli Scelti di Milano.

i feldſpati, e nell' altro ripoſi ſeparatamente le zeoliti. Queſte ſubito ſi gonfiarono ſparpagliandoſi in una forma arborizzata, ed in due minuti anche ſenza l' azione del mantice ſi fuſero in parte, formando una materia ſemivetrificata, che legava inſieme i pezzetti non fuſi. Per contrario l' adularia rimaſe illeſa per qualche tempo; ed avendo animato il fuoco col mantice per circa 6 minuti perdette ſoltanto la ſua traſparenza, e divenne più fragile di prima, il che pure accadde agli altri due feldſpati, i quali inoltre decrepitarono.

ESPERIENZA II.

43. Riduſſi in polvere groſſiera due altri pezzi, uno di adularia, e l' altro di zeolite peſanti ciaſcuno danari 5 $\frac{1}{4}$. Quindi appreſtai due crogiuoli di argilla apira di Bialla alti 2 pollici, ed internamente gl' intonacai di polvere di carbone. In uno di eſſi ripoſi la polvere di adularia e nell' altro quella della zeolite, e coprii ambedue i crogiuoli lutandone anche il coperchio. Ciò fatto li diſpoſi in un forno docimaſtico alleſtito nel modo, con cui ſoglio fondere le miniere di ferro, e di cobalto che ſono le più refrattarie, ed uſai le richieſte diligenze, affinchè l' azione del mantice riuſciſſe contemporaneamente eguale ſu ambedue i crogiuoli. Dopo 7 minuti di fuoco li ritirai, e trovai la zeolite compiutamente fuſa: per contrario l'adularia non aveva ſegno neppure di principio di fuſione: ma ſolo la polvere era un poco aderente in guiſa però, che per una leggiera raſchiatura le particelle facilmente ſi ſtaccavano.

44. Il vetro della zeolite I. era ſpumoſiſſimo maſſime alla ſuperficie ſuperiore, ove le bolle erano rotte, e larghe ſino a tre, ed anche quattro linee: II. occupava un volume almeno 3 volte maggiore di quello che aveva la ſua polvere prima della fuſione: III. peſava ſolo danari 4 $\frac{1}{4}$, cioè a dire perdette quaſi il ſeſto del ſuo peſo: IV. Il colore era grigio bianco: V. la parte inferiore della maſſa vitrea percoſſa con acciajo dava ſcintille, ſiccome quella che era più compatta del rimanente.

ESPERIENZA III.

45. Ripoſi nel fuoco l' adularia ſola, laſciandola nello ſteſſo crogiuolo che tornai a ricoprire, e lutare, ed avendolo eſtratto dopo 11 minuti di fuoco animato dal mantice come prima, la trovai fuſa.

46. Il vetro opaco, in cui ſi riduſſe I. era niente ſpumoſo, ma compatto maſſime verſo la ſuperficie ſuperiore, la quale era liſcia con qualche piccola prominenza tubercoloſa ma ſolida, ſolo moſtrava diverſe bollicine nell' interno, e maſſime quella ſuperficie, che era ſtata in contatto colla polvere di carbone: II. occupava un volume la metà minore di quello che aveva la ſua polvere prima della fuſione: III. peſava danari 5 $\frac{11}{14}$ cioè a dire perdette ſolo il centeſimo del ſuo peſo: IV. il colore era bianco grigio nell' interno, e latteo verſo la ſuperficie ſuperiore: V. percoſſo con acciajo dava copioſe ſcintille non ſolo nella parte inferiore, ma in qualunque altra ancora.

47. Paragonando gli eſpoſti riſultati appare chiaro 1.° che l' adularia a leggiero fuoco poco o nulla ſi altera, laddove la zeolite ſi gonfia, e tende a fonderſi. 2.° che a fuoco maggiore la zeolite ſi fonde molto più facilmente dell' adularia. 3.° che il vetro riſultante dalla zeolite è nel peſo, nel volume, nella conſiſtenza, ed in altre qualità diverſiſſimo da quello che riſulta dall' adularia. Da che vuolſi conchiudere che queſte due pietre ſi comportano nel fuoco in un modo aſſai diverſo, così che l' adularia al fuoco non manifeſta veruno carattere proprio della zeolite.

48. La principale proprietà della zeolite al fuoco è di gonfiarſi, e di produrre un vetro ſpumoſo; ed è bensì vero che ſecondo le oſſervazioni del *Cronſtedt* (a) alcune ſpumeggiano meno delle altre; ma però tutte almeno nella ſuperficie preſentano molte bolle bianche: le quali coſe nell' adularia non intervengono: l' altra proprietà, che le zeoliti manifeſtano al fuoco, è di fonderſi molto facilmente. La faci-

---

(a) Pag. 108. Verſuch einer Mineralogie. Leipzig. 1770.

lità di fonderſi è un termine relativo che non ſi può determinare ſe non per confronto. Ora nel fatto paragone vedeſi che la zeolite ſi fonde molto più facilmente anche in confronto dell' adularia. Perciocchè per la fuſione di queſta non baſtano 7 minuti di vivo fuoco (Eſp. II.), laddove la zeolite cominciò a fonderſi al primo ardore di un crogiuolo rovente (Eſp. I.).

49. Io avrei deſiderato di fare un' analiſi dell' adularia anche per la via umida, non dubitando che da queſta ſarebbe parimenti riſultato che eſſa non ha le proprietà della zeolite. Ma per l'occupazione in altri oggetti, finora non ebbi tale opportunità di tempo. Quando altri penſi ad intraprenderla, gioverà che egli avverta, che alcuni feldſpati, quali ſono quelli di Baveno, ſe ſi calcinano con alcali minerale, e quindi vi s' infonde acido marino, eſſi ſi ſciolgono, e la loro ſoluzione ſi coagula, come interviene nelle zeoliti trattate in ſimile maniera. Quindi anche nelle adularie calcinate con alcali potrebbe facilmente intervenire, che infondendovi acido o marino, o d' altra natura, la ſoluzione ſi coagulaſſe. Queſto però, ſe accadeſſe, non dovrebbe far ſoſpettare che foſſero zeoliti. Perciocchè è bensì vero, che molte zeoliti hanno la proprietà di far coagulare l' acido, da cui vengono ſciolte; ma tal coagulazione non ſi ſuol riguardare come propria di queſte pietre, ſe non al più quando eſſa interviene ſenza eſſere ſtate trattate coll' alcali.

50. Coi feldſpati traſparenti è molto affine un' altra pietra, che talora ſebbene aſſai di rado trovaſi nelle montagne di S. Gottardo. E' quella traſparentiſſima, e nitidiſſima, ed aſſai più dura del feldſpato, e del criſtallo di rocca; la ſpezzatura è quaſi vitrea, ma non forma angoli così taglienti come quelli del quarzo; ſu i piani delle ſpezzature preſenta un cangiante colorato, ma foſco, ed aſſai dilavato. All' occhio non vi ſi riconoſce la ſtruttura lamellare; ma che eſſa ſia formata a lamelle ſi può conghietturare sì dall' indicato cangiante (V. §. 28.), e sì anche da certi ſcalini aſſai fitti che talora riſultano nelle ſpezzature. Quando ſi ſpezza eſala quell' odore che più ſopra ho accennato (§. 21.). Al fuoco decrepita, ed i pezzi alquanto groſſi che rimangono ſi ſcrepolano, e divengono tanto fragili, che colle mani

ſi poſſono rompere. Finalmente è di fuſione più difficile del feldſpato.

51. Finora non ebbi di tal pietra che pezzi groſſi ſino a 3 pollici, i quali erano rottami provenienti da altri più groſſi: onde non ho potuto rilevarne la figura originaria. Dall' eſame però di queſti ſembrami che eſſa ſia priſmatica eſagona, non molto diſſimile da quella dei criſtalli quarzoſi. Sulle facce però, che ſi riconoſcono intatte, non vedonſi quelle ſtriſcie, o ſtrie perpendicolari all' aſſe del priſma, le quali ſogliono eſſere ſulle facce dei criſtalli di rocca, ma vi ſi vedono diverſi piani a piccoli riſalti, ognuno dei quali però è liſcio.

52. Da queſte proprietà io conchiudo, che tal pietra non è da annoverarſi tra i criſtalli di rocca. E veramente nonoſtante la ſomiglianza apparente che ſembra avere con queſti, pure gli ſteſſi raccoglitori di tali criſtalli la diſtinguono dai medeſimi. Io anzi ſtimo che eſſa ſia da riguardarſi come un feldſpato più conſiſtente, e più puro degli ordinarj, e tanto più quanto che ho oſſervato che talora certi pezzi ſimili ai deſcritti formano come una parte integrante di deciſi feldſpati criſtallizzati.

53. La deſcritta varietà di feldſpati ſembra per leggieri degradazioni paſſare alla natura di certi criſtalli di rocca, che nella montagna ſteſſa ſi trovano. Queſti hanno tutte le proprietà poc' anzi indicate, ſe non che la loro criſtallizzazione è priſmatica eſagona col vertice piramidato: nella ſpezzatura ſono pingui al tatto, e all' aſpetto; e non preſentano ſulla ſuperficie verun cangiante.

54. Prima di terminare il diſcorſo ſui feldſpati, io qui ne aggiugnerò alcune eleganti varietà che ſi trovano in altre parti dell' Italia. Una che più s' accoſta ai feldſpati di S. Gottardo trovaſi nelle lave del Veſuvio Napolitano. Queſti ſono in piccoli criſtalli groſſi poche linee, e di figura indeterminata; alcuni per l' azione del fuoco ſono anche in parte ſemivetrificati, coſicchè una porzione dei medeſimi ha preſa una forma conveſſa. Di eſſi alcuni ſono cangianti con un colore argentino grigio dilavato. Queſto mi fa ſoſpettare, che forſe alcune delle lunarie che ſono in commercio, e delle quali finora non mi è noto il luogo originario, ſie-

no

no feldſpati tratti da lave del Veſuvio, o di altro vulcano.

55. Altre varietà trovanſi nella Corſica iſola adjacente all' Italia; e la ſcoperta loro è dovuta ad un intelligentiſſimo, ed aſſai corteſe Uffiziale Franceſe il Sig. *Barral* Iſpettore generale dei ponti, e delle ſtrade in quell' iſola, il quale ſi compiacque di farmene parte. La prima è il feldſpato ſemitraſparente a lamine eſagone irregolari, le quali ſono lunghe al più 6 linee. La ſeconda è il feldſpato parallelepipedo ora traſparente, ora ſemitraſparente, ed or opaco. Queſto ultimo è roſſo carnicino, e ſi aſſomiglia aſſai a quelli di Baveno. Trovaſi per entro ad un granito miſchiato con mica, il quale è forſe quello che forma la decima varietà deſcritta dal Sig. *Barral* alla pag. 71 del ſuo Opuſcolo, che ha per titolo: *Memoire ſur l' hiſtoire naturelle de l' Isle de Corſe*. Gli altri indicati criſtalli hanno il vertice ordinariamente a tre piani, che nella figura 9 ſono eſpreſſi dalle lettere *ABCL*, *CLED*, *BCD*: la qual figura è di grandezza tripla della naturale. La diſpoſizione però e la forma di queſti piani ha molte varietà. Una delle facce del parallelepipedo, come *ALENO*, ſuol avere pel lungo un angolo molto ottuſo *AIL*. Nello ſpezzare queſti parallelepipedi anche colla percoſſa, ed in qualunque direzione, vedeſi che ſono compoſti di lamelle; ma hanno queſta ſingolarità, che ognuna delle due facce, che riſultano nella ſpezzatura, non è piana, ma formata ad angolo ottuſiſſimo, il quale in un pezzo è rilevato, come *DEF* (*Fig.* 10.), e nell' altro corriſpondente è ſinuoſo, quale è *ABC*. Tra queſti criſtalli taluno è compiutamente traſparente; ed in alcuni pure vedeſi una tendenza al cangiante, ſebbene però in neſſuno ſia deciſo. Queſte due varietà di parallelepipedi traſparenti, e ſemitraſparenti da taluno ſono riputate ſcerli. Ma per la tendenza al cangiante per la figura, e pel teſſuto lamellare io li riguardo come feldſpati. In queſta opinione io tanto più mi confermo dal vedere, che queſte pietre della Corſica ſono ſimiliſſime a certe altre del Delfinato, che da alcuni pure ſono riguardate co-

me ſcerli bianchi, ma che dal Sig. *de la Metherie* (a) ſono riconoſciuti per feldſpati; e ciò per due argomenti molto plauſibili: il primo è che tali pietre hanno una ſtruttura ſimile a quella dei feldſpati; l'altro è che ſecondo l'eſperienza di M. *d' Arcet* quelle al fuoco producono un vetro, o ſmalto bianco ſimile a quello che dai feldſpati è prodotto.

56. E ciò baſti dei feldſpati. Vengo ora a dire di due altre pregevoli ſpecie di pietre che mi ſi ſono preſentate nelle raccolte da me fatte dei foſſili di S. Gottardo. La prima è uno ſcerlo bianco radiato, o anzi ſtriato a raggi concentrici. I raggi ſono ſingolari per la loro lunghezza che giugne ſino a 6 pollici. Eſſi ſono ſottiliſſimi, quaſi ſeparabili, e molto fragili, e nello inſieme formano una maſſa dura, ma fragile. Quando i fili ſono ſeparati, e ſottili ſono ſemitraſparenti, e nella ſeparazione ſi riducono in fili ſempre più ſottili, e queſti, quando ſono ridotti a ſomma ſottigliezza, ſi fondono anche alla ſemplice fiamma di una candela.

57. L'altra ſpecie è uno ſcerlo elettrico o anzi una tormalina. Allorachè io pubblicai le mie Oſſervazioni mineralogiche ſul S. Gottardo indicai tra i foſſili di queſta celebre montagna anche lo ſcerlo nero colonnare; ma perciocchè io allora lo avea ſoltanto trovato inſeparabilmente inſinuato in criſtallo di rocca, perciò non potei eſperimentare ſe foſſe elettrico. In ſeguito lo riconobbi per tale in molti ſimili ſcerli anche iſolati, che ricevetti di colà già da due anni addietro.

58. Il primo che in quella montagna lo ricercò come tormalina fu, per quanto udii, un Ginevrino, e dappoi fu di eſſa fu pubblicato un Opuſcolo Tedeſco, che finora non ho veduto. Ultimamente ne diede una deſcrizione l' egregio Sig. Abate *Beretta* negli Opuſcoli Scelti di Milano. Io qui ſoggiugnerò di queſta pietra quelle oſſervazioni che io vi ho fatte.

59. La figura di queſto ſcerlo è un priſma poligono *ABCFDE* (*Fig.* 8. *n.°* 1.) ſtriato col vertice poliedro. La ſezione verticale all' aſſe del priſma ſpeſſe volte è quaſi un triangolo *KGL* (*Fig.* 8. *n.°* 2.) coi lati curvilinei. La cur-

---

(a) Lettre de M. l' Ab. *Haüy* pag. 63 Journal de Phyſique Janvier 1786.

vità dei lati proviene dall' eſſere ognuno di eſſi compoſto quaſi di molte linee rette che ſono compreſe tra le inciſioni delle ſtrie. Quindi il compleſſo di queſte rette forma bensì un poligono, ma atteſa maſſimamente la piccolezza del diametro del priſma molte rette ſi preſentano in forma di curva, e nella ſezione ſi diſtingue ſolo un certo numero di lati curvilinei. Queſto numero ſuol eſſere indeterminato; pure dal confronto di molti priſmi ſembra che la figura loro ſia a 6, o 7 lati più o meno curvi. Il vertice è ora a tre piani, ora a 4, ora a 5 ed anche a 6. Qualche piano del vertice talora è miſtilineo, cioè compoſto di linee parte rette, e parte curve. Le varietà più rimarchevoli da me riconoſciute ſono le ſeguenti.

1.° Priſma triangolare curvilineo col vertice a 4 piani, dei quali due ſono tetragoni, e due pentagoni.

2.° Priſma ſubtetragono col vertice a 4 piani, dei quali due ſono tetragoni, e due pentagoni.

3.° Priſma ſubtetragono col vertice a 6 piani, dei quali uno è triangolare, l' altro tetragono, e quattro ſono indeterminati.

4.° Priſma ſubeſagono col vertice a 6 piani, dei quali uno è triangolare, e due ſono tetragoni, e tre eſagoni.

5.° Priſma ſubeſagono col vertice a tre piani, dei quali uno è pentagono e due eſagoni indeciſi.

6.° Priſma ſubeſagono col vertice a 3 piani, dei quali uno è tetragono, l' altro pentagono, ed il terzo indeterminato.

7.° Priſma ſubeſagono col vertice a 4 piani, dei quali uno è triangolare e tre ſono pentagoni.

8.° Priſma ſubeptagono col vertice a 4 piani, dei quali uno è tetragono, l' altro pentagono, e due ſono eſagoni.

9.° Priſma ſubeptagono col vertice a 6 piani, dei quali tre ſono tetragoni e tre eſagoni.

60. La groſſezza di queſti priſmi giugne ſino a linee tre e mezza, la lunghezza ſuol eſſere di circa un pollice, e talora è di due.

61. I priſmi generalmente trovanſi diſpoſti con varie direzioni in gruppi di diverſe groſſezze, i quali però internamente formano una maſſa ſolida. Sulla ſuperficie di tali maſſe ſogliono eſſere impiantati, o ſdrajati i priſmi: onde è che

ordinariamente hanno un ſolo vertice; taluno però ne ha due, come già fu indicato dal Sig. *Beretta*.

62. Queſti gruppi ora trovanſi iſolati, ora aderenti a diverſe ſpecie di pietre. Tali ſono il criſtallo di rocca, il quarzo criſtallino, il feldſpato, ed il granito. Talora vi formano anche delle vene molto ampie. Una di queſte è lunga 18 pollici, larga 9, e groſſa 3; ed eſſa è inſinuata in feldſpato criſtallino fragile aderente a granito miſto con ſcerlo verde radiato.

63. La tormalina a luce rifleſſa compare di color nera, lucidiſſima, ed opaca; ma a luce rifratta e viva vedeſi ſemitraſparente e di color giallo più o meno roſſeggiante. Per vederla di tal colore non baſta collocare la pietra tra l' occhio, e la luce di una candela, o del ſole, ma convien riguardarla ſotto certi angoli, ed allora vedeſi la ſemitraſparenza ed il colore roſſiccio in una conſiderabile porzione del diametro dei priſmi, la quale è maggiore o minore ſecondo la minore o maggior groſſezza dei medeſimi. In queſto fenomeno interviene una vera rifrazione ſimile a quella, che ha luogo nei priſmi ordinarj, e però affinchè ſia ſenſibile è neceſſaria certa ſituazione d' occhio per rapporto all' oggetto, ed alla luce. Il fenomeno però deve dipendere anche da una particolare ſtruttura della pietra; ed io m' immagino che eſſa ſia compoſta di fili paralleli, i quali nella ſuperficie formano le ſopraindicate ſtrie, e che tra eſſi poſſa paſſare la luce non però ſecondo tutte le direzioni. Poſta tale ſtruttura intendeſi, come la ſemitraſparenza non compaja quando per eſempio l' occhio, la pietra, e la luce ſono nella ſteſſa direzione. Ciò interviene, perciocchè in tale ſituazione la luce, che paſſa tra i primi fili rivolti verſo la luce, viene intercetta all' occhio dai ſeguenti rivolti verſo l' occhio ſteſſo. Per contrario comprendeſi che cadendo la luce ſulla pietra ſotto un certo angolo, eſſa nel rifrangerſi deve eſcire ſotto un altro angolo, e quando l' occhio ſia ſituato nella direzione dei raggi rifratti allora dee averne la corriſpondente impreſſione.

64. Quanto alla forza elettrica la tormalina di S. Gottardo la manifeſta non ſolo nei priſmi iſolati, ma anche nelle maſſe informi: in quelli però è molto più ſenſibile che in

II

Fig: IV

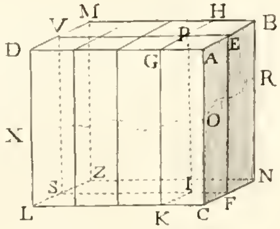

M
H
V
B
D
P
E
G
A
R
O
X
Z
N
S
I
L
K
C
F

Fig: VIII n°. 1

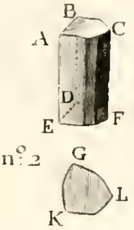

B
A
C
D
E
F
n°. 2
G
L
K

Fig: VI

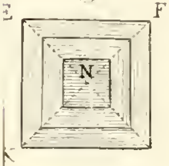


Fig: VII

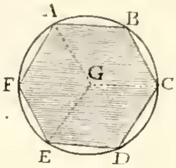


Fig: X

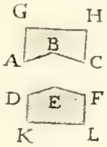

G
H
A
B
C
D
E
F
K
L

Fig. I

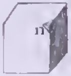


Fig. II

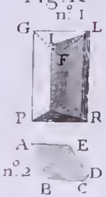

n.° 1
G
L
I
F
P
R
A
E
n.° 2
D
B
C

Fig. III

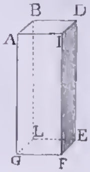


Fig. IV

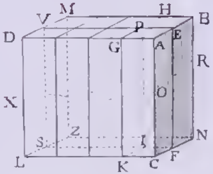

V
M
H
B
D
P
E
G
A
R
X
O
Z
S
I
N
L
K
C
F

Fig. VIII n.° 1

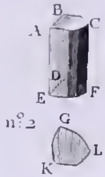

B
C
A
D
E
F
n.° 2
G
L
K

Fig. V

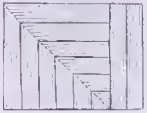


Fig. VI

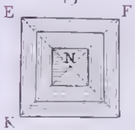


Fig. VII

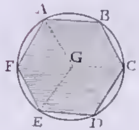


Fig. IX

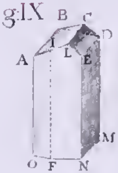
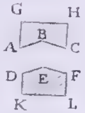

B
C
D
I
A
L
E
M
O
F
N

Fig. X


G
H
B
A
C
D
E
F
K
L

queſte: il che ſembra dipendere dalla maggiore uniformità di materia che è nei priſmi. Tale forza però è minore di quella con cui agiſce la tormalina del Tirolo: ed avvi inoltre un' altra diverſità, ed è che queſta ſeconda agiſce abbenchè ſia molto calda, laddove la prima non dà ſegni elettrici ſe non quando è quaſi del tutto raffreddata.

65. Sull' elettricità della tormalina io non mi ſtenderò più a lungo avendo già diffuſamente trattato chi parlò delle tormaline di Ceylan, del Braſile, e del Tirolo, e della Spagna. Solo aggiugnerò che avendo io eſperimentati altri ſcerli neri dell' Italia, che nell' apparenza ſi raſſomigliavano alla deſcritta tormalina, due ne trovai che pel riſcaldamento divenivano elettrici. Uno è dell' Iſola del Giglio, la cui groſſezza è di quaſi 6 linee. L' altro è della valle di Antigorio nell' alto Novareſe; queſto è in priſmi poligoni groſſi ſino a 5 linee, ed è inſinuato in una rocca granitoſa miſchiata con mica argentina. Sì l' uno che l' altro però di queſti ſcerli danno ſoltanto leggieriſſimi ſegni di elettricità, coſicchè appena potrebbero annoverarſi tra le tormaline, quand' anco aveſſero le altre proprietà per cui queſte dai ſcerli ſi diſtinguono.

Fine delle Memorie Sociali.

INDICE

DELLE MEMORIE

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

PRIMA SEZIONE.

Sopra il movimento concreto de' ſolidi.
Del Sig. Paolo Delanges Profeſſore di Matematica nel Collegio Militare di Verona . . . . . pag 1

Ricerche intorno all' origine del natro o alcali marino nativo.
Del Sig. Cavaliere Lorgna 39

Oſſervazioni anatomiche e patologiche ſugli organi uropoietici.
Del Sig. Vincenzo Malacarne Direttore delle R.

Terme Acqueſi, e Chirurgo Maggiore del Real Preſidio di Torino

All' Illuſtriſs. e Celebratiſs. Sig. Co. Don ALESSANDRO DE BRAMBILLA Ceruſico della Perſona di S. M. Imperiale, Proto-Ceruſico delle Truppe Imperiali Auſtriache ecc. 102

Eſpoſizione anatomica delle parti relative all' encefalo degli uccelli.

Del Medeſimo

Al Chiariſſimo Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. il Duca di Parma, Preſidente al Gabinetto di Storia Naturale, Profeſſore primario della medeſima, e di Notomia in quella Regia Univerſità. 126

SECONDA SEZIONE.

Teoremi ſopra le ſerie infinite convergenti formate dai Prodotti de' Numeri diſpari ſucceſſivi diviſi pe' Prodotti de' Numeri pari corriſpondenti.

Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie, Pubblico Profeſſore delle Matematiche ſuperiori nella Regia Univerſità di Pavia 174

Sopra l' integrazione della formula $Qdx + Py^2dx \pm dy = 0$

Del Sig. CAVALIERE LORGNA 220

Della figura del Gorgo che la Natura forma in un vaſo cilindrico ripieno d' acqua, nel centro del cui fondo ſia aperto un foro circolare

Del Sig. Co. GIORDANO RICCATI 238

Oppoſizione del nuovo Pianeta oſſervata nel 1783.

Dal Sig. GIUSEPPE SLOP DE CADENBERG Pubblico Profeſſore d' Aſtronomia nell' Univerſità di Piſa. 258

Conſiderazioni Ottiche.
Del Sig. Ab. GIAMBATTISTA VENTURI Profeſſore di Filoſofia e Matematica nell' Univerſità di Modena. 268

Memoria I. Sulla vera denſità de' Pianeti, ſulla riduzione de' loro ſemidiametri, e ſull' ipoteſi de' loro nuclei.
Del Sig. Ab. LEONARDO XIMENES Matematico di S. A. R. il Granduca di Toſcana 278

TERZA SEZIONE.

Di varie minere di metalli, e d' altre ſpecie di foſſili delle montane provincie Venete di Feltre, di Belluno, di Cadore, e della Carnia, e Friuli; e ſpecialmente del ſale catartico amaro a baſe di magneſia ſcoperto recentemente in quelle montagne.
Del Sig. GIOVANNI ARDUINO Profeſſore di Mineralogia, e di Chimica metallurgica, e Pubblico Sopraintendente alle coſe Agrarie dello Stato Veneto 297

Saggio analitico di alcune lucide meteore.
Del P. CARLO BARLETTI delle Scuole Pie Profeſſore di Fiſica Generale nell' Univerſità di Pavia. 331

Delle ſtazioni de' Pianeti.
Del Sig. ANTONIO CAGNOLI. 369

Nuove ſperienze intorno alla dolcificazione dell' acqua del mare.
Del Sig. CAVALIERE LORGNA 375

Saggio ſopra l' efficacia dell' olio di olivo nell' Artritide Vaga.
Del Sig. GIOVANNI ANTONIO MARINO Medico Primario dell' Oſpitale della SS. Annunciata di Savigliano in Piemonte.
Preſentata dal Sig. VINCENZO MALACARNE. 406

Sopra alcuni fenomeni de' fosfori Bologneſi ne' differenti fluidi aeriformi.
Del Sig. CONTE MOROZZO 420

Oſſervazioni Fiſiche iſtituite nell' Iſola di Citera oggidì detta Cerigo.
Dal Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Profeſſore di Storia naturale nell' Univerſità di Pavia, e indirizzate
Al Sig. CAVALIERE LORGNA 439

Sopra il Veleno dei Funghi.
Del Sig. Dott. GIOVANNI VERARDO ZEVIANI. 465

QUARTA SEZIONE.

Ricerche Analitiche ſopra diverſi ſoggetti.
Del P. GREGORIO FONTANA delle S. P. Pubblico Profeſſore delle Matematiche Superiori nella Regia Imperiale Univerſità di Pavia 498

Sopra la diſtribuzione delle Alluvioni.
Del Sig. CAVALIERE VITTORIO FOSSOMBRONI 533

Saggio di oſſervazioni Anatomiche intorno agli organi Elettrici della Torpedine.

Del Sig. MICHELE GIRARDI *Medico* di Camera di S. A. R. di Parma, Preſidente al Gabinetto di Storia Naturale, e Profeſſore della medeſima, e di Anatomia

Al Sig. GIO. GOTTLIEB WALTER celebre Profeſſore di Notomia in Berlino 553

Delle Serie ricorrenti.

Del Sig. GIAN-FRANCESCO MALFATTI Pubblico Profeſſore di Matematica nella Pontificia Univerſità di Ferrara 571

Tentativo per migliorare i Cannocchiali Acromatici propoſti da Eulero.

Del Sig. Ab. BARNABA ORIANI Aſtronomo nel Regio Oſſervatorio di Milano 664

Oſſervazioni ſu i Feldſpati, ed altri Foſſili ſingolari dell' Italia.

Del P. ERMENEGILDO PINI Ch. Reg. B. Profeſſore di Storia Naturale a Milano indirizzate

Al Sig. CAVALIERE IGNAZIO DE BORN Conſigliere nel Dipartimento Aulico delle Miniere, e membro delle Società di Pietroburgo, Londra, Upſal ecc. 688

		ERRORI	CORREZIONI
p. 300	l. 4	Nota (*a*) Minera, a mio parere,	Miniera, a mio parere,
301	25	*foſſum autem*	*foſſam autem*
309	32	Avvegnachè de'	Avvegnachè da'
312	12	delle Monache, Pezzea	delle Monache, e Pezzea
	15	Eneuſs	Gneuſs
315	26	tre le alpi	tra le alpi

Ciaſcun foglio di queſt' opera, e ciaſcuna tavola inciſa, reſta fiſſato che importi quattro ſoldi Veneti alla mia Stamperia inalterabilmente ora e poi. Onde il valore del preſente Tomo ſciolto in Verona aſcende a lire Venete 21.

SEMPER
EADEM

BRITISH
NATURAL HISTORY.